Digitized by Google

Phys. sp.
743 m -1

Winkler

Digitized by Google

<36609975450010

S

<36609975450010

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

DIE LEHRE

von der

ELASTICITAET

und

FESTIGKEIT

mit

besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik,

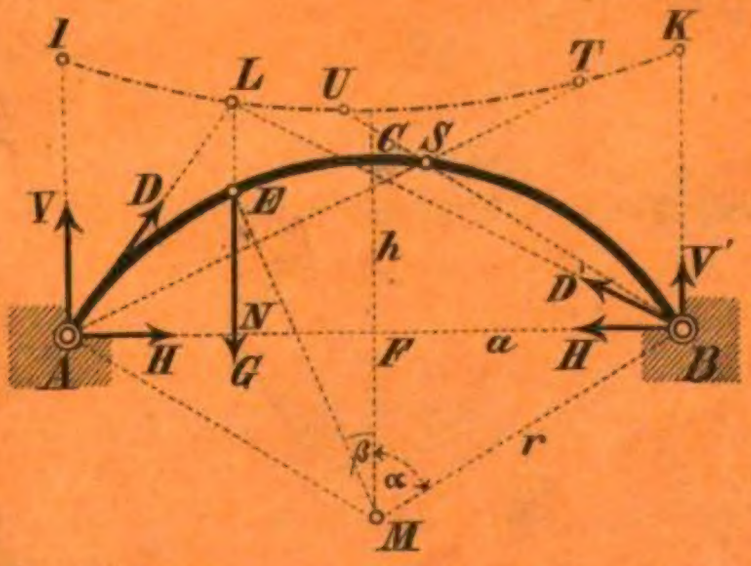
für

polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure,
Maschinenbauer, Architecten, etc.

Von

Dr. E. Winkler,

ord. Professor der Ingenieurbaukunde am Polytechnicum in Prag.



Mit 120 Holzschnitten und 12 lithographirten Tafeln.

PRAG, 1868.
Verlag von H. Dominicus.

271 Gy

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Digitized by Google

DIE LEHRE

von der

ELASTICITAET

und

FESTIGKEIT

mit

besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik,

für

polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure,
Maschinenbauer, Architecten, etc.

Von

Dr. E. Winkler,

ord. Professor der Ingenieurbaukunde am Polytechnicum in Prag.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und lithographirten Tafeln.

1. Theil.

PRAG, 1867.

Verlag von H. Dominicus.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

Digitized by Google

Vorrede.

Die Herausgabe des vorliegenden Werkes wurde hauptsächlich durch den Wunsch veranlasst, für die zahlreichen Untersuchungen aus dem Gebiete der Elasticitäts- und Festigkeitslehre, welche in meinen Vorträgen über Ingenieurbaukunde nöthig werden, eine feste theoretische Grundlage zu besitzen. Da hierbei der bei Weitem grösste Theil dieser Lehre Anwendung findet, so entschloss ich mich, das Werk zu einem allgemeinen Lehrbuche der Elasticitäts- und Festigkeitslehre für Techniker zu gestalten. Jedoch hielt ich es für angemessen, das Werk in zwei Theile zu trennen, von denen der vorliegende erste Theil die für die Baukunde im engeren Sinne, insbesondere für den Brückenbau, wichtigsten Lehren enthält. Er enthält nämlich die allgemeine Elasticitätslehre, die Normalelasticität (Zug- und Druckelasticität), die Schubelasticität und die Biegungselasticität gerader und gekrümmter Stäbe. Da diese Theile für das Verständniss der Bauconstructionen allenfalls ausreichen, so kann dieser Theil als ein abgeschlossenes Ganze angesehen werden. Der zweite Theil soll die übrigen für die Technik wichtigen Lehren enthalten, nämlich die Torsionselasticität gerader Stäbe, die Elasticität doppelt gekrümmter Stäbe, der Rotationskörper, der ebenen und gekrümmten Platten, die Dy-

Digitized by Google

namik der Elasticität und schliesslich die Geschichte und Literatur der Elasticitätslehre.

Dieses beabsichtigten letzten Abschnittes wegen habe ich auch vermieden, den Text durch Quellenangaben und geschichtliche Notizen zu unterbrechen. Dieser Abschnitt wird zugleich Gelegenheit bieten, mancher Arbeiten zu gedenken, welche im Texte übergangen werden mussten, um das Werk nicht zu voluminös zu machen. Ueberhaupt soll dasselbe nur so viel enthalten, als der Techniker unbedingt zu wissen nöthig hat. Ebenso habe ich weitläufigere Untersuchungen, welche nur Anwendung in speziellen Zweigen der Technik finden, übergangen, z. B. die Bestimmung der ungünstigsten Belastung der Brückenträger, die Theorie zusammengesetzter Constructionen, wie der Dächer, Sprengwerke, Gitterträger u. s. w., welche viel Raum beansprucht haben würden. Derartige Untersuchungen passen besser in die Vorträge über die einzelnen Zweige der Technik, als in ein allgemeines Lehrbuch der Elasticität und Festigkeit.

Als mathematische Bildung wird nur diejenige vorausgesetzt, die jetzt an allen polytechnischen Schulen geboten wird. Das Studium des Werkes kann bereits beginnen, wenn die Differenzialrechnung und die Elemente der Integralrechnung vorgetragen worden sind. Einzelne Parthien können beim ersten Studium übergangen werden, wenn hierzu die nöthige Zeit fehlen sollte. Dieselben sind am Schlusse dieses Theiles näher bezeichnet.

Beispiele sind nur da gegeben worden, wo es für das Verständniss unbedingt nöthig schien. Eine grössere Anzahl von Beispielen würde zwar Manchem das Studium erleichtern; dieselben würden aber den Preis des Werkes zu sehr erhöht haben. Jedoch habe ich das Verständniss durch Aufnahme vieler Tabellen und graphischer Darstellungen zu erleichtern gesucht. Auch ist in kleiner Schrift vielfach auf praktische Anwendungen hingedeutet worden.

Digitized by Google

An einem Werke, welches alle Lehren der Elasticität und Festigkeit in gleichem Maasse behandelt, fehlte es bis jetzt noch, selbst in der reichen französischen Literatur. Selbst das treffliche Werk von Grashof hat diesem Mangel nicht ganz abgeholfen, da dieses Werk insbesondere das Bedürfniss des Maschinenbaues berücksichtigt und auch manche für diesen wichtige Lehre nicht enthält oder zu kurz behandelt. Da die Lehren der Elasticität und Festigkeit, welche der Maschinenbauer, der Ingenieur und der Hochbauer bedarf, ganz dieselben sind; nur dass der eine diesen, der andere jenen Theil in ausgedehnterem Maasse bedarf, so wird ein Werk, welches alle Lehren der Elasticität und Festigkeit in gleichem Maasse behandelt, nicht überflüssig erscheinen. Ein solches zu schaffen, war das Streben, welches mich bei der Abfassung des vorliegenden Werkes leitete.

Der von mir gewählte Gang ist insofern von dem von Grashof gewählten Gange abweichend, dass letzterer die allgemeinen Untersuchungen den speciellen folgen lässt, wofür er allerdings seinen guten Grund hat, während ich die allgemeinen Untersuchungen voran schicke. Hierdurch entsteht allerdings der Nachtheil, dass mancher vom Studium zurückgeschreckt wird, weil gerade das Studium der allgemeinen Lehren etwas mehr geistige Anstrengung erfordert, als viele der folgenden Lehren. Jedoch setze ich von den Studirenden, für welche das Werk bestimmt ist, eine solche mathematische Bildung voraus, dass sie diese kleine Schwierigkeit leicht überwinden werden. Das Studium der übrigen Theile wird aber bedeutend erleichtert, wenn man sich erst diesen kurzen allgemeinen Theil zu eigen gemacht hat — und dies ist ein nicht unwesentlicher Vortheil.

Die vorhandenen Werke und Abhandlungen aus dem Gebiete der Elasticitäts- und Festigkeitslehre habe ich natürlich benutzt. Jedoch wird man auch manche mir eigenthümliche Untersuchungen finden. Als solche erlaube ich mir zu erwähnen: Die allgemeinen Sätze vom Maximum

Digitized by Google

der Schubspannungen, die Einführung der idealen Hauptspannungen, allgemeine Bestimmungen der Schubspannungen T_2 bei der Biegungselasticität, die Sätze von den proportionalen Querschnitten, Versuch einer Ausdehnung der innerhalb der Elasticitätsgrenze giltigen Regeln auf den Bruch, mehrfache Resultate über continuirliche Träger, Erweiterung der Regeln für eine gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte, Erweiterung der Theorie der Träger mit I-förmigem Querschnitte, Ergänzung der allgemeinen Theorie gekrümmter Stäbe, Einführung der Kernlinien, Einführung der Kämpferdrucklinien und Kämpferdruckumhüllungslinien und Bestimmung derselben in den verschiedenen Fällen, Theorie der Bogen ohne Gelenk, allgemeine Theorie des Einflusses der Temperatur auf Bogenträger.

Den Technikern übergebe ich das Buch mit dem Wunsche, dass sie von dem Studium der Elasticitäts- und Festigkeitslehre, welche für die Technik eine unbestreitbare Wichtigkeit hat, nicht durch eingebildete Schwierigkeiten zurückschrecken mögen, und die Mathematiker bitte ich um eine nachsichtige Beurtheilung.

Prag, im Juli 1868.

Der Verfasser.

Digitized by

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Elasticität.

I. Kapitel. Die inneren Kräfte 3
II. „ Die Formänderungen 13
III. „ Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung 17
IV. „ Molecular-theorie 24
V. „ Allgemeine Festigkeitslehre 30

II. Abschnitt.

Normal- und Schub-Elasticität.

VI. „ Normalelasticität gerader Stäbe 37
VII. „ Schubelasticität 45

III. Abschnitt.

Biegungselasticität gerader Stäbe im Allgemeinen.

VIII. „ Bestimmung der Spannungen 47
IX. „ Formänderung 62
X. „ Bruchfestigkeit 69

IV. Abschnitt.

Belastung der Transversalkräfte.

XI. „ Bestimmte Belastung 79
XII. „ Bestimmte Belastung bei Stäben mit einem Felde 91
XIII. „ Prismatischer continuirlicher Stab mit gleich hohen Stützen im Allgemeinen 112
XIV. „ Prismatischer continuirlicher Stab mit gleich hohen Feldern und gleich hohen Stützen 120
XV. „ Prismatischer Stab mit ungleichen Feldern und gleich hohen Stützen 130
XVI. „ Prismatischer continuirlicher Stab mit ungleich hohen Stützen 143
XVII. „ Continuirlicher Stab mit veränderlichem Querschnitte . . 150

Digitized by Google

Seite

V. Abschnitt.

Belastung durch Kräfte, unter welchen Axialkräfte sind.

XVIII. Kapitel. Belastung durch centrisch wirkende Axialkräfte 158
XIX. „ Belastung durch excentrisch wirkende Axialkräfte 166
XX. „ Gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte 171

VI. Abschnitt.

Verschiedene Querschnittsformen.

XXI. Kapitel. Der rechteckige Querschnitt 185
XXII. „ Der elliptische Querschnitt 192
XXIII. „ Verschiedene Querschnittsformen 199
XXIV. „ Idealer I-förmiger Querschnitt 210
XXV. „ Symmetrischer I-förmiger Querschnitt 213
XXVI. „ Unsymmetrischer I-förmiger Querschnitt 225
XXVII. „ T-förmiger Querschnitt 232

VII. Abschnitt.

Genaue Biegungstheorie gerader Stäbe.

XXVIII. „ Allgemeine Theorie 235
XXIX. „ Anwendung auf bestimmte Querschnittsformen 242

VIII. Abschnitt.

Normalelasticität einfach gekrümmter Stäbe.

XXX. „ Allgemeine Theorie 253
XXXI. „ Anwendung auf verschiedene Belastungsweisen und Körperformen 257

IX. Abschnitt.

Biegungselasticität einfach gekrümmter Stäbe.

XXXII. „ Allgemeine Theorie 268
XXXIII. „ Anwendung auf einige Querschnittsformen 276
XXXIV. „ Beispiele für bestimmte Belastung 285
XXXV. „ Bogenträger mit Kämpfergelenken im Allgemeinen . . 293
XXXVI. „ Bogen mit Kämpfer- und Scheitelgelenken 298
XXXVII. „ Bogen mit Kämpfergelenken, aber ohne Scheitelgelenk 309
XXXVIII. „ Bogen ohne Gelenk und mit eingespannten Kämpfern . 323
XXXIX. „ Einfluss der Temperatur 358
XL. „ Ringförmige Körper 369

Anhang 380

Digitized by Google

Einleitung.

§. 1. Die Elasticität fester Körper. Wenn auf einen festen Körper äussere Kräfte, d. s. Kräfte, welche von einem zweiten Körper ausgehen, wirken, so nimmt der Körper eine andere Form an, oder genauer, die einzelnen Punkte des Körpers nehmen eine andere gegenseitige Lage an. Der Körper nimmt aber seine frühere Form mehr oder weniger wieder an, wenn die Einwirkung der äusseren Kräfte wieder aufhört. Man nennt diese Eigenschaft der festen Körper ihre Elasticität.

§. 2. Unvollkommene Elasticität. Gewöhnlich nennt man einen Körper mehr oder weniger elastisch, je nachdem er mehr oder weniger in seine frühere Form zurückgeht, wenn die Wirkung der äusseren Kräfte aufhört. Einen Körper, welcher seine frühere Form ganz wieder annimmt, oder einen vollkommen elastischen Körper, giebt es nicht; ebenso wenig giebt es einen festen Körper, welcher die ihm von den äusseren Kräften ertheilte Form ganz beibehält, oder einen vollkommen unelastischen Körper.

Die gesammte Formänderung lässt sich in zwei Theile zerlegen, nämlich einen Theil, welcher nach Beseitigung der äusseren Kräfte wieder verschwindet oder die elastische Formänderung, und einen Theil, welcher verbleibt, oder die bleibende Formänderung.

Je kleiner die äusseren Kräfte sind, desto kleiner ist auch die Formänderung und desto vollkommener wird die Form wieder hergestellt oder desto kleiner ist die bleibende Formänderung. Bis zu einer gewissen Grenze ist die bleibende Formänderung kaum merkbar oder, praktisch zu sprechen, nicht vorhanden. Man nennt diese Grenze die Elasticitätsgrenze. Sie ist allerdings sehr unbestimmt und richtet sich hauptsächlich nach der Genauigkeit, mit welcher man die Formänderung zu messen im Stande ist.

§. 3. Bewegung bei der Formänderung. Wenn die äusseren Kräfte von Null an ganz allmählig wachsen, so wächst auch die Formänderung ganz allmählig und der Körper verbleibt in seiner neuen Form, wenn die äusseren Kräfte nicht mehr wachsen. Wir können dann die Form des Körpers die den äusseren Kräften entsprechende Ruheform nennen. Wenn aber die äusseren Kräfte in bestimmter Grösse plötzlich auf den Körper wirken, so entstehen Schwingungen um die Ruheform

Digitized by Google

die allmählig abnehmen, bis der Körper in der Ruheform verbleibt. Werden die äusseren Kräfte plötzlich beseitigt, so entstehen abermals Schwingungen um die anfängliche Form des Körpers, die nach und nach abnehmen, bis der Körper in seiner anfänglichen Form verbleibt.

Hat der Körper seine Ruheform angenommen, so nimmt die Formänderung dennoch äusserst wenig und ganz allmählig, zuweilen ununterbrochen, zu, indem sich die innere Beschaffenheit des Körpers ganz allmählig verändert. Wir nennen diese Formänderung die elastische Nachwirkung. Sie geht um so schneller vor sich, je grösser die Formänderung vorher war. Eine mathematische Theorie der elastischen Nachwirkung ist zur Zeit noch nicht möglich; wir werden daher auch in der Folge die elastische Nachwirkung nicht weiter in Betracht ziehen.

§. 4. Festigkeit. Bei zunehmender Formänderung tritt endlich eine Trennung des Körpers in mehrere Theile ein, was wir allgemein das Zerbrechen des Körpers nennen. Die Grösse der zum Zerbrechen nöthigen äusseren Kräfte nennen wir die Festigkeit des Körpers.

Je nachdem nach dem Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze noch eine grosse oder nur eine kleine bleibende Formänderung eintritt, ehe der Körper zerbricht, nennen wir denselben zähe oder spröde.

§. 5. Elasticitätslehre. Die Lehre von der Elasticität hat zwei Aufgaben zu lösen:

I. Die Ermittelung der Beziehungen zwischen den äusseren Kräften und der Formänderung.

II. Die Ermittelung der Bedingungen, unter welchen die Körper gegen bleibende Formänderungen oder gegen Zerbrechen eine für die Praxis genügende Sicherheit bieten. Wir nennen dieselben die Festigkeits-Bedingungen.

Oft hängen beide Aufgaben innig zusammen.

Die Elasticitätslehre oder die Mechanik der Formänderungen lässt sich in die Statik der Formänderungen und die Dynamik der Formänderungen trennen. Die erstere betrachtet die Körper nur in der Ruheform, während die letztere namentlich die Bewegungsgesetze während der Formänderung untersucht.

Die Dynamik der Formänderungen bietet gerade in vielen Fällen, welche grosse praktische Wichtigkeit haben, zur Zeit unüberwindliche analytische Schwierigkeiten, so dass man sich genöthigt sieht, sie in mehr praktischer Weise auf die Statik der Formänderungen zurückzuführen. Wir werden uns daher auch am meisten mit dieser zu beschäftigen haben.

Digitized by Google

I. Abschnitt.
Allgemeine Theorie der Elasticität.

I. Kapitel.
Die inneren Kräfte.

§. 6. Die inneren Kräfte. Wir denken uns im Innern eines Körpers eine beliebige kleine ebene Fläche f. Zwischen den auf beiden Seiten dieser Fläche liegenden Theilen des Körpers wird sich, sobald der Körper seine Form ändert, eine wechselseitig wirkende Kraft r äussern, welche über die ganze Fläche stetig vertheilt ist. Man nennt diese Kraft innere Kraft im Gegensatze zu den äusseren Kräften, welche die Formänderung des Körpers erzeugen. Die in Rede stehende Fläche f nennen wir die von der betreffenden inneren Kraft afficirte Fläche.

Dividiren wir die innere Kraft r, welche die Fläche f afficirt, durch f, so erhält man die auf die Flächeneinheit bezogene innere Kraft R. Wir nennen dieselbe die die Fläche f afficirende Spannung.

Die Spannung R lässt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine N senkrecht auf die Fläche f, die andere T in der Fläche f selbst wirkt. Die senkrecht wirkende Komponente N nennen wir Normalspannung. Sie ist entweder ein Zug oder ein Druck, je nachdem sie die auf beiden Seiten von f befindlichen Theile von einander zu entfernen oder einander zu nähern strebt. Einen Zug ziehen wir als positive, einen Druck als negative Spannung in Rechnung.

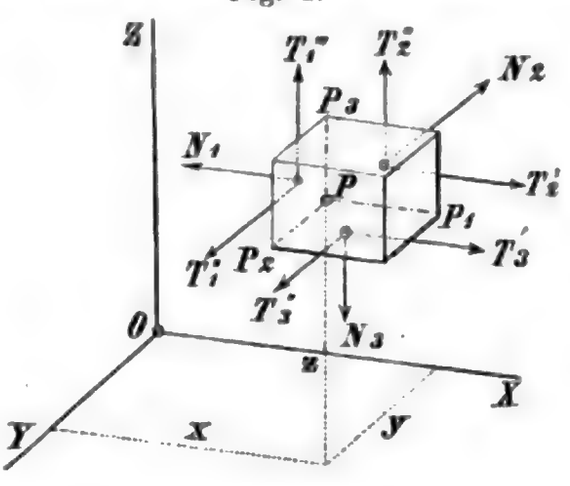
Die in der Fläche f selbst wirkende Komponente T strebt die auf beiden Seiten der Fläche liegenden Theile über einander zu verschieben; wir nennen sie daher Schubspannung.

§. 7. Spannungen, welche auf ein elementares Parallelepiped wirken. Wir denken uns im Innern des Körpers ein unendlich kleines Parallelepiped (Fig. 1), dessen Kanten $PP_1 = dx$, $PP_2 = dy$, $PP_3 = dz$ den Axen eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems parallel sind. Es bezeichne nun:

f_1, f_2, f_3 die drei in P zusammenstossenden Seitenflächen P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, wobei die Indices angeben, auf welcher Axe die Fläche senkrecht steht, wenn 1, 2, 3 bezüglich dem x, y, z entspricht;

v das Volumen dx dy dz des Elementes;

Fig. 1.



Digitized by

R_1, R_2, R_3 die Spannungen, welche die Seitenflächen f_1, f_2, f_3 afficiren;
N_1, N_2, N_3 die Normalspannungen, welche bezüglich den x, y, z parallel sind;
T_3'', T_2''' die Komponenten von R_1 nach Richtung der y, z, T_1''', T_3' die Komponenten von R_2 nach Richtung der z, x und T_2', T_1'' die Komponenten von R_3 nach der x, y. Diese Komponenten sind Schubspannungen. Der untere Index giebt die Kante an, welche von der Richtung der betreffenden Kraft geschnitten wird, und der obere Index die Axe, welcher die Kraft parallel ist. Der fehlende Index entspricht dem Index des afficirten Flächenelementes.
X_0, Y_0, Z_0 die Komponenten der auf die Volumeneinheit des Körperelementes wirkenden Kraft (z. B. der Schwere).

Die Spannungen, welche die den Flächen f_1, f_2, f_3 gegenüberliegenden Flächen afficiren, bezeichnen wir ebenso, schalten aber diese Bezeichnung in eine Parenthese, z. B. (N_1), (T_2'''). Alle Spannungen sind hierbei, um es nochmals zu erwähnen, auf die Flächeneinheit bezogen. Die auf die Flächen des Elementes selbst wirkenden inneren Kräfte sind daher $N_1 f_1$, $N_2 f_2$, $N_3 f_3$, $T_2''' f_1$, $T_3' f_2$ u. s. w.

§. 8. Gleichgewicht gegen Drehung. Damit das Körperelement im Gleichgewichte gegen Drehung ist, muss die Summe der Momente für drei beliebige Axen Null sein. Legen wir die Momentenaxe durch den Schwerpunkt des Elementes parallel zur Axe des x, so ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung

$$\tfrac{1}{2}\,[(T_1''') + T_1''']\, f_2\, dy - \tfrac{1}{2}\,[(T_1'') + T_1'']\, f_3\, dz = 0.$$

Da aber (T_1''') von T_1''' und (T_1'') von T_1'' nur unendlich wenig verschieden sein kann, so ist

$$T_1'''\, f_2 dy - T_1''\, f_3 dz = 0.$$

Die Division mit $v = f_2 dy = f_3 dz$ giebt die erste der drei folgenden Gleichungen.

$$1.\quad \begin{cases} T_1''' = T_1'', \\ T_2' = T_2''', \\ T_3'' = T_3'. \end{cases}$$

Die beiden anderen Gleichungen entsprechen dem Gleichgewichte gegen Drehung um Axen, welche den y, z parallel sind. In Worten sagen diese Gleichungen:

Die Schubspannungen, welche gleichen unteren Index haben, oder die Schubspannungen, welche dieselbe Kante des Körperelementes schneiden, sind einander gleich.

In Zukunft können wir nun die oberen Indices der T weglassen, so dass

$$2.\quad \begin{cases} N_1, & T_3, & T_2, \\ T_3, & N_2, & T_1, \\ T_2, & T_1, & N_3 \end{cases}$$

die Komponenten der auf das Körperelement wirkenden Spannungen sind. Die Kräfte der ersten, zweiten und dritten horizontalen oder vertikalen Reihe dieses Schemas afficiren Flächen, welche bezüglich auf den Axen der x, y, z senkrecht stehen.

Digitized by Google

§. 9. Gleichgewicht gegen Verschiebung. Damit das Körperelement im Gleichgewichte gegen Verschiebung ist, muss die Summe der Komponenten in Richtung dreier Axen Null sein. Für die Richtung der x ergiebt sich die Gleichgewichtsbedingung:

$$[(N_1) - N_1]f_1 + [(T_3') - T_3']f_2 + [(T_2') - T_2']f_3 + X_0 v = 0.$$

$(N_1') - N_1$ ist die Aenderung von N_1, wenn sich das afficirte Flächenelement f_1 nur nach Richtung der x um dx verschiebt, ohne dass sich y und z ändern. Wir müssen daher diese Aenderung mit $\frac{\partial N_1}{\partial x}$ dx bezeichnen, wenn wir totale Differenziale mit d, partielle mit ∂ bezeichnen. Ebenso ist nun $(T_3') - T_3' = \frac{\partial T_3'}{\partial y}$ dy und $(T_2') - T_2' = \frac{\partial T_2'}{\partial z}$ dz. Demnach geht die obige Gleichung, wenn wir nach dem vorigen Paragraph nur T_3 für T_3', T_2 für T_2' setzen, über in die erste der folgenden drei Gleichungen:

$$3. \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + X_0 = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + Y_0 = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z_0 = 0. \end{cases}$$

Die beiden anderen Gleichungen entsprechen dem Gleichgewichte gegen Verschiebung in Richtung der y und z.

§. 10. Spannung für ein beliebiges Flächenelement. Wir setzen voraus, dass die Spannungen N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 für ein rechtwinkliges Coordinatensystem bekannt seien. Wie man sie findet, wird später gezeigt werden. Es kommt nun darauf an, die Spannung R kennen zu lernen, welches auf ein Flächenelement f von beliebiger Lage wirkt. Zu dem Ende denken wir uns ein unendlich kleines Tetraeder (Fig. 2), dessen Kanten $PP_1 = dx$, $PP_2 = dy$, $PP_3 = dz$ den Axen der x, y, z parallel sind. Die Spannungen, welche die drei auf einander senkrechten Flächen f_1 f_2, f_3 afficiren, behalten die frühere Bezeichnung. Ausserdem bezeichne:

α, β, γ die Stellungswinkel der Fläche $P_1P_2P_3 = f$ von beliebiger Lage, d. h. die Winkel, welche die Normale AN dieser Flächen mit den Axen der x, y, z einschliesst;

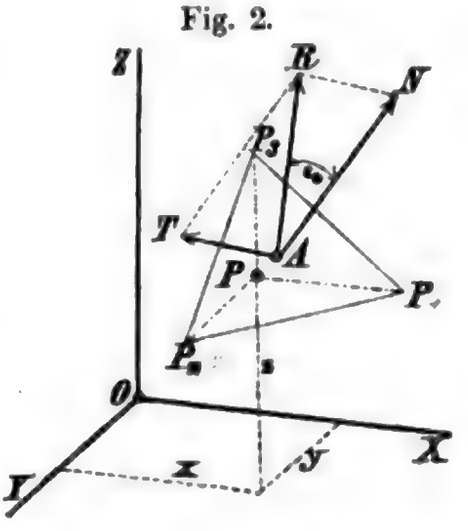
R die Spannung, welche die Fläche f afficirt;

N, T die Normal- und Schubkomponente von R;

X, Y, Z die Komponenten von R nach Richtung der x, y, z;

φ, ψ, ν die Richtungswinkel von R, d. h. die Winkel, welche R mit den Axen der x, y, z einschliesst;

Fig. 2.



Digitized by Google

ω den Winkel zwischen R und der Normale AN;
φ_1, ψ_1, ν_1 die Richtungswinkel von T.

Das Gleichgewicht des Körperelementes gegen Verschiebung in Richtung der x fordert die Erfüllung der Gleichung:

$$N_1 f_1 + T_3 f_2 + T_2 f_3 - X f - \tfrac{1}{3} X_0 f_1 dx = 0.$$

Bekanntlich aber ist $f_1 = f \cos\alpha$, $f_2 = f \cos\beta$, $f_3 = f \cos\gamma$; das letzte Glied $\frac{1}{3} X_0 f_1 dx$ verschwindet gegen die übrigen. Man erhält daher die erste der Gleichungen:

$$4. \quad \begin{cases} X = N_1 \cos\alpha + T_3 \cos\beta + T_2 \cos\gamma, \\ Y = T_3 \cos\alpha + N_2 \cos\beta + T_1 \cos\gamma, \\ Z = T_2 \cos\alpha + T_1 \cos\beta + N_3 \cos\gamma. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen drücken das Gleichgewicht gegen Verschiebung in Richtung der Y und Z aus.

Somit sind die Komponenten der auf die Fläche f von beliebiger Lage wirkenden Spannungen bestimmt. Diese Spannung selbst ist nun

$$5. \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Die Richtungswinkel von R sind bestimmt durch:

$$6. \quad \cos\varphi = \frac{X}{R}, \quad \cos\psi = \frac{Y}{R}, \quad \cos\nu = \frac{Z}{R}.$$

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie des Raumes ist:

$$\cos\omega = \cos\alpha \cos\varphi + \cos\beta \cos\psi + \cos\gamma \cos\nu,$$

d. i.

$$7. \quad \cos\omega = \frac{X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma}{R}.$$

Ferner ist $N = R \cos\omega$, $T = R \sin\omega$, d. i.:

$$8. \quad N = X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma.$$

$$9. \quad T = \sqrt{R^2 - N^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)^2}.$$

Endlich ist $T \cos\varphi_1 + N \cos\alpha = R \cos\varphi = X$, also $T \cos\varphi_1 = X - N \cos\alpha$; ebenso $T \cos\psi = Y - N \cos\beta$, $T \cos\nu_1 = Z - N \cos\gamma$, wodurch die Richtungswinkel φ_1, ψ_1, ν_1 bestimmt sind.

Die Komponenten der auf die Fläche f_1 wirkenden Spannung R_1 sind N_1, T_3, T_2; projicirt man diese Kraft R_1 auf die Normale von f_1, so erhält man als Projection die Summe der Projectionen von N_1, T_3, T_2, also $N_1 \cos\alpha + T_3 \cos\beta + T_2 \cos\gamma$. Ebenso gross ist nach 4 aber auch die Projection der die Fläche f afficirenden Spannung R auf die Axe der x oder die Normale von f_1. Hieraus folgt der Satz:

Sind R und R_1 die Spannungen, welche die beiden Flächen f und f_1 von beliebiger Lage afficiren, so ist die Projection von R auf die Normale von f_1 gleich der Projection von R_1 auf die Normale von f.

Die Gleichungen 1 bilden nur einen speciellen Fall dieses allgemeinen Gesetzes.

Digitized by Google

§. 11. Das Spannungsellipsoid. Von dem Gesetze, welchem die eine Fläche f afficirende Spannung R bei veränderlicher Lage dieser Fläche folgt, erhält man die klarste Vorstellung, wenn man R für jede mögliche Lage von f durch eine von dem betreffenden Punkte P ausgehende Gerade darstellt. Die Endpunkte aller dieser Geraden liegen sodann auf einer Fläche, deren Gestalt im Folgenden untersucht werden soll.

Die Komponenten der auf f_1, f_2, f_3 wirkenden Spannungen R_1, R_2, R_3 nach Richtung der x, y, z sind bezüglich: N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3. Daher ist, wenn man die Richtungswinkel von R_1, R_2, R_3 mit φ_1, ψ_1, ν_1; φ_2, ψ_2, ν_2 und φ_3, ψ_3, ν_3 bezeichnet:

$$10.\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{N_1}{R_1}, & \cos\psi_1 = \dfrac{T_3}{R_1}, & \cos\nu_1 = \dfrac{T_2}{R_1}, \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{T_3}{R_2}, & \cos\psi_2 = \dfrac{N_2}{R_2}, & \cos\nu_2 = \dfrac{T_1}{R_2}, \\ \cos\varphi_3 = \dfrac{T_2}{R_3}, & \cos\psi_3 = \dfrac{T_1}{R_3}, & \cos\nu_3 = \dfrac{N_3}{R_3}. \end{cases}$$

Wir wählen nun die Richtungen von R_1, R_2, R_3, welche durch die oben aufgestellten Gleichungen bestimmt sind, als Axen eines neuen schiefwinkligen Coordinatensystems und bezeichnen die Komponenten einer ein beliebiges Flächenelement f afficirenden Spannung R nach Richtung dieser Axen mit X', Y', Z'. Alsdann ist offenbar, da X, Y, Z die Komponenten von R nach Richtung der ursprünglichen Axen sind,

$$X = X' \cos\varphi_1 + Y' \cos\varphi_2 + Z' \cos\varphi_3$$

d. i. nach 10:

$$11.\quad X = \frac{X'}{R_1} N_1 + \frac{Y'}{R_2} T_3 + \frac{Z'}{R_3} T_2.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten der Gleichungen 4, so ergeben sich folgende Relationen:

$$12.\quad \cos\alpha = \frac{X'}{R_1},\quad \cos\beta = \frac{Y'}{R_2},\quad \cos\gamma = \frac{Z'}{R_3}.$$

Dieselben Relationen würden sich durch Aufstellung der entsprechenden Ausdrücke für Y und Z ergeben. Bekanntlich aber ist $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, mithin

$$13.\quad \left(\frac{X'}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{Y'}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{Z'}{R_3}\right)^2 = 1$$

und dies ist die Gleichung der anfangs erwähnten Fläche, wenn X', Y', Z, die Coordinaten eines Punktes desselben für das neue Koordinatensystem, dessen Axen die Richtungen von R_1, R_2, R_3 sind, bedeuten. Hiernach ist diese Fläche ein Ellipsoid, von welchem R_1, R_2, R_3 nach Richtung und Grösse conjugirte Halbmesser sind:

Stellt man also die Spannung, welche ein Flächenelement afficirt, für alle mögliche Lagen desselben nach Richtung und Grösse durch eine von demselben ausgehende Gerade dar, so liegen die Endpunkte dieser Geraden auf einem Ellipsoide. Wir nennen dieses Ellipsoid das Spannungsellipsoid.

Digitized by Google

Die Spannungen, welche drei auf einander senkrechte Flächen afficiren, sind conjugirte Halbmesser des Spannungsellipsoides.

Da nun durch Veränderung der Lage der drei auf einander senkrechten Flächen jedes mögliche System von conjugirten Halbmessern erzeugen kann, jeder Spannung aber im Allgemeinen nur eine von ihr afficirte Fläche entspricht, so stehen umgekehrt auch die Flächen, welche von drei durch conjugirte Halbmesser dargestellte Spannungen afficirt werden, auf einander senkrecht.

§. 12. Die Hauptspannungen. Diejenigen Spannungen, welche die drei Halbaxen des Spannungsellipsoides darstellen, nennen wir die Hauptspannungen. Wir bezeichnen sie mit A, B, C, eine beliebige derselben mit H.

Da die drei Halbaxen des Ellipsoides auch conjugirte Halbmesser sind, so stehen die von ihnen afficirten Flächen auf einander senkrecht. Es kommt nun aber noch darauf an, die Lage der Hauptspannungen gegen die von ihnen afficirten Flächen zu ermitteln. Wählen wir die Richtungen der Hauptspannungen als Axen eines neuen Coordinatensystems, so ist nach 10:

$$14.\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{N_1}{A}, & \cos\psi_1 = \dfrac{T_3}{A}, & \cos\nu_1 = \dfrac{T_2}{A}, \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{T_3}{B}, & \cos\psi_2 = \dfrac{N_2}{B}, & \cos\nu_2 = \dfrac{T_1}{B}, \\ \cos\varphi_3 = \dfrac{T_2}{C}, & \cos\psi_3 = \dfrac{T_1}{C}, & \cos\nu_3 = \dfrac{N_3}{C}. \end{cases}$$

Da die Hauptspannungen auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1,$$
$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\psi_1 + \cos^2\nu_1 = 1;$$

die Subtraction dieser beiden Gleichungen giebt:

$$\cos^2\varphi_2 - \cos^2\psi_1 + \cos^2\varphi_3 - \cos^2\nu_1 = 0.$$

Aus 14 folgt aber $T_3 = A\cos\psi_1$, $T_3 = B\cos\varphi_2$, daher $\cos\varphi_2 = \frac{A}{B}\cos\psi_1$. Ebenso ergiebt sich durch Gleichsetzung der beiden Werthe von T_2 $\cos\varphi_3 = \frac{A}{C}\cos\nu_1$. Dies in die vorige Gleichung gesetzt, giebt die erste der Gleichungen:

$$15.\quad \begin{cases} \left(\dfrac{A^2}{B^2} - 1\right)\cos^2\psi_1 + \left(\dfrac{A^2}{C^2} - 1\right)\cos^2\nu_1 = 0, \\ \left(\dfrac{B^2}{C^2} - 1\right)\cos^2\nu_2 + \left(\dfrac{B^2}{A^2} - 1\right)\cos^2\varphi_2 = 0, \\ \left(\dfrac{C^2}{A^2} - 1\right)\cos^2\varphi_3 + \left(\dfrac{C^2}{B^2} - 1\right)\cos^2\psi_3 = 0. \end{cases}$$

Die beiden anderen Gleichungen ergeben sich in gleicher Weise durch die Gleichungen $\cos^2\psi_1 + \cos^2\psi_2 + \cos^2\psi_3 = 1$, $\cos^2\varphi_2 + \cos^2\psi_2 + \cos^2\nu_2 = 1$ und $\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3 = 1$, $\cos^2\varphi_3 + \cos^2\psi_3 + \cos^2\nu_3 = 1$.

Digitized by Google

Welche Reihenfolge auch A, B, C in ihrer Grösse befolgen mögen, so haben doch immer die Glieder von zweien der Gleichungen 15 dieselben, die der dritten entgegengesetzte Vorzeichen. Die beiden ersten können daher nur erfüllt werden, wenn jedes einzelne Glied Null ist, d. h. wenn der betreffende Cosinus = o ist. Diess tritt ein, wenn zwei der Hauptspannungen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen. Da alle drei Hauptspannungen auf einander senkrecht stehen, so muss auch die dritte Hauptspannung mit einer Hauptaxe zusammenfallen. Die Coordinatenaxen aber sind die Senkrechten der von den Hauptspannungen afficirten Flächen. Also:

Die Richtungen der Hauptspannungen stehen auf den von ihnen afficirten Flächen senkrecht, die Hauptspannungen sind also zugleich Normalspannungen.

§. 13. Grösse und Richtung der Hauptspannungen. Wir nehmen wiederum das ursprüngliche Coordinatensystem an. Die Richtungswinkel einer Hauptspannung H seien α, β, γ. Die Componenten von H nach Richtung der Coordinatenaxen sind $H\cos\alpha$, $H\cos\beta$, $H\cos\gamma$. Da H auf der afficirten Fläche senkrecht steht, so sind α, β, γ zugleich die Stellungswinkel dieser Fläche.

Nach 4 (§. 5) wird daher:

$$16.\quad \begin{cases} (N_1 - H)\cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma = o, \\ T_3\cos\alpha + (N_2 - H)\cos\beta + T_1\cos\gamma = o, \\ T_4\cos\alpha + T_1\cos\beta + (N_3 - H)\cos\gamma = o. \end{cases}$$

Ausserdem ist

$$16\text{ a.}\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Durch diese vier Gleichungen ist sowohl H als auch α, β, γ bestimmt. Eliminirt man aus den drei ersten Gleichungen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ auf gewöhnliche Weise, so ergiebt sich zur Bestimmung von H folgende cubische Gleichung:

$$17.\quad (N_1 - H)(N_2 - H)(N_3 - H) - (N_1 - H)T_1^2 - (N_2 - H)T_2^2 - (N_3 - H)T_3^2 + 2T_1T_2T_3 = o$$

oder nach Potenzen von H geordnet:

$$17\text{ a.}\quad H^3 - (N_1 + N_2 + N_3)H^2 + (N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2)H - (N_1N_2N_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2 + 2T_1T_2T_3) = o.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind die drei Hauptspannungen.

Nach einer bekannten Eigenschaft der cubischen Gleichung ist

$$18.\quad A + B + C = N_1 + N_2 + N_3.$$

Die Summe der drei auf einander senkrechte Flächen afficirenden Normalspannungen ist also für alle Lagen der Flächen constant. Ebenso folgen aus der Lehre von den cubischen Gleichungen die weniger wichtigen Gleichungen:

$$19.\quad \begin{cases} BC + CA + AB = N_2N_3 + N_3N_1 + N_1N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2, \\ ABC = N_1N_2N_3 - N_1T_1^2 - N_2T_2^2 - N_3T_3^2. \end{cases}$$

Digitized by Google

Reducirt man jede der Gleichungen 16 auf $(N_1 - H)\cos\alpha$, $(N_2 - H)\cos\beta$, $(N_3 - H)\cos\gamma$ und bildet die Produkte je zweier dieser Grössen, so findet man, wenn man zur Abkürzung $K = T_2T_3\cos\alpha + T_3T_1\cos\beta + T_1T_2\cos\gamma$ setzt,

$$[(N_2 - H)(N_3 - H) - T_1^2]\cos\beta\cos\gamma = K\cos\alpha,$$
$$[(N_3 - H)(N_1 - H) - T_2^2]\cos\gamma\cos\alpha = K\cos\beta,$$
$$[(N_1 - H)(N_2 - H) - T_3^2]\cos\alpha\cos\beta = K\cos\gamma.$$

Eliminirt man aus je zwei Gleichungen K durch Division, reducirt auf $\cos^2\alpha$ und setzt die Ausdrücke in die Gleichung 16 a, so ergiebt sich die erste der Gleichungen:

$$20.\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{\frac{(N_2 - H)(N_3 - H) - T_1^2}{V}}, \\ \cos\beta &= \sqrt{\frac{(N_3 - H)(N_1 - H) - T_2^2}{V}}, \\ \cos\gamma &= \sqrt{\frac{(N_1 - H)(N_1 - H) - T_3^2}{V}}, \end{aligned}\right.$$

wenn man zur Abkürzung

$$V = (N_2 - H)(N_3 - H) + (N_3 - H)(N_1 - H) + (N_1 - H)(N_2 - H) - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$$

setzt. Die beiden letzten Gleichungen ergeben sich in gleicher Weise. Hierdurch sind nun auch die Richtungen der Hauptspannungen bestimmt.

§. 14. Wahl der Hauptspannungen als Coordinatenaxen.

Wir wollen in der Folge die Richtungen der Hauptspannungen als Coordinatenaxen wählen. Alsdann ist in den Ausdrücken des §. 10 für die Spannung, welche ein beliebiges Flächenelement afficirt, $N_1 = A$, $N_2 = B$, $N_3 = C$ und $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ zu setzen, letzteres, weil in den von den Hauptspannungen afficirten Flächen keine Schubspannungen wirken. Daher wird:

$$21.\quad X = A\cos\alpha,\quad Y = B\cos\beta,\quad Z = C\cos\gamma.$$

$$22.\quad R = \sqrt{A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma}.$$

$$23.\quad \cos\varphi = \frac{A}{R}\cos\alpha,\quad \cos\psi = \frac{B}{R}\cos\beta,\quad \cos\gamma = \frac{C}{R}\cos\gamma.$$

$$24.\quad N = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

§. 15. Die Stellungsflächen. Die Gleichung der von der Spannung R afficirten Fläche mit den Stellungswinkeln α, β, γ ist:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0.$$

Setzen wir für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die sich aus 21, (§. 14) ergebenden Werthe, so erhalten wir:

$$25.\quad \frac{Xx}{A} + \frac{Yy}{B} + \frac{Zz}{C} = 0,$$

Digitized by Google

Nach einer bekannten Regel der analytischen Geometrie des Raumes ist dies die Gleichung einer durch Coordinatenanfang gehenden Ebene, welche parallel der Tangentialebene der Fläche

$$26. \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = K^2$$

ist und zwar in einem Punkte, dessen Coordinaten den X, Y, Z proportional sind; K bedeutet dabei eine beliebige Zahl.

Wir nennen diese Fläche die Stellungsfläche, weil sich mit Hilfe derselben die Stellung der von einer gegebenen Spannung R afficirten Fläche angeben lässt. Hierzu legt man im Durchschnittspunkte F (Taf. I. Fig. 1) der gegebenen Spannung R mit der Stellungsfläche an dieselbe eine Tangentialebene und diese Ebene ist der von R afficirten Fläche parallel.

Umgekehrt kann man mit Hilfe dieser Fläche auch die Spannung finden, welche eine gegebene Ebene afficirt. Man legt zu dieser Ebene eine die Stellungsfläche tangirende Parallelebene und zieht durch den Berührungspunkt innerhalb des Spannungsellipsoides einen Radiusvector, so giebt derselbe nach Grösse und Richtung die gesuchte Spannung.

Haben alle drei Hauptspannungen dasselbe Vorzeichen, so ist die Stellungsfläche ein Ellipsoid, dessen Axen proportional den Quadratwurzeln von A, B, C sind (Taf. I. Fig. 1.). Haben aber die Hauptspannungen verschiedene Vorzeichen, so besteht die Stellungsfläche aus einem einfachen und einem doppelten Hyperboloide (Taf. I. Fig. 2.), welche beide den gemeinschaftlichen Asymptotenkegel

$$27. \quad \frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C} = \pm K^2$$

haben. Die Halbaxen OA′, OB′, des einfachen Hyperboloides sind den Quadratwurzeln aus den beiden Hauptspannungen mit gleichen Vorzeichen, die Halbaxe OC′ des doppelten Hyporboloides der Quadratwurzel aus der dritten Hauptspannung proportional. Die Spannungen, welche die Tangentialebenen dieses Asymptotenkegels afficiren, fallen ganz in die afficirte Fläche, sind also Schubspannungen. Man nennt daher diesen Kegel auch den Gleitungskegel.

§. 16. Die Schubspannungen. Nach 9 (§. 10) ist mit Berücksichtigung der Werthe 21 von X, Y, Z

$$28. \quad T^2 = A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma - (A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma)^2.$$

Eliminirt man hieraus $\cos^2\gamma$ mittels der Relation $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, so ergiebt sich

$$29. \quad T^2 = (A-C)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + (B-C)^2\sin^2\beta\cos^2\beta - 2(A-C)(B-C)\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

T wird zum Maximum, wenn $\frac{\partial T^2}{\partial\alpha} = 0$ und $\frac{\partial T^2}{\partial\beta} = 0$ wird.

Man erhält hiernach durch Bildung der Differenzial-Quotienten die Gleichungen:

$$[(A - C)\cos 2\alpha + 2(B - C)\cos^2\beta]\sin 2\alpha = 0$$
$$[(B - C)\cos 2\beta + 2(A - C)\cos^2\alpha]\sin 2\beta = 0$$

Digitized by Google

Ist $\sin 2\alpha = 0$, also $\alpha = 90^0$, so kann nicht auch $\sin 2\alpha = 0$ sein, da $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$ die Richtung der Axe der z bestimmt; für welche nach dem Obigen $T = 0$ ist. Ist daher $\sin 2\alpha = 0$, $\alpha = 90^0$, so muss

$$(B - C) \cos 2\beta + 2 (A - C) \cos \alpha = 0;$$

d. i. da $\cos \alpha = \cos 90^0 = 0$ ist, $(B - C) \cos 2\beta = 0$ oder, wenn wir Ungleichheit von A, B, C voraussetzen, $\cos 2\beta = 0$, also $\beta = \pm 45^0$. In gleicher Weise ergiebt sich, dass T überhaupt zum Maximum wird für

$$30. \quad \begin{cases} \alpha = 90^0, & \beta = \pm 45^0, & \gamma = \pm 45^0 \\ \alpha = \pm 45^0, & \beta = 90^0, & \gamma = \pm 45^0 \\ \alpha = \pm 45^0, & \beta = \pm 45^0, & \gamma = 90^0 \end{cases}$$

d. i. die Schubspannung T wird zum Maximum für sechs Ebenen, von denen jede durch eine Axe des Spannungsellipsoides geht und den von den beiden andern Axen gebildeten Winkel halbirt (Taf. I. Fig. 3).

Für die beiden Ebenen, welche durch die Axen A gehen, ergiebt sich nach 26 beidemale $T = \frac{1}{2}(B - C)$; die Schubspannungen, welche die beiden durch dieselbe Axe gehenden Ebenen afficirt, sind also einander gleich, so dass es in der That nur drei verschiedene Maxima der Schubspannung giebt. Wir nennen dieselben Hauptschubspannungen und bezeichnen sie, je nach dem die afficirte Fläche durch A, B oder C geht, mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, eine beliebige derselben mit $\mathfrak{H}$; nach 26 wird alsdann

$$31. \quad \mathfrak{A} = \pm \frac{B - C}{2}, \quad \mathfrak{B} = \pm \frac{C - A}{2}, \quad \mathfrak{C} = \pm \frac{A - B}{2}.$$

§. 17. Fall, wo eine der Hauptspannungen Null ist. Dieser Fall tritt ein, wenn in der cubischen Gleichung 18 a (§. 13) das constante Glied wegfällt, also

$$N_1 N_2 N_3 - N_1 T^2 - N_2 T^2 - N_3 T_3^2 + T_1 T_2 T_3 = 0$$

ist. Diese Bedingung wird z. B. erfüllt, wenn $N_3 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ oder wenn $N_2 = 0$, $N_3 = 0$, $T_1 = 0$ (bei der Bruchfestigkeit) ist. Die cubische Gleichung reducirt sich alsdann, wenn man die Wurzel $H = 0$ ausschliesst, auf die quadratische Gleichung:

$$32. \quad H^2 - (N_1 + N_2 + N_3) H + (N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) = 0$$

Das Spannungsellipsoid erscheint hier zu einer Ebene zusammengedrückt, so dass alle Spannungen in einer Ebene thätig sind.

Betrachtet man nur die Spannungen, welche die durch die Richtung der Hauptspannung $H = o$ gehenden Ebenen afficiren, so tritt an die Stelle des Spannungsellipsoides eine Spannungsellipse und an die Stelle der Stellungsfläche eine Stellungslinie. Die letzere ist bei gleichen Vorzeichen der Hauptspannungen eine Ellipse (Taf. I. Fig. 4); bei ungleichen Vorzeichen besteht sie aus zwei Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten (Taf. I. Fig. 5). Die Halbaxen der Ellipse und der Hyperbeln sind den Wurzeln aus den beiden Hauptspannungen proportional. Die Asymptoten schliessen, wenn $C = o$ ist, mit der Richtung von A einen Winkel ein, dessen Tangente $= \sqrt{-\frac{A}{B}}$ ist.

Mit Hilfe der Spannungsellipse und der Stellungslinie ist es leicht, die

Digitized by Google

Curven zu construiren, welche die Normalspannung N und die Schubspannung T repräsentiren, da N und T Componenten von R sind. (Siehe Taf. I. Fig. 4 und 5.)

§. 18. Fall, wo zwei Hauptspannungen Null sind. Dieser Fall tritt ein, wenn in der cubischen Gleichung 18 a (§. 13) das constante Glied und der Coefficient von H Null sind, also

$$N_1 N_2 N_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2 - 2 T_1 T_2 T_3 = 0,$$
$$N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2 = 0,$$

also z. B. wenn $N_2 = 0$, $N_3 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ ist (Zug- und Druckfestigkeit). Alsdann ist

$$33. \quad H = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$34. \quad R = H \cos \alpha,$$

$$35. \quad N = H \cos^2 \alpha,$$

$$36. \quad T = \tfrac{1}{2} H \sin 2\alpha,$$

$$37. \quad \Phi = \tfrac{1}{2} H,$$

wonach sich R, N, T leicht graphisch darstellen lassen (Taf. I. Fig. 6). Das Spannungsellipsoid erscheint als eine Gerade, so dass hier alle Spannungen in einer Geraden wirken. Ebenen, welche durch diese Geraden gehen, werden gar nicht afficirt.

II. Kapitel.

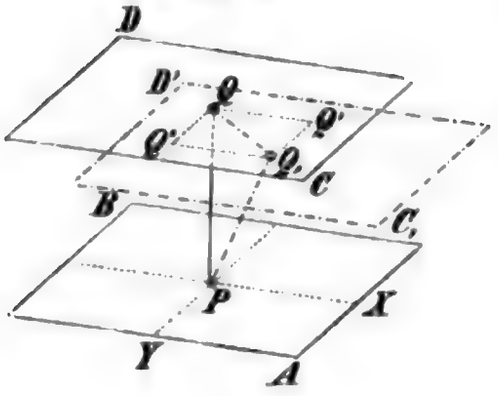
Die Formänderungen.

§. 19. Längenänderung. Denken wir uns im Innern des Körpers eine unendlich kleine Linie s, so ändert dieselbe bei der Formänderung des Körpers offenbar ihre Länge, und zwar tritt entweder eine Verlängerung oder eine Verkürzung ein, die wir bezüglich als positive oder negative Längenänderung in Rechnung ziehen wollen. Das Verhältniss $\frac{\Delta s}{s}$ der Längenänderung Δs zur ursprünglichen Länge s nennt man die relative Längenänderung. Wir wollen dieselbe mit σ bezeichnen und stets als sehr klein voraussetzen.

§. 20. Gleitung. Denken wir uns im Innern des Körpers eine unendlich kleine Fläche AB = f (Fig. 3), auf welcher die unendlich kleine Gerade PQ = s senkrecht steht, so wird nach der Formänderung im Allgemeinen s nicht mehr auf f senkrecht stehen. Eine zweite durch Q gehende und zu AB parallele Fläche CD wird sich daher gegen die Fläche AB verschieben. Man nennt daher diese Erscheinung das Gleiten. Verschiebt sich der Punkt Q, die Ebene AB als fest betrachtet, nach Q_1, so nennt man das Verhältniss der Verschiebung QQ_1 zur Länge der Geraden PQ die Gleitung der Geraden PQ. Ist dieselbe $= \tau$, so ist $\tau = \tan \angle Q_1 P Q$, oder, da wir τ als nur sehr klein voraussetzen, $\tau = \angle Q_1 P Q$, so dass wir

Digitized by Google

Fig. 3.



als Gleitung auch den Winkel betrachten können, welchen die Gerade PQ nach der Formänderung mit der Normalen zur Fläche AB einschliesst.

Ist PQ' die Projection von PQ_1 auf die durch PQ und durch die Gerade PX der Ebene AB gelegte Ebene, so nennen wir den Winkel Q'PQ die Gleitung der Geraden PQ nach der Richtung von PX.

Kennt man die Gleitungen $\angle$ Q'PQ $= \tau_1$, $\angle$ Q''PQ $= \tau_2$ der Geraden PQ nach Richtung der aufeinander senkrechten Geraden PX, PY, so lässt sich leicht die wirkliche Gleitung $Q_1PQ = \tau$ finden. Es ist $(QQ_1)^2 = (QQ')^2 + (QQ'')^2$, d. i. $(g\tau)^2 = (g\tau_1)^2 + (g\tau_2)$, also

$$38. \quad \tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}.$$

§. 21. Formänderung eines unendlich kleinen Parallelepipedes. Wir nehmen an, dass die Verrückungen sämmtlicher Punkte des Körpers nach Richtung der Coordinatenaxen bekannt seien, setzen dieselben aber als sehr klein voraus. Wir suchen nun die Formänderung eines unendlich kleinen Parallelepipedes im Innern des Körpers durch die Verrückungen der Punkte auszudrücken. Offenbar ist diese Formänderung bestimmt durch die Aenderungen der Kanten und Winkel des Parallelepipedes.

Das unendlich kleine Parallepiped $PP_1P_2P_3$ (Fig. 1), dessen Kanten $PP_1 = dx$, $PP_2 = dy$, $PP_3 = dz$ den Coordinatenaxen parallel sind, gehe bei der Formänderung in das Parallelepiped $P'P_1'P_2'P_3'$ über und es bezeichne

ξ, η, ζ die Verrückungen des Punktes P mit den Coordinaten x, y, z nach Richtung der Coordinatenaxen,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die relativen Längenänderungen der Kanten dx, dy, dz,

τ_1, τ_2, τ_3 die Aenderungen der Winkel P_2PP_3, P_3PP_1 und P_1PP_2.

Die Länge von $P'P_1'$ ist $dx\,(1 + \sigma_1)$. Die Projection von $P'P_1'$ auf die Axe der x ist $(x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx) - (x + \xi) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$. Da die Projection von der wirklichen Länge nur sehr wenig abweicht, so ist sehr nahe $dx\,(1 + \sigma_1) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, also $\sigma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Allgemein ist demnach

$$39. \quad \sigma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \sigma_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Der Winkel $P_1'P'P_2'$ ist $90^0 + \tau_3$; derselbe ist sehr nahe gleich seiner Projection auf die Ebene der xy, weil wir voraussetzen, dass sich die Richtungen der Kanten dx, dy, dz nur sehr wenig ändern. Der Win-

Digitized by Google

kel, welchen die Projection von $P'P_1'$ mit der Axe der x einschliesst, ist sehr nahe $= \frac{\partial \eta}{\partial x}$, und der Winkel, welchen $P'P_2'$ mit der Axe der y einschliesst, sehr nahe $= \frac{\partial \xi}{\partial y}$. Demnach ist $90 + \tau_3 = 90^0 - \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}$, was der dritten der folgenden Gleichungen entspricht. Die beiden ersteren ergeben sich in ganz gleicher Weise:

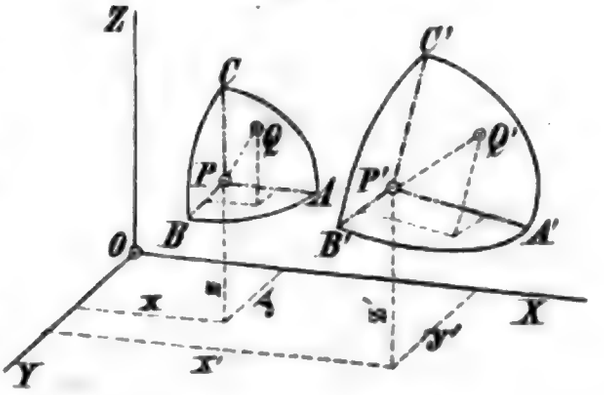
$$40. \quad \begin{cases} -\tau_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ -\tau_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ -\tau_3 = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{cases}$$

Die genauere Ermittelung von σ_1, σ_2, σ_3, τ_1, τ_1, τ_3, welche leicht auszuführen ist, zeigt, dass diese Näherungswerthe von den wahren Werthen nur durch zu vernachlässigende höhere Potenzen der Differenzialquotienten von ξ, η, ζ abweichen.

§. 22. Formänderung einer unendlich kleinen Kugel.

Wir denken uns im Innern des Körpers eine unendlich kleine Kugel ABC (Fig. 4), deren Radius vor der Formänderung ds ist. Es frägt sich, welche Gestalt A'B'C' dieselbe bei der Formänderung annimmt. Die relativen Längenänderungen der Radien PA, PB, PC in Richtung der Coordinatenaxen seien σ_1 σ_2 σ_3, die Aenderungen der Winkel zwischen diesen Radien τ_1, τ_2, τ_3. Die Coordinaten eines Punktes Q der Oberfläche sind (PA, PB, PC als Coordinatenaxen angenommen) dx, dy, dx. Nach der Formänderung sind diese Coordinaten die Coordinaten dx', dy', dz' von Q' geworden, wenn man P'A', P'B', PC' als Axen eines schiefwinkligen Systemes annimmt. Demnach ist

Fig. 4.



$$dx' = dx\,(1 + \sigma_1),\ dy' = dy\,(1 + \sigma_2),\ dz' = dz\,(1 + \sigma_3).$$

Sind α, β, γ die Richtungswinkel von PQ vor der Formänderung, so ist $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$, $\cos\gamma = \frac{dz}{ds}$, oder wenn man für dx, dy, dz die Ausdrücke aus den eben aufgestellten Gleichungen einsetzt,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds\,(1+\sigma_1)},\ \cos\beta = \frac{dy'}{ds\,(1+\sigma_2)},\ \cos\gamma = \frac{dz'}{ds\,(1+\sigma_3)}.$$

Dies in die bekannte Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ gesetzt, giebt

$$41.\quad \left[\frac{dx'}{ds\,(1+\sigma_1)}\right]^2+\left[\frac{dy'}{ds\,(1+\sigma_2)}\right]^2+\left[\frac{dz}{ds\,(1+\sigma_3)}\right]^2=1.$$

Dies ist die Gleichung der deformirten Oberfläche der Kugel in Beziehung auf das schiefwinklige Coordinatensystem P'A', P'B', P'C'. Hieraus folgt:

Eine unendlich kleine Kugel geht bei der Formänderung in ein Ellipsoid über. Drei vor der Formänderung auf einander senkrechte Gerade bilden nach derselben conjugirte Halbmesser dieses Ellipsoides.

Wir nennen dieses Ellipsoid das Deformationsellipsoid. Die Längenänderungen der Axen desselben sind die Maxima der Längenänderung; wir nennen sie Hauptlängenänderungen.

Diese drei auf einander senkrechten Axen sind conjugirte Halbmesser; sie standen also auch vor der Formänderung auf einander senkrecht, oder: Es giebt drei aufeinander senkrechte Gerade, welche auch nach der Formänderung auf einander senkrecht stehen oder nicht gleiten.

Die Bestimmung der Lage und Grösse der Hauptänderungen ist in ähnlicher Weise möglich, wie die der Hauptspannungen. Es ergeben sich dieselben Ausdrücke, wie in §. 13, wenn man für N, T bezüglich σ, τ setzt.

§. 23. Längenänderung in einer beliebigen Richtung.

Wir setzen voraus, dass man die Verrückungen ξ, η, ζ aller Punkte kenne. Es kommt darauf an, die relative Längenänderung σ einer unendlich kleinen Geraden $PP' = ds$ von beliebiger Richtung zu bestimmen. Die Coordinaten des Punktes P sind vor der Formänderung $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, nach derselben aber

$$x' = x + dx + \xi + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz,$$

$$y' = y + dy + \eta + \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz.$$

$$z' = z + dz + \zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \frac{\partial\zeta}{\partial z}dz.$$

Die Länge der Geraden PP_1 nach der Formänderung ist:

$$ds\,(1+\sigma) = \sqrt{(x_1' - x')^2 + (y_1' - y')^2 + (z_1' - z')^2}$$

$$= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \frac{\partial\eta}{\partial y}dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \frac{\partial\zeta}{\partial z}dz\right)^2}.$$

Wir entwickeln die Quadrate, bringen $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ vor das Wurzelzeichen und lösen sodann die Wurzel in eine unendliche Reihe auf, wobei wir die Glieder von der zweiten Potenz der Differenzialquotienten von ξ, η, ζ an vernachlässigen. Wir bezeichnen dabei ferner die Richtungswinkel von ds mit α, β, γ, so dass $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$ ist. Hierdurch ergiebt sich

Digitized by Google

$$42.\quad \sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta.$$

oder mit Berücksichtigung des vorigen Paragraphen

$$42\text{ a.}\quad \sigma = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma - \tau_1\cos\beta\cos\gamma - \tau_2\cos\gamma\cos\alpha - \tau_3\cos\alpha\cos\beta.$$

Nehmen wir als Coordinatenaxen die Axen des Deformationsellipsoides an, so ist $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$, mithin einfacher

$$43.\quad \sigma = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma.$$

Der Ausdruck 44 für σ stimmt mit dem Ausdrucke 24 für N überein, wenn man N_1, N_2, N_3 für σ_1, σ_2, σ_3 setzt. Es lässt sich zeigen, dass auch der Ausdruck für die Gleitung τ einer beliebigen Geraden mit dem Ausdrucke 28 oder 29 für die Schubspannung T übereinstimmt, woraus nach §. 16 folgt, dass die Gleitung für sechs Ebenen, welche durch je eine Achse des Deformationsellipsoides gehen und die Winkel zwischen den beiden andern Axen halbiren, zum Maximum wird. Diese Hauptgleitungen sind analog den Hauptschubspannungen nach 31 $= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$, $\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$, $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Der geringeren Wichtigkeit wegen übergehen wir den Beweis.

§. 24. Volumenänderung. Bezeichnen wir die relative Aenderung des Volumens dx dy dz des Körperelementes mit Θ, so ist

$$\Theta = \frac{dx(1+\sigma_1)\,dy(1+\sigma_2)\,dz(1+\sigma_3) - dx\,dy\,dz}{dx, dy\,dz} = (1+\sigma_1)(1+\sigma_2)(1+\sigma_3) - 1.$$

Entwickelt man das Product und vernachlässigt die Glieder, welche vom zweiten und dritten Grade sind, so ergiebt sich

$$44.\quad \Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3.$$

Die relative Volumenänderung ist also gleich der Summe der relativen Längenänderungen in drei auf einander senkrechten Richtungen.

III. Kapitel.

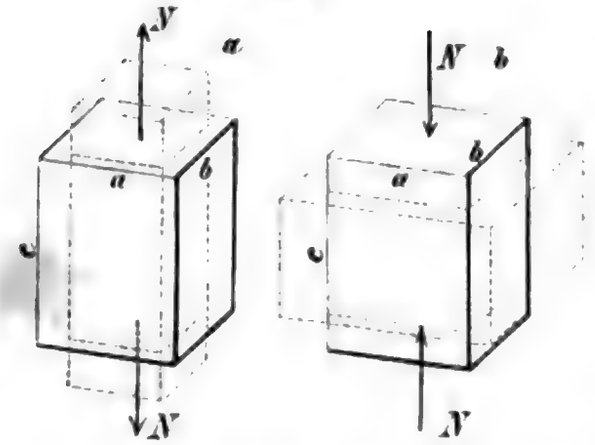
Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung.

§. 25. Grundprincip. Um zu einer genauen Kenntniss der Beziehungen zwischen den Spannungen und den durch sie hervorgebrachten Formänderungen zu gelangen, würde eine genaue Kenntniss über das Wesen der Materie nöthig sein. Da wir diese aber zur Zeit noch nicht besitzen, gehen wir direkt von den durch Versuche gewonnenen Erfahrungen aus.

Auf ein homogenes rechtwinkliges Prisma mit den Kanten a, b, c (Fig. 5 a und 5 b) wirke parallel zu den Kanten c auf jede von den beiden

Digitized by Google

Fig. 5.



gegenüberstehenden Flächen eine auf die ganze Fläche gleichmässig vertheilte Kraft. Hierdurch geht das Parallelepiped in ein anderes Parallelepiped über und zwar nach dem Gesetze:

Wenn die Kraft ziehend wirkt, so wird c verlängert, a und b dagegen werden verkürzt (Fig. 5 a). Wenn die Kraft drückend wirkt, so wird c verkürzt, a und b dagegen werden verlängert (Fig. 5 b).

Die Längenänderung der Kante c, also in Richtung der Kraft, nennen wir die longitudinale Längenänderung oder Längenänderung schlechthin; die Längenänderung jeder der andern Kanten dagegen die transversale Längenänderung. Die Erfahrung hat gelehrt:

Sowohl die relative longitudinale, als transversale Längenänderung ist sehr nahe proportional der auf die Flächeneinheit wirkenden Kraft N, sobald diese gewisse Grenzen nicht überschreitet.

Bezeichnen wir mit E, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ Erfahrungscoefficienten und mit Δa, Δb, Δc die Längenänderungen der Kanten a, b, c, so können wir daher setzen

$$45. \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{N}{E}, \quad \frac{\Delta a}{a} = -\frac{N}{\mathfrak{E}_1}, \quad \frac{\Delta b}{b} = -\frac{N}{\mathfrak{E}_2}.$$

Man nennt E den Elasticitätscoefficienten oder den Elasticitätsmodul, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ nennen wir die Coefficienten für Transversalelasticität.

Eine allgemeine Giltigkeit kann das aufgestellte Elasticitätsgesetz nicht haben; so wird z. B. für $N = -E$ $\frac{\Delta c}{c} = -1$, $\Delta c = -c$, d. h. das Prisma wird zu Nichts zusammengedrückt, was unmöglich ist. Für sehr kleine Formänderungen, welche in der Praxis noch zulässig sind, kann es aber als vollkommen richtig gelten.

Für manche Stoffe, z. B. Schmiedeisen, Holz, hat sich gezeigt, dass die Elasticitätscoefficienten für Zug und Druck fast gleich sind, während sie bei andern Stoffen, z. B. Gusseisen etwas verschieden sind. Wir werden jedoch allgemein voraussetzen, dass die Elasticitätscoefficienten für Zug und Druck gleich gross sind, da wir ohne diese Annahme auf zu grosse Schwierigkeiten stossen würden.

§. 26. Textur der Körper. Die Elasticität kann entweder nach allen Richtungen gleich gross oder verschieden sein, d. h., wenn man das Parallelepiped des vorigen Paragraphen in verschiedenen Richtungen aus dem Körper schneidet, so können die Coefficienten E, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ entweder denselben oder verschiedenen Werth haben. Im ersten Falle nennen wir den Körper einen Körper von constanter Elasticität oder einen isotropen Körper, im letzteren dagegen einen anisotropen Körper.

Stellt man E, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ für die verschiedenen Richtungen durch Gerade dar, welche von einem Punkte ausgehen, so liegen alle Endpunkte auf

Digitized by Google

einer Fläche, welche man Elasticitätsfläche nennen kann. Bei Körpern von constanter Elasticität ist diese Fläche eine Kugel (gegossene Körper etc.) Bei Körpern von regelmässiger Textur lassen sich an der Elasticitätsfläche gewisse Axen erkennen, welche man Elasticitätsaxen nennt. Ist die Elasticitätsfläche eine Rotationsfläche, so heisst der Körper einaxig (Schmiedeisen, überhaupt Metalle von sehniger Textur, annähernd Holz). Körper mit drei auf einander senkrechten Axen heissen dreiaxig (Holz in schwächeren Stücken, gewalztes Blech etc.).

Wir wollen uns in diesem Kapitel hauptsächlich mit Körpern von constanter Elasticität beschäftigen. In diesem Falle ist $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_3$; wir setzen $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 = \frac{1}{m} E$, so dass

$$46. \quad \frac{\Delta c}{c} = \frac{N}{E}, \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{1}{m}\frac{\Delta c}{c}.$$

Auch lässt sich in diesem Falle behaupten, dass das rechtwinklige Parallelepiped bei der Formänderung rechtwinklig bleibt, was bei den ein- und dreiaxigen Körpern nur der Fall ist, wenn die Richtung der Kraft mit einer Elasticitätsaxe zusammenfällt.

E lässt sich nur durch Versuche, m jedoch auch theoretisch unter Annahme eines Gesetzes über die Wirkung zwischen den Molecülen entwickeln, was im folgenden Kapitel geschehen soll.

Die Moleculartheorie liefert für isotrope Körper für m den Werth:

$$47. \quad m = 4,$$

so dass die transversale Längenändernng $\frac{1}{4}$ der longitudinalen Längenänderung ist. Angestellte Versuche von Werthheim u. A. stimmen aber mit diesem Resultate nicht ganz überein. Sie geben m nicht ganz constant, jedoch nahezu $= 3$. Jedenfalls können wir für alle isotrope Körper

$$48. \quad m = 3 \text{ bis } 4$$

annehmen.

§. 27. Formveränderung des rechtwinkligen Parallelepipedes durch Normalspannungen. Auf ein rechtwinkliges Parallelepiped aus einem isotropen Körper mit den Kanten a, b, c mögen die Normalspannungen N_1, N_2, N_3 wirken. Die relativen Längenänderungen der Kanten seien σ_1, σ_2, σ_3. Die relative Längenänderung der Kante a ist in Folge der Kraft $N_1 = \frac{N_1}{E}$, in Folge der Kräfte N_2, $N_3 = -\frac{N_2}{mE}$ und $-\frac{N_3}{mE}$, also im Ganzen $\frac{1}{E}\left(N_1 - \frac{N_2 + N_3}{m}\right)$. Allgemein ist demnach:

$$49. \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{1}{E}\left(N_1 - \frac{N_2 + N_3}{m}\right), \\ \sigma_2 = \frac{1}{E}\left(N_2 - \frac{N_3 + N_1}{m}\right), \\ \sigma_3 = \frac{1}{E}\left(N_3 - \frac{N_1 + N_2}{m}\right). \end{cases}$$

Digitized by Google

Durch Reduction auf N_1, N_2, N_3 ergiebt sich:

$$50. \quad \begin{cases} N_1 = \varepsilon\,[\sigma_2 + \sigma_3 + (m-1)\,\sigma_1], \\ N_2 = \varepsilon\,[\sigma_3 + \sigma_1 + (m-1)\,\sigma_2], \\ N_3 = \varepsilon\,[\sigma_1 + \sigma_2 + (m-1)\,\sigma_3], \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung

$$51. \quad \varepsilon = \frac{E\,m}{(m+1)\,(m+2)}$$

setzt. Für $m = 3$ und $m = 4$ wird $\varepsilon = \frac{3}{4} E = 0{,}75\ E$ und $\varepsilon = \frac{2}{5} E = 0{,}40\ E$.

Die relative Volumenänderung Θ ist nach 44 (§. 24):

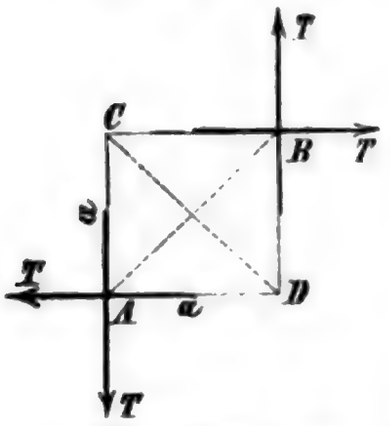
$$52. \quad \Theta = \frac{m-2}{E}\left(N_1 + N_2 + N_3\right).$$

Früher nahm man an, dass in transversaler Richtung keine Längenänderung eintrete. Dies würde für $m = \infty$ eintreten. Dann würde allerdings einfacher

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{E},\ \sigma_2 = \frac{N_2}{E},\ \sigma_3 = \frac{N_3}{E},$$
$$N_1 = E\,\sigma_1,\ N_2 = E\,\sigma_2,\ N_3 = E\,\sigma_3,$$
$$\Theta = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{E}.$$

§. 28. Formänderung eines rechtwinkligen Parallelepipedes durch Schubspannungen. Wir denken uns in einem isotropen Körper ein rechtwinkliges Parallelepiped ACBD (Fig. 6), von welchem zwei Kanten AD = CB und AC = DB einander gleich und zwar = a sind. Auf die Flächen, welche die dritte Kante enthalten, wirke parallel zu den Kanten a die Schubspannungen T, ausser diesen aber keine weitere Spannung. In den Gleichungen 16 (§. 13) zur Bestimmuug der Hauptspannungen ist $N_1 = N_2 = N_3 = 0$. $T_2 = T_3 = 0$, $T_1 = T$ zu setzen. Daher wird

Fig. 6.



$$\begin{cases} H\cos\alpha = 0, \\ H\cos\beta = T\cos\gamma, \\ H\cos\gamma = T\cos\beta. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben $H^2 = T^2$, also

$$H = \pm T.$$

und die erste $H = 0$ oder $\cos\alpha = 0$. Die zweite Gleichung giebt $\cos\beta = \pm\cos\gamma$; mithin ist, da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist, $\cos^2\gamma = \frac{1}{2}$ oder $\gamma = \pm 45^0$, d. h. die Hauptspannungen haben die Richtung der Diagonalen AB und CD; in Richtung von AB wirkt + T, in Richtung von CD aber — T.

Dasselbe ergiebt sich auch leicht direkt. Denkt man sich durch die

Digitized by Google

diagonale Ebene CD den Theil CDB weggeschnitten, so muss auf CD eine Kraft wirken, welche den in AC und AD wirkenden Schubspannungen das Gleichgewicht hält. Diese Kraft muss zu CD senkrecht wirken, ist daher eine Hauptspannung. Ist sie = A, so ist $A \cdot \overline{CD} = 2T \cdot \overline{AC} \cdot \cos 45^0$ d. i. $2Aa \cos 45^0 = 2Ta \cos 45^0$ oder $A = + T$. In gleicher Weise ergiebt sich für die in Richtung von CD wirkende Hauptspannung $B = - T$.

Da in Richtung von AB ein Zug, in Richtung von CD ein Druck wirkt, so wird AB verlängert, CD verkürzt; beide Diagonalen bleiben aber auf einander senkrecht, so dass das Quadrat in einen Rhombus übergeht (Fig. 7). Wir bezeichnen die Aenderungen der Winkel des Quadrats oder die Gleitungen mit τ, die Diagonalen AB und CD mit ∂ und ihre Längenänderungen mit Δ_1, Δ_2. Alsdann ist $\tan \frac{1}{2} \angle BDA = \frac{AB}{CD}$ d. i. $\tan \left(45^0 + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{\partial + \Delta_1}{\partial + \Delta_2}$.

Fig. 7.

Nun aber ist $\tan \left(45^0 + \frac{\tau}{2} \right) = \sec \tau + \tan \tau = 1 + \tau$, weil τ sehr klein ist. Ferner ist sehr nahe $\frac{\partial + \Delta_1}{\partial + \Delta_2} = \left(1 + \frac{\Delta_1}{\partial} \right) \left(1 - \frac{\Delta_2}{\partial} \right) = 1 + \frac{\Delta_1}{\partial} - \frac{\Delta_2}{\partial}$, mithin $\tau = \frac{\Delta_1}{\partial} - \frac{\Delta_2}{\partial}$.

Nach 49 (§. 27) aber ist

$$\frac{\Delta_1}{\partial} = \frac{1}{E} \left(A - \frac{B}{m} \right) = + \frac{m+1}{m} \frac{T}{E},$$

$$\frac{\Delta_2}{\partial} = \frac{1}{E} \left(B - \frac{A}{m} \right) = - \frac{m+1}{m} \frac{F}{E},$$

mithin ist

$$53. \quad \tau = 2 \frac{m+1}{m} \frac{T}{E}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$54. \quad G = \frac{m}{2(m+1)} E.$$

so wird

$$55. \quad \tau = \frac{T}{G}.$$

Hiernach ist die Gleitung der entsprechenden Schubspannung proportional.

Man nennt G den Gleitungscoefficienten (oder Torsionscoefficienten). Für $m = 3$ und $m = 4$ wird $G = \frac{3}{8} E = 0,375\ E$ und $G = \frac{2}{5} E = 0,400\ E$. (Für $m = \infty$ würde $G = \frac{1}{2} E = 0,500\ E$.)

Digitized by Google

Wirken auf sämmtliche Flächen des Parallelepipedes Schubspannungen T_1, T_2, T_3, welche die Aenderungen τ_1, τ_2, τ_3 in den Winkeln zwischen den Kanten oder Flächen (vergleiche §. 21) hervorbringen, so ist

$$56. \quad \tau_1 = \frac{T_1}{G}, \quad \tau_2 = \frac{T_2}{G}, \quad \tau_3 = \frac{T_3}{G},$$

so dass die Gleitung einer Geraden s nach einer bestimmten Richtung proportional ist der Schubspannung, welche in der zu s senkrechten Ebene nach dieser Richtung wirkt.

§. 29. Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung für isotrope Körper. Die Gleichungen 50 gelten auch dann noch, wenn Schubspannungen vorhanden sind, weil diese keine Längenänderungen der Kanten des Parallelepipedes erzeugen. Ebenso gelten die Gleichungen 56, wenn Normalspannungen vorhanden sind, weil diese keine Gleitungen erzeugen. Substituirt man in die Formeln 50 und 56 für die Längenänderungen σ_1, σ_2, σ_3, die Ausdrücke 39 und für die Gleitungen τ_1, τ_2, τ_3, die Ausdrücke 40, so ergeben sich als Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verrückungen der Punkte für isotrope Körper:

$$57. \quad \begin{cases} N_1 = \varepsilon\Theta + 2G\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \varepsilon\left[(m-1)\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right], \\ N_2 = \varepsilon\Theta + 2G\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \varepsilon\left[(m-1)\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right], \\ N_3 = \varepsilon\Theta + 2G\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} = \varepsilon\left[(m-1)\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\right]; \end{cases}$$

$$58. \quad \begin{cases} T_1 = G\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial z} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right), \\ T_2 = G\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z}\right), \\ T_3 = G\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right), \end{cases}$$

wobei

$$\Theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Nach §. 24 ist Θ die relative Volumenänderung.

§. 30. Lage des Spannungs- und Deformationsellipsoides. Auf ein Parallelepiped, dessen Kanten die Richtungen der Hauptspannungen haben, wirken keine Schubspannungen; dasselbe bleibt also bei einem isotropen Körper rechtwinklig. Mit Rücksicht auf §. 11 folgt hieraus, dass die Richtungen der Hauptspannungen mit den Richtungen der Hauptlängenänderungen oder dass die Axen des Spannungsellipsoides mit denen des Deformationsellipsoides zusammenfallen.

Nach §. 28 und 16 müssen nun auch die Ebenen, für welche die

Digitized by Google

grössten Gleitungen stattfinden, mit den Ebenen, in welchen die grössten Schubspannungen wirken, zusammenfallen.

§. 31. Differenzialgleichungen für die Formänderung. Substituirt man diese Ausdrücke 57 u. 58 für N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 in die Gleichgewichtsbedingungen 3 (§. 9) der Spannungen, so ergeben sich für die Formänderung folgende partielle Differenzialgleichungen:

$$59.\quad \begin{cases} (\varepsilon + G)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) + X_0 = 0, \\ (\varepsilon + G)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + G\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right) + Y_0 = 0, \\ (\varepsilon + G)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + G\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right) + Z_0 = 0. \end{cases}$$

Eine allgemeine Integration dieser Gleichungen und somit eine allgemeine Auflösung der Aufgabe der Elasticitätslehre ist nicht möglich. Ja selbst in den meisten speziellen Fällen glückt die Integration nicht oder macht wenigstens viel Schwierigkeiten.

§. 32. Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung für anisotrope Körper. Die Ausdrücke 57, 58 beruhen auf der Voraussetzung, dass das Parallelepiped rechtwinklig bleibt, wenn nur Normalkräfte wirken und dass sich die Längen seiner Kanten nicht ändern, wenn nur Schubspannungen wirken, so dass die Längenänderungen der Kanten nur von den Normalspannungen, die Gleitungen dagegen nur von den Schubspannungen abhängen. Für isotrope Körper ist dies unbedingt richtig; im Allgemeinen aber offenbar nicht für anisotrope Körper. Hier wird demnach der Ausdruck für jede Spannung sämmtliche relative Längenänderungen und sämmtliche Gleitungen enthalten. Wir können demnach bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung setzen

$$60.\quad \begin{cases} N_1 = A_1'\sigma_1 + A_2'\sigma_2 + A_3'\sigma_3 + C_1'\tau_1 + C_2'\tau_2 + C_3'\tau_3, \\ N_2 = A_1''\sigma_1 + A_2''\sigma_2 + A_3''\sigma_3 + C_1''\tau_1 + C_2''\tau_2 + C_3''\tau_3, \\ N_3 = A_1'''\sigma_1 + A_2'''\sigma_2 + A_3'''\sigma_3 + C_1'''\tau_1 + C_2'''\tau_2 + C_3'''\tau_3, \\ T_1 = B_1'\sigma_1 + B_2'\sigma_2 + B_3'\sigma_3 + D_1'\tau_1 + D_2'\tau_2 + D_3'\tau_3, \\ T_2 = B_1''\sigma_1 + B_2''\sigma_2 + B_3''\sigma_3 + D_1''\tau_1 + D_2''\tau_2 + D_3''\tau_3, \\ T_3 = B_1'''\sigma_1 + B_2'''\sigma_2 + B_3'''\sigma_3 + D_1'''\tau_1 + D_2'''\tau_2 + D_3'''\tau_3. \end{cases}$$

Demnach würden hier sechsunddreissig Coefficienten auftreten, welche sich indessen, wie wir sehen werden, auf fünfzehn reduziren lassen.

Bei dreiaxigen Körpern werden die Gleichungen bedeutend einfacher, da sich hier behaupten lässt, dass, wenn die Elasticitätsaxen den Kanten des Parallelepipedes parallel sind, die Längenänderungen nur von den Normalspannungen, die Gleitungen nur von den Schubspannungen abhängen. Hier können wir, wenn die Elasticitätsaxen den Coordinatenaxen parallel sind, setzen:

$$61.\quad \begin{cases} N_1 = A_1'\sigma_1 + A_2'\sigma_2 + A_3'\sigma_3, & T_1 = G_1\tau_1, \\ N_2 = A_1''\sigma_1 + A_2''\sigma_2 + A_3''\sigma_3, & T_2 = G_2\tau_2, \\ N_3 + A_1'''\sigma_1 + A_2'''\sigma_2 + A_3'''\sigma_3, & T_3 = G_3\tau_3, \end{cases}$$

Digitized by Google

so dass hier zwölf Coefficienten auftreten, welche sich indessen auf sechs reduziren lassen.

§. 33. Elasticitätscoefficienten. In folgender Tabelle sind die Mittelwerthe der Elasticitätscoefficienten in Kilogrammen pro Quadratcentimeter zusammengestellt.

Material	E	Material	E
Kalkstein	108000	Messing	1020000
Holz (Fasserrichtung)	120000	Schiefer	1100000
Marmor	175000	Argentan	1110000
Blei	200000	Kupfer	1160000
Zinn	423000	Platin	1580000
Gold	734000	Schmiedeeisen . . .	2040000
Silber	753000	Gewöhnlicher Stahl .	2200000
Zink	900000	Gussstahl	2500000
Gusseisen	1010000		

Beim Holze ist für eine zur Fasserrichtung senkrechte Richtung ungefähr:

	radial	tangential
Nadelholz	E = 9610.	E = 3140.
Eichenholz	E = 18900.	E = 13000.

Hierbei bezieht sich die Bezeichnung radial und tangential auf die Jahrringe.

Für die Gleitung einer in der Fasserrichtung liegenden Geraden ist ungefähr

$$G = \frac{1}{18} E.$$

Für die Steine ist der Elasticitätscoefficient noch äusserst unsicher bestimmt.

IV. Kapitel.
Moleculartheorie.

§. 34. Princip. Die Moleculartheorie setzt voraus, dass die Körper aus äusserst kleinen Körperchen, sogenannten Molecülen, bestehen, deren Entfernung von einander zwar ebenfalls äusserst klein, aber doch gross gegen die Dimensionen der Molecüle sind. Diese Molecüle üben auf einander zwei entgegengesetzte Wirkungen aus, eine Anziehung oder Attraction und eine Abstossung oder Repulsion. Die Differenz dieser beiden Wirkungen ist die wirkliche Wirkung, welche wir mit p bezeichnen. Im natürlichen Zustande ist p = 0; wenn sich aber die Molecüle von einander entfernen, so wird die Anziehung überwiegend, wenn sich die Molecüle nähern, so wird die Abstossung überwiegend, also im ersten Falle p negativ, im letzten p positiv. Die Kraft p ist proportional dem Produkt mm′ aus den Massen m, m′ der

Digitized by Google

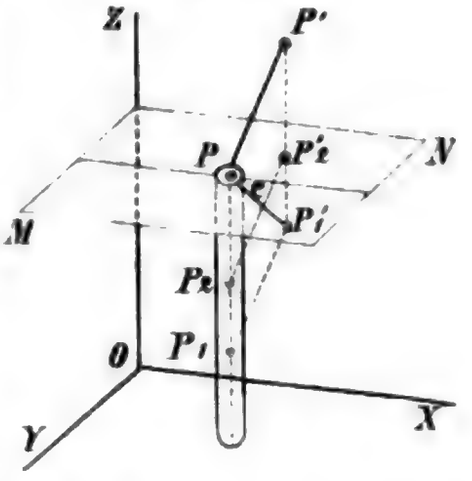
beiden Molecüle, proportional der Veränderung $\Delta\varrho$ ihrer Entfernung ϱ und proportional einer Funktion $f(\varrho)$ der Entfernung ϱ, so dass also

$$62. \quad p = mm' f(\varrho) \Delta\varrho$$

gesetzt werden kann. Diese Kraft äussert sich nur, wenn die Entfernung ϱ äusserst klein ist, so dass $f(\varrho)$ rapid abnehmen muss, wenn ϱ wächst. Die Form der Funktion $f(\varrho)$ ist noch unbekannt. Jedenfalls hat $f(\varrho)$ bei gleichem ϱ in verschiedenen Körpern, bei anisotropen Körpern auch nach verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Werth.

§. 35. Allgemeine Beziehungen zwischen den Spannungen und der Formänderung. Durch einen beliebigen Punkt P des Körpers (Fig. 8) legen wir parallel zur Ebene der xy eine Ebene MN und bestimmen die Componenten T_2, T_1, N_3 der diese Ebene in P afficirenden Spannung. Offenbar ist die auf MN ausgeübte innere Kraft die Resultante aller Kräfte, welche die auf der einen Seite von MN befindlichen Molecüle auf die auf der andern Seite befindlichen ausüben. Auf eine kleine Fläche f in P kommt dann offenbar die Resultante der Kräfte, welche die in einer, etwa auf der untern Seite von MN senkrecht zu MN liegenden Cylinder von der Grundfläche f auf die über MN liegenden Molecüle ausübt.

Fig. 8.



P_2 sei ein im Cylinder liegendes Molecül mit der Masse m', P_2' ein über MN liegendes Molecül mit der Masse m, welches von P_2 die Entfernung s hat. Ist Δs die Längenänderung von s in Folge der Formänderung des Körpers, so ist die Wirkung zwischen beiden Molecülen nach 62

$$mm' f(s) \Delta s,$$

wobei aber f(s) nicht allein von s, sondern auch von der Richtung von P_2P_2' abhängt.

P_1' sei der Fusspunkt einer von P_2' auf MN gefällten Senkrechten und ferner sei $PP' \# P_2P_2'$, $P_1P_1' \# P_2P_2'$. In der Richtung von PP' können offenbar nur die Wirkungen von den zwischen P und P_1 liegenden Molecülen auf die zwischen P' und P_1' liegenden Molecüle eine Kraft auf die Ebene MN ausüben. Sind in der Länge PP_1 des Cylinders n Molecüle enthalten, so ist daher die Summe aller Wirkungen in der Richtung von PP' zwischen den um s entfernten Molecülen $= nmm' f(s) \Delta s$. Bezeichnen wir die Masse der Volumeneinheit mit μ, die Richtungswinkel von PP' mit α, β, γ, so ist nm' als ganze in der Länge PP_1 des Cylinders enthaltene Masse $= \mu f s \cos\gamma$, also die Summe der Wirkungen in der Richtung von PP'

$$\mu f m s f(s) \Delta s \cos\gamma,$$

mithin pro Flächeneinheit

$$\mu m s f(s) \Delta s \cos\gamma.$$

Die Wirkung in der Richtung von PP' ist demnach dieselbe, als wenn sich in P eine Masse $\mu s \cos\gamma$ befände, welche auf das in P' befindliche Molecül mit der Masse m wirkt. Die Componenten dieser Kraft nach

Richtung der x, y, z erhält man durch Multiplication dieses Ausdruckes mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Um die Gesammtwirkung zu erhalten, muss man diese Wirkung für sämmtliche über MN liegende Molecüle bestimmen und alle Componenten nach Richtung der x, y, z summiren. Man erhält hierdurch für T_2, T_1, N_3 den dritten, fünften und vierten der folgenden Ausdrücke:

$$63.\quad \begin{cases} N_1 = \mu\Sigma\, ms\, f(s)\, \Delta s\, \cos^2\alpha, \\ N_2 = \mu\Sigma\, ms\, f(s)\, \Delta s\, \cos^2\beta, \\ N_3 = \mu\Sigma\, ms\, f(s)\, \Delta s\, \cos^2\gamma, \\ T_1 = \mu\Sigma\, ms\, f(s)\, \Delta s\, \cos\beta\, \cos\gamma, \\ T_2 = \mu\Sigma\, ms\, f(s)\, \Delta s\, \cos\gamma\, \cos\alpha, \\ T_3 = \mu\Sigma\, ms\, f(s)\, \Delta s\, \cos\alpha\, \cos\beta. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für die übrigen Spannungen ergeben sich in ganz gleicher Weise, wenn man die afficirte Ebene MN parallel der Ebene des xz und yz legt. Die durch Σ angedeutete Summirung ist über vier auf derselben Seite der Ebene MN liegende Octanten zu erstrecken; es ist aber gleichgültig, welcher der Coordinatenebenen MN parallel ist, da in je zwei gegenüberliegenden Octanten f(s) bei gleicher Lage von s denselben Werth hat.

Hierin ist nun noch Δs durch die Verrückungen ξ, η, ζ des Punktes P auszudrücken, wozu die Formel 42 dient. Hiernach ist

$$\frac{\Delta s}{s} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma - \tau_1 \cos\beta \cos\gamma - \tau_2 \cos\gamma \cos\alpha - \tau_1 \cos\alpha \cos\beta$$

Setzt man diesen Ausdruck ein, so erhalten die Ausdrücke für N_1, T_1, ... die Form

$$64.\quad \begin{cases} N_1 = A_1\sigma_1 + G_3\sigma_2 + G_2\sigma_3 - J_1\tau_1 - B_2'\tau_2 - B_3'\tau_3, \\ N_2 = G_3\sigma_1 + A_2\sigma_2 + G_1\sigma_3 - B_1''\tau_1 - J_2\tau_2 - B_3''\tau_3, \\ N_3 = G_2\sigma_1 + G_1\sigma_2 + A_3\sigma_3 - B_1'''\tau_1 - B_2'''\tau_2 - J_3\tau_3, \\ T_1 = J_1\sigma_1 + B_1''\sigma_2 + B_1'''\sigma_3 - G_1\tau_1 - J_3\tau_2 - J_2\tau_3, \\ T_2 = B_2'\sigma_1 + J_2\sigma_2 + B_2'''\sigma_3 - J_3\tau_1 - G_2\tau_2 - J_1\tau_3, \\ T_3 = B_3'\sigma_1 + B_3''\sigma_2 + J_3\sigma_3 - J_2\tau_1 - J_1\tau_2 - G_3\tau_3. \end{cases}$$

Hierin entsprechen die A den Gliedern, welche die 4ten Potenzen, die B den Gliedern, welche eine 3te und eine 1ste Potenz, die G den Gliedern, welche zwei 2te Potenzen und die J den Gliedern, welche eine 2te und zwei 1ste Potenzen der Cosinus enthalten, z. B. $A_2 = \mu\Sigma ms^2 f(s) \cos^4\beta$, $B_2''' = \mu\Sigma ms^2 f(s) \cos\alpha \cos^3\gamma$ u. s. f.

Hiernach treten fünfzehn verschiedene Coefficienten auf.

§. 36. Körper mit drei auf einander senkrechten Elasticitätsaxen. Die Coordinatenaxen legen wir parallel zu den Elasticitätsaxen. Alsdann hat f(s) in den acht Octanten bei entsprechender Lage von s denselben Werth. Bei der durch Σ angedeuteten Summirung, welche über vier auf derselben Seite einer Ebene liegende Octanten zu erstrecken ist, werden daher alle diejenigen Glieder zu Null, bei welchen die vorkommenden Producte der Cosinus in zwei Octanten positiv und in zwei Octanten negativ sind. Dies tritt bei allen denjenigen Gliedern ein, welche einen der zwei Cosinus von ungerader Potenz enthalten. Diesen

Digitized by Google

Gliedern entsprechen im vorigen Paragraph sämmtliche mit B und J bezeichneten Coefficienten. Sonach wird:

$$65.\quad \begin{cases} N_1 = A_1\sigma_1 + G_3\sigma_2 + G_2\sigma_3, & T_1 = -G_1\tau_1, \\ N_2 = G_3\sigma_1 + A_2\sigma_2 + G_1\sigma_3, & T_2 = -G_2\tau_2, \\ N_3 = G_2\sigma_1 + G_1\sigma_2 + A_3\sigma_3, & T_3 = -G_3\tau_3. \end{cases}$$

Sonach treten hier nur sechs Coefficienten auf.

Reduzirt man auf $\sigma_1, \tau_1, \ldots$, so ergiebt sich

$$66.\quad \begin{cases} \sigma_1 = +\frac{N_1}{E_1} - \frac{N_2}{\mathfrak{E}_3} - \frac{N_3}{\mathfrak{E}_2}, & \tau_1 = -\frac{T_1}{G_1}, \\ \sigma_2 = -\frac{N_1}{\mathfrak{E}_3} + \frac{N_2}{E_2} - \frac{N_3}{\mathfrak{E}_1}, & \tau_2 = -\frac{T_2}{G_2}, \\ \sigma_3 = -\frac{N_1}{\mathfrak{E}_2} - \frac{N_2}{\mathfrak{E}_1} + \frac{N_3}{E_3}, & \tau_3 = -\frac{T_3}{G_3}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$66\text{ a.}\quad \begin{cases} K = A_1A_2A_3 - 2G_1G_2G_3 - A_1G_1^2 - A_2G_2^2 - A_3G_3^2, \\ E_1 = \frac{K}{A_2A_3 - G_1^2}, \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{K}{A_1G_1 - G_2G_3} \text{ u. s. f.} \end{cases}$$

Um den Elasticitäts-Coefficienten E für irgend eine beliebige Richtung, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, zu erhalten, nehmen wir an, dass auf ein Parallelepiped, dessen eine Kante diese Richtung hat, nur eine Normalspannung N in der Richtung dieser Kante wirke. Dieselbe ist dann zugleich die einzige Hauptspannung. Die Componenten X, Y, Z der Spannung R_1, welche ein zur Ebene yz paralleles Flächenelement afficirt, nach Richtung der N und zwei hierzu senkrechten Richtungen sind nach 4 (§. 10) (weil N für N_1, 0 für N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 zu setzen ist) $X = N\cos\alpha$, $Y = 0$, $Z = 0$. Die Componente von R_1 nach Richtung der x ist N_1, also ist (weil die Projection einer Kraft auf eine Gerade gleich der Summe der Projectionen ihrer Componenten ist) $N_1 = X\cos\alpha + 0 + 0 = N\cos^2\alpha$. Ebenso ergiebt sich:

$$\begin{aligned} N_1 &= N\cos^2\alpha, & T_1 &= N\cos\beta\cos\gamma, \\ N_2 &= N\cos^2\beta, & T_2 &= N\cos\gamma\cos\alpha, \\ N_3 &= N\cos^2\gamma, & T_3 &= N\cos\alpha\cos\beta, \end{aligned}$$

mithin nach 66

$$\sigma_1 = N\left(+\frac{\cos^2\alpha}{E_1} - \frac{\cos^2\beta}{\mathfrak{E}_3} - \frac{\cos^2\gamma}{\mathfrak{E}_2}\right), \quad \tau_1 = -\frac{N\cos\beta\cos\gamma}{G_1}, \text{ u. s. f.}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\sigma_1, \tau_1, \ldots$ in den Ausdruck 42 (§. 23) für die relative Längenänderung in beliebiger Richtung und $\frac{N}{E}$ für σ, so ergiebt sich

$$67.\quad \frac{1}{E} = \frac{\cos^4\alpha}{E_1} + \frac{\cos^4\beta}{E_2} + \frac{\cos^4\gamma}{E_3} + \left(\frac{1}{G_1} - \frac{2}{\mathfrak{E}_1}\right)\cos^2\beta\cos^2\gamma + \left(\frac{1}{G_2} - \frac{2}{\mathfrak{E}_2}\right)\cos^2\gamma\cos^2\alpha + \left(\frac{1}{G_3} - \frac{2}{\mathfrak{E}_3}\right)\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

Für einen isotropen Körper wird $E_1 = E_2 = E_3 = E$, $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$

Digitized by Google

$= \mathfrak{E}_3 = mE$, $G_1 = G_2 = G_3 = \frac{Em}{2(m+1)}$, daher $\frac{1}{G_1} - \frac{2}{\mathfrak{E}_1} = \ldots = \frac{2(m+1)}{Em} - \frac{2}{Em} = \frac{2}{E}$. Nach De Saint-Venant soll entsprechend allgemein $\frac{1}{G_1} - \frac{2}{\mathfrak{E}_3} = \frac{2}{\sqrt{E_1 E_2}}$ etc. sein. Alsdann steht in 67 rechts ein vollständiges Quadrat und es wird einfacher

$$68. \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{E_1}} + \frac{\cos^2\beta}{\sqrt{E_2}} + \frac{\cos^2\gamma}{\sqrt{E_3}}.$$

Stellt man $\frac{1}{\sqrt{E}}$ für alle möglichen Richtunge nach Grösse und Richtung durch Gerade dar, so liegen hiernach die Endpunkte derselben auf einem Elipsoide.

§. 37. Körper mit einer Elasticitätsaxe. Wählen wir die Elasticitätsaxe als Axe der x, so ist offenbar in 68 $A_2 = A_3$, $G_2 = G_3$. Daher wird

$$69. \quad \begin{cases} N_1 = A_1\sigma_1 + G_2\sigma_2 + G_2\sigma_3, & T_1 = -G_1\tau_1, \\ N_2 = G_2\sigma_1 + A_2\sigma_2 + G_1\sigma_3, & T_2 = -G_2\tau_2, \\ N_3 = G_2\sigma_1 + G_1\sigma_2 + A_2\sigma_3, & T_3 = -G_2\tau_3, \end{cases}$$

so dass hier nur vier Coefficienten auftreten.

Die Reduction auf $\sigma_1, \tau_1, \ldots$ giebt

$$70. \quad \begin{cases} \sigma_1 = +\frac{N_1}{E_1} - \frac{N_2}{\mathfrak{E}_1} - \frac{N_3}{\mathfrak{E}_2}, & \tau_1 = -\frac{T_1}{G_1}, \\ \sigma_2 = -\frac{N_1}{\mathfrak{E}_1} + \frac{N_2}{E_2} - \frac{N_3}{\mathfrak{E}_2}, & \tau_2 = -\frac{T_2}{G_2}, \\ \sigma_3 = -\frac{N_1}{\mathfrak{E}_1} - \frac{N_2}{\mathfrak{E}_2} + \frac{N_3}{E_2}, & \tau_3 = -\frac{T_3}{G_2}. \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$70\text{ a.} \quad \begin{cases} K = A_1A_2^2 - 2G_1G_2^2 - A_1G_1^2 - 2A_2G_2^2, \\ E_1 = \frac{K}{A_2^2 - G_1^2}, \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{K}{A_1G_1 - G_2^2}, \\ E_2 = \frac{K}{A_1A_2 - G_2^2}, \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{K}{A_2G_2 - G_1G_2}. \end{cases}$$

Für den Elasticitäts-Coefficienten für eine Richtung, welche mit der Elasticitätsaxe den Winkel α bildet und in der Ebene der xy liegt, ist nach 67, da $\cos\alpha = \sin\beta$, $\cos\gamma = 0$ ist,

$$71. \quad \frac{1}{E} = \frac{\cos^4\alpha}{E_1} + \frac{\sin^4\alpha}{E_2} + \left(\frac{1}{G_2} - \frac{2}{\mathfrak{E}_1}\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha$$

und diesen Werth hat $\frac{1}{E}$ offenbar für jede Richtung, welche mit der Elasticitätsaxe den Winkel α bildet.

Digitized by Google

Nach der De Saint-Venant'schen Annahme ist $\frac{1}{G_2} - \frac{2}{\mathfrak{E}_1} = \frac{2}{\sqrt{E_1 E_2}}$ und daher einfacher

$$72. \quad \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{E_1}} + \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{E_2}},$$

wonach auf Taf. I in Fig. 8 E graphisch dargestellt ist.

Nach Versuchen von Hagen soll für Holz

$$\frac{1}{E} = \frac{\cos^2\alpha}{E_1} + \frac{\sin^2\alpha}{E_2}$$

sein, was indessen unbedingt falsch ist, da hiernach für isotrope Körper E nicht constant werden würde.

§. 38. Isotrope Körper. Hier ist offenbar $A_1 = A_2 = A_3$, $G_1 = G_2 = G_3$, so dass hier nur zwei Coefficienten A und G auftreten. Die in 63 angedeutete Summirung lässt sich hier aber, weil f(s) von der Richtung der Geraden s unabhängig ist, zum Theil ausführen und so noch eine Beziehung zwischen A und G ermitteln.

Bezeichnen wir in Fig. 8 den Winkel, welchen die durch PP′ gehende, auf der Ebene MN senkrechte Ebene mit der Ebene der xz einschliesst, mit φ, so ist $\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varphi$, $\cos\beta = \sin\gamma\sin\varphi$, folglich

$$A = \mu\Sigma m s^2 f(s)\cos^4\gamma,$$
$$G = \mu\Sigma m s^2 f(s)\sin^4\gamma\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Wir denken uns ein dem gewählten Coordinatensystem entsprechendes Volumenelement, welches begrenzt wird von zwei concentrischen Kugelflächen aus P mit den Radien s, $s = ds$, ferner von zwei Kegelflächen, deren Spitze in P liegen und deren Erzeugenden mit PP_1 die Winkel γ, $\gamma + d\gamma$ einschliessen und von zwei durch PP_1 gehenden Meridianebenen, welche mit der Ebene der xz die Winkel φ, $\varphi + d\varphi$ einschliessen. Die Masse dieses Elementes ist $\mu s^2 \sin\gamma\, ds\, d\gamma\, d\varphi$. Dieser Ausdruck ist für m einzusetzen und statt der Summirung eine dreifache Integration nach s, γ, φ anzuwenden. Da f(s) mit wachsendem s rapid abnimmt, so wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man nach s zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt. Nach γ ist zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, nach φ zwischen 0 und 2π zu integriren. Demnach wird

$$A = \mu^2 \int_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} s^4 f(s)\cos^4\gamma\sin\gamma\, ds\, d\gamma\, d\varphi,$$

$$G = \mu^2 \int_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} s^4 f(s)\sin^3\gamma\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, ds\, d\gamma\, d\varphi.$$

Es ist aber

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\gamma\sin\gamma\, d\gamma = \frac{1}{5}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\gamma\, d\gamma = \frac{8}{15},$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

folglich ist

$$A = \frac{2\pi\mu^2}{5}\int_0^\infty s^4 f(s)\,ds, \quad G = \frac{2\pi\mu^3}{15}\int_0^\infty s^4 f(s)\,ds$$

und hieraus folgt die interessante Beziehung

$$73. \quad A = 3G.$$

Demnach wird nun

$$74. \quad \begin{cases} N_1 = G(3\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), & T_1 = -G\tau_1, \\ N_2 = G(\sigma_1 + 3\sigma_2 + \sigma_3), & T_2 = -G\tau_2, \\ N_3 = G(\sigma_1 + \sigma_2 + 3\sigma_3), & T_3 = -G\tau_3. \end{cases}$$

Umgekehrt ergiebt sich hieraus

$$75. \quad \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2}{5G}\left(N_1 - \frac{N_2 + N_3}{4}\right), & \tau_1 = -\frac{T_1}{G}, \\ \sigma_2 = \frac{2}{5G}\left(N_2 - \frac{N_3 + N_1}{4}\right), & \tau_2 = -\frac{T_2}{G}, \\ \sigma_3 = \frac{2}{5G}\left(N_3 - \frac{N_1 + N_2}{4}\right), & \tau_3 = -\frac{T_3}{G}. \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den entsprechenden Formeln 49 (§. 27) giebt für m den Werth

$$m = 4,$$

so dass

$$\mathfrak{E} = 4E, \quad G = \varepsilon = \frac{2}{5}E$$

ist (Vergl. §. 26).

V. Kapitel.

Allgemeine Festigkeitslehre.

§. 39. Elasticitätsgrenze. Die äussere Belastung eines Körpers, bei deren Ueberschreitung eine bleibende Formänderung eintritt, oder welche der Elasticitätsgrenze entspricht, nennen wir die Grenzbelastung. Wirkt auf ein rechtwinkliges Parallelepiped nur eine Normalspannung, so nennen wir diejenige Grösse derselben, welche der Elasticitätsgrenze entspricht, den Grenzcoefficienten.

Ausserhalb der Elasticitätsgrenze gilt auch das in §. 25 aufgestellte Gesetz, welches die Proportionalität zwischen Längenänderung und Kraft ausspricht, nicht mehr, wenn es sich um die totale Formänderung handelt. Für den elastischen Theil der Formänderung (vergl. §. 2) gilt es aber nahezu allgemein.

Statt des Wortes Grenzcoefficient wird häufig das Wort Tragmodul oder Tragcoefficient gewählt. Die von uns zuerst gewählte Benennung ist aber bezeichnender.

§. 40. Bruch. Die äussere Belastung, bei welcher ein Bruch des Körpers eintritt, nennen wir die Bruchbelastung.

Digitized by Google

Wirkt auf ein rechtwinkliges Parallelepiped nur eine Normalspannung N, so nennen wir diejenige Grösse dieser Spannung, bei welcher ein Bruch erfolgt, den Festigkeitscoefficient und zwar für Zug oder Druck, je nachdem N ziehend oder drückend wirkt.

Wirkt auf das rechtwinklige Parallelepiped eine Schubspannung, so kann ebenfalls eine Trennung erfolgen. Diejenige Spannung, bei welcher die Trennung erfolgt, nennen wir den Festigkeitscoefficient für Schub.

Statt des Wortes Festigkeitscoefficient wird häufig das Wort Bruchcoefficient oder Bruchmodul gebraucht.

§. 41. Sicherheit. Wenn es darauf ankommt, dauerhafte Constructionen herzustellen, so darf die Belastung die Bruchbelastung nicht erreichen. Die noch zulässige Belastung nennen wir die Tragkraft. Das Verhältniss der Bruchbelastung zur Tragkraft nennen wir die Bruchsicherheit, und das Verhältniss der Grenzbelastung zur Tragkraft die Grenzsicherheit.

Wirkt auf ein rechtwinkliges Parallelepiped nur eine Spannung, sei es eine Normal- oder Schubspannung, so nennt man die noch zulässige Spannung den Sicherheitscoefficienten und zwar bezüglich für Zug, Druck oder Schub. Wir bezeichnen dieselben mit K, $\mathfrak{K}$, K_1. Die entsprechende relative Ausdehnung, Zusammendrückung und Gleitung ist alsdann $\frac{K}{E}$, $\frac{\mathfrak{K}}{E}$, $\frac{K_1}{G}$.

§. 42. Festigkeitsbedingungen. Eine Trennung tritt jedenfalls bei isotropen Körpern dann ein, wenn die grösste Längenänderung um einen Punkt herum eine gewisse Grenze überschreitet. Die grösste zulässige Ausdehnung und Zusammendrückung ist nach dem vorigen Paragraph $\frac{K}{E}$ und $\frac{\mathfrak{K}}{E}$. Bedeutet max $(+\sigma)$ und max $(-\sigma)$ die grösste positive und negative relative Längenänderung, so sind daher die Festigkeitsbedingungen $\max(+\sigma) = \frac{E}{K}$, $\max(-\sigma) = \frac{\mathfrak{K}}{E}$ oder

$$E \max(+\sigma) = K, \quad E \max(-\sigma) = \mathfrak{K}.$$

Diejenige Spannung, welche die Längenänderung σ hervorbringen würde, wenn sie in der Richtung von σ wirkte und in anderen Richtungen keine Spannungen wirkten, nennen wir ideale Spannung und bezeichnen sie mit S. Die den Hauptlängenänderungen entsprechenden idealen Spannungen nennen wir ideale Hauptspannungen und bezeichnen sie mit S_1, S_2, S_3. Alsdann ist $E \max(+\sigma) = \max(+S)$, $E \max(-\sigma) = \max(-S)$, also die Festigkeitsbedingungen

$$76. \quad \max(+S) = K, \quad \max(-S) = \mathfrak{K}.$$

Von diesen Gleichungen ist entweder die erste oder die zweite zu wählen, je nachdem

$$\frac{\max(+S)}{\max(-S)} \lessgtr \frac{K}{\mathfrak{K}}$$

ist; denn im ersten Falle ($<$) würde, wenn $\max(+S) = K$ ist, $\max(-S) < \mathfrak{K}$ sein, also kein Bruch durch Druck eintreten können; im letzten Falle

Digitized by Google

($\lessdot$) dagegen würde, wenn max $(-S) = \mathfrak{K}$ ist, max $(+S) \lessdot K$ sein. also kein Bruch durch Zug eintreten können.

Offenbar ist max $(+S)$, sowie max $(-S)$ eine der drei idealen Hauptspannungen S_1, S_2, S_3 und diese sind nach:

$$77. \quad \begin{cases} S_1 = A - \frac{B+C}{m}. \\ S_2 = B - \frac{C+A}{m}. \\ S_3 = C - \frac{A+B}{m}. \end{cases}$$

Für m wird man der Sicherheit wegen unter den Zahlen 3 und 4 (siehe §. 28) diejenige wählen, welche den grössten Werth von max $(+S)$ oder max $(-S)$ erzeugt.

Die Festigkeitsbedingung für Schub, d. h. die Bedingung, dass die grösste zulässige Gleitung nicht überschritten wird, ist $\max(g) = \frac{K}{G}$, oder $G \max(\tau) = K_1$, oder weil $G \max(\tau) = \max T$ ist,

$$78. \quad \max T = K_1,$$

worin max T die grösste der drei Hauptschubspannungen (§. 16) bezeichnet.

Diese drei Festigkeitsbedingungen lassen sich auch schreiben:

$$79. \quad \frac{\max(+S)}{K} = 1. \qquad \frac{\max(-S)}{\mathfrak{K}} = 1. \qquad \frac{\max T}{K_1} = 1.$$

und von diesen drei Gleichungen ist diejenige massgebend, für welche der Werth auf der linken Seite am grössten ist.

§. 43. Grenz- und Festigkeitscoefficienten. In Folgendem sollen die Grenz- und Festigkeitscoefficienten in Kilogrammen pro Quadratcentimeter zusammengestellt werden.

a) Holz. Die Mittelwerthe für verschiedene Holzgattungen weichen nicht viel von einander ab. Man kann etwa annehmen:

Richtung	Grenzcoefficient für		Festigkeitscoefficient für		
	Zug	Druck	Zug	Druck	Schub
Faserrichtung	240	190	810	530	70
Radial und tangential	—	—	120	270	100

Der Grenzcoefficient für Druck ist ungefähr $\frac{4}{5}$ von dem für Zug. Der Festigkeitscoefficient für Druck ist ungefähr $\frac{2}{3}$ von dem für Zug.

b) Eisen.

Eisenart	Grenzcoefficient für		Festigkeitscoefficient für		
	Zug	Druck	Zug	Druck	Schub
Schmiedeeisen	1560	1560	4150	3630	3230
Gewöhnlicher Stahl	3000	3000	8000	7000	6220
Gussstahl	5000	—	10000	—	7780
Gusseisen	660	1650	1320	7920	1060

Digitized by Google

Der Grenzcoefficient für Druck ist beim Schmiedeeisen und Stahl nahe gleich dem für Zug, beim Gusseisen etwa $2\frac{1}{2}$ von dem für Zug. Der Festigkeitscoefficient für Druck ist beim Schmiedeeisen und Stahl ungefähr $\frac{7}{8}$ von dem für Zug, beim Gusseisen aber etwa 6mal so gross, als der für Zug. Der Grenzcoefficient ist beim Schmiedeeisen und Stahl für Zug $\frac{1}{3}$, für Druck $\frac{2}{5}$, beim Gusseisen für Zug $\frac{1}{2}$, für Druck $\frac{1}{5}$ vom Festigkeitscoefficienten.

c) Andere Metalle. Für andere Metalle ist der geringeren Wichtigkeit wegen meist nur der Festigkeitscoefficient für den Zug bestimmt. Derselbe ist:

Metall	Festigkeits-Coefficient für Zug	Metall	Festigkeits-Coefficient für Zug
Blei, gegossen	95	Aluminium	1540
Blei, gewalzt	130	Kupfer, gegossen . . .	1960
Zink, gegossen	200	Bronze, „ . . .	2300
Zinn, „	320	Kupfer, gewalzt	2330
Silber, „	750	Platin, Blech	2570
Gold, „	750	Aluminiumbronze, gegossen	5330
Messing, gegossen . . .	1260	„ gehämm.	7000
Zink, gewalzt	1350		

Der Festigkeitscoefficient für Druck ist beim Kupfer etwa $2\frac{1}{2}$, beim Messing etwa 8mal so gross, als der für Zug. Der Grenzcoefficient für Zug ist beim Kupfer etwa $\frac{1}{8}$, beim Messing etwa $\frac{1}{3}$, beim Blei etwa $\frac{4}{5}$ von dem Festigkeitscoefficient für Zug.

d) Steine. Für die Steine sind hauptsächlich nur die Festigkeits-Coefficienten für Druck bestimmt, weil die Zugfestigkeit so klein ist, dass man ihr Auftreten in Steinconstructionen vermeidet. Die Werthe sind selbst bei derselben Art so schwankend, dass die folgenden Zahlen nur rohe Mittelwerthe darstellen.

Steinart	Festigkeits-Coefficient für Druck	Steinart	Festigkeits-Coefficient für Druck
Gewöhnliche Ziegel . .	830	Glimmerschiefer	80
Kalkstein	840	Serpentin	500
Dolomit	870	Gneiss	610
Rogenstein	880	Dolerit	660
Sandstein	890	Diorit	700
Grauwacke	900	Granit	730
Porphyr	1000	Syenit	740
Kieselschiefer	1200	Basalt	740
Hornblende	1200	Hornstein	740
Chlorytgestein	1300	Quarzfels	760

Der Festigkeitscoefficient für Zug ist nur ungefähr $\frac{1}{8}$ von dem für Druck.

Digitized by Google

§. 44. Wahl des Sicherheitscoefficienten. Als Sicherheitscoefficienten wählt man in der Praxis auf Grund von Erfahrungen entweder einen bestimmten Theil des Festigkeitscoefficienten oder einen Theil des Grenzcoefficienten. Es ist dies nicht gleichgiltig. Soll die Tragkraft $\frac{1}{m}$ die Grenzbelastung sein, so dass m-fache Grenzsicherheit stattfindet, so muss auch die grösste Längenänderung $\frac{1}{m}$ von der Längenänderung an der Elasticitätsgrenze, also der Sicherheitscoefficient $\frac{1}{m}$ des Grenzcoefficienten sein, weil innerhalb der Elasticitätsgrenze die Längenänderung proportional der Spannung ist. Soll aber die Tragkraft $\frac{1}{n}$ der Bruchbelastung sein, so dass n-fache Bruchsicherheit stattfindet, so wird im Allgemeinen der Sicherheitscoefficient nicht $\frac{1}{n}$ des Festigkeitscoefficienten sein, weil die Proportionalität zwischen Längenänderung und Spannung in der Nähe des Bruches nicht mehr stattfindet. Ja es wird, wenn man für alle Belastungsweisen eine bestimmte Bruchsicherheit wählt, der Sicherheitscoefficient gar nicht für alle Belastungsweisen und Körperformen constant sein. Die genaue Bestimmung des Sicherheitscoefficienten würde eine Bestimmung der Formänderung beim Bruche nöthig machen, was zur Zeit noch nicht allgemein möglich ist. Dieses Uebelstandes ist man allerdings enthoben, wenn man eine bestimmte Grenzsicherheit wählt. Diese Annahme hat aber wiederum den Uebelstand, dass die Elasticitätsgrenze überhaupt sehr unsicher ist, ja selbst nicht immer eine bleibende Formänderung einen Nachtheil hat, während ein Bruch unter keinen Umständen eintreten darf. Es erscheint deshalb doch gerathen, eine bestimmte Bruchsicherheit anzunehmen und den entsprechenden Sicherheitscoefficient durch Zuhilfenahme der Empirie zu bestimmen, wie wir später zeigen werden. Eine genaue Bestimmung ist zum Glück wegen der Verschiedenheit desselben Materials und der Unbestimmtheit in der Wahl des Sicherheitsgrades nicht nöthig.

---

§. 45. Form der Körper. Wir stehen hiermit am Ende der allgemeinen Theorie der Elasticität und gehen nun dazu über, die für die Praxis wichtigen speciellen Fälle zu behandeln.

Wir unterscheiden fünf Klassen von Körperformen, nämlich: 1) linienförmige Körper mit äusserst geringer Dicke und Breite, 2) flächenförmige Körper mit äusserst geringer Dicke, 3) stabförmige Körper oder Stäbe mit geringer Dicke und Breite, 4) plattenförmige Körper oder Platten mit geringer Dicke und 5) Körper, welche nach allen drei Dimensionen nahe gleich ausgedehnt sind. Die meiste Aufmerksamkeit werden wir den Stäben schenken, da diese für die Praxis am wichtigsten sind.

Wir denken uns einen Stab, entstanden durch die Bewegung einer ebenen Fläche und zwar dergestallt, dass sich der Schwerpunkt derselben auf einer gegebenen Linie, der sogenannten Axe oder Leitcurve bewegt und die Ebene der Figur stets senkrecht auf dieser Linie steht,

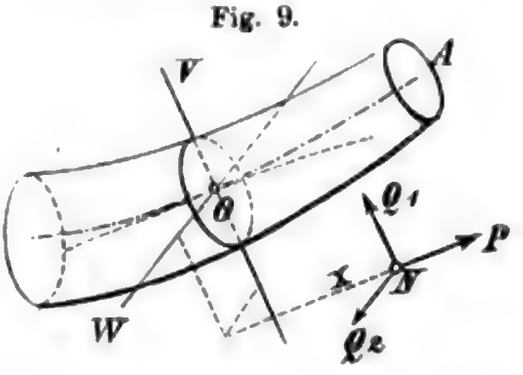
Digitized by Google

während sich die Gestalt der Figur beliebig ändern kann. Die bewegliche Figur nennen wir in irgend einer Lage den Querschnitt des Körpers. Eine beliebige materielle Linie, welche parallel zur Axe ist, nennen wir eine Fasser und den zwischen zwei sehr nahen Querschnitten enthaltenen Theil eine Scheibe.

Wir unterscheiden Stäbe mit gerader, einfach gekrümmter und doppelt gekrümmter Axe.

§. 46. Die äusseren Kräfte. Die auf einen Stab wirkenden äusseren Kräfte greifen entweder an einzelnen Punkten an und wir nennen sie dann isolirte Kräfte oder sie sind über die Oberfläche stetig vertheilt. Für die Einführung der Kräfte, welche auf einen beliebigen durch einen Querschnitt O getrennten Theil OA (Fig. 9) des Körpers wirken, wählen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem OU, OV, OW und zwar so, dass zwei Axen OV, OW im Querschnitte liegen und durch dessen Schwerpunkt gehen, die dritte OU also die Leitcurve in O tangirt.

Fig. 9.



Alle äusseren Kräfte, welche auf den Theil OA wirken, zerlegen wir nach Richtung dieser drei Axen und führen folgende Bezeichnungen ein:

Die Summe aller in Richtung der Tangente OU wirkenden Componenten nennen wir die Axialkraft und bezeichnen sie mit P.

Die Summe aller parallel zum Querschnitte in Richtung von OV, OW wirkenden Componenten nennen wir Transversalkräfte, weil sie transversal zur Axe OA des Körpers wirken, und bezeichnen sie mit Q_1, Q_2.

Die Summe der Momente der äusseren Kräfte in Beziehung auf die Axen OV, OW nennen wir Biegungsmomente oder kurz Momente und bezeichnen sie mit M_1, M_2, die Summe der Momente in Beziehung auf die Tangente OU aber das Torsionsmoment und bezeichnen dasselbe mit M.

Welchen der auf beiden Seiten des Querschnittes O liegenden Theile OA, OB man betrachtet, ist gleichgiltig, da das Gleichgewicht des ganzen Körpers fordert, dass die Resultanten der auf beide Theile wirkenden Kräfte gleich, obwohl der Richtung nach entgegengesetzt sind.

§. 47. Beanspruchungsweise. Es lassen sich folgende Arten der Formänderung der Stäbe unterscheiden:

1. Zwei sehr nahe Querschnitte entfernen oder nähern sich, ohne sich gegenseitig zu verschieben oder zu verdrehen. Dies tritt ein, wenn nur P vorhanden, aber $Q_1 = Q_2 = 0$, $M = 0$, $M_1 = M_2 = 0$ ist. Wir nennen diesen Fall Normalelasticität, Normalfestigkeit und unterscheiden Zugelasticität, Zugfestigkeit und Druckelasticität, Druckfestigkeit. Die Trennung heisst Zerreissen oder Zerdrücken.

2. Beide Querschnitte verschieben sich gegenseitig, ohne ihre Entfernung zu ändern und ohne sich gegenseitig zu drehen. Dies tritt ein, wenn nur Q_1, Q_2 vorhanden, also $P = 0$, $M = 0$, $M_1 = M_2 = 0$ ist.

Digitized by Google

Wir nennen diesen Fall Schub- oder Gleitungselasticität, Schub- oder Schubfestigkeit, die Trennung des Körpers Abschieben oder Abscheeren.

3. Der eine Querschnitt dreht sich gegen den andern um eine in seiner Ebene liegende und durch seinen Schwerpunkt gehende Axe. Dies tritt ein, wenn nur M_1, M_2 vorhanden, also $P = 0$, $Q_1 = Q_2 = 0$, $M = 0$ ist. Wir nennen diesen Fall Biegungselasticität, Biegungsfestigkeit, die Formänderung das Biegen, die Trennung des Körpers Zerbrechen.

4. Der eine Querschnitt dreht sich gegen den andern in seiner Ebene um seinen Schwerpunkt. Dies tritt ein, wenn nur M vorhanden, also $P = 0$, $Q_1 = Q_2 = 0$, $M_1 = M_2 = 0$ ist. Wir nennen diesen Fall Torsionselasticität, Torsionsfestigkeit, die Formänderung das Verdrehen, die Trennung das Abdrehen, Abwürgen.

Treten mehrere dieser genannten einfachen Bewegungen der Querschnitte ein, so sprechen wir von zusammengesetzter Elasticität und Festigkeit.

In der Folge werden wir unter Biegungselasticität auch den Fall verstehen, bei welchem gleichzeitig Normalelasticität und Gleitungselasticität eintritt, da die reine Biegungselasticität zu wenig vorkommt.

Statt der Benennungen Zugfestigkeit, Druckfestigkeit, Bruchfestigkeit sind vielfach die Benennungen absolute Festigkeit, rückwirkende Festigkeit, relative oder respective Festigkeit in Gebrauch. Wir wünschen, dass man diese unpassenden Benennungen als veraltet ansieht. Für die Zug- und Druckfestigkeit haben wir die gemeinschaftliche Benennung Normalfestigkeit gewählt, weil sie gleichen Gesetzen folgen und für den wichtigsten Fall, die Biegungsfestigkeit, als „Norm“ dienen.

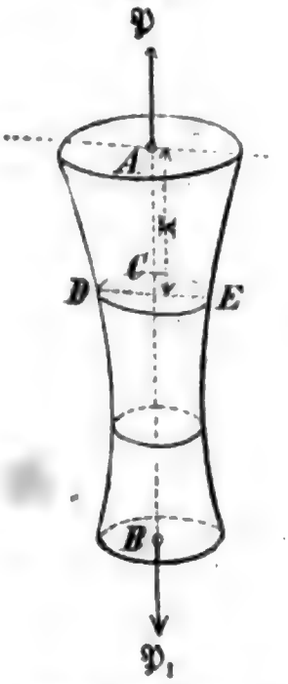
Digitized by Google

II. Abschnitt.
Normal- und Schub-Elasticität.

V. Kapitel.
Normalelasticität gerader Stäbe.

§. 48. Bedingungen. Die Normalelasticität tritt nach §. 47 dann ein, wenn sich zwei benachbarte Querschnitte gegenseitig in der Richtung der Axe des Stabes bewegen und zwar so, dass sie parallel bleiben. Die Axe des Stabes, welche wir als gerade voraussetzen, bleibt hierbei gerade. Diese Formänderung tritt nur dann ein, wenn die Resultante aller auf einen Theil AC (Fig. 10) des Stabes wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt C des betreffenden Querschnittes DE geht und in der Richtung der Axe des Stabes wirkt. Ist das Gewicht des Stabes als wirksame Kraft gegen andere äussere Kräfte nicht zu vernachlässigen, so muss die Axe natürlich eine verticale Lage haben.

Fig. 10.



Wir setzen voraus, dass ausser dem Gewichte des Körpers nur auf die Endflächen A und B äussere Kräfte wirken und bezeichnen mit

$\mathfrak{P}$ die auf das Ende A wirkende äussere Kraft;
P die Axialkraft, d. i. die Summe aller auf den Theil AC des Körpers wirkenden Kräfte;
g das Gewicht der Volumeneinheit des Stabes;
F den Flächeninhalt des Querschnittes C;
x die Entfernung AC;
l die Länge AB des Stabes.
Δl die Längenänderung des ganzen Stabes.

Hierbei nehmen wir die Kräfte $\mathfrak{P}$, P positiv oder negativ, je nachdem sie ziehend oder drückend auf den Stab, bezüglich auf das Stück CB wirken.

Die Kraft, welche im Zustande des Gleichgewichtes auf das Ende B wirken muss, ist $\mathfrak{P} \pm$ Gewicht des ganzen Stabes $= \mathfrak{P} \pm g\int_0^l F\,dx$. Die Axialkraft P ist $\mathfrak{P} \pm$ Gewicht des Stückes AC, d. i.

$$1. \quad P = \mathfrak{P} \pm g\int_0^x F\,dx,$$

wobei + oder − zu wählen ist, je nachdem das Ende A, an welchem die Kraft $\mathfrak{P}$ wirkt, das untere oder das obere ist.

Digitized by Google

§. 49. Spannungen. Wenn der Stab prismatisch und die an jedem Ende wirkende Kraft gleichmässig über den Endquerschnitt vertheilt ist, so ist die Längenänderung aller Fassern an einem Querschnitte gleich gross und die Fassern bleiben parallel. Die Fassern üben hierbei auf einander keinen Druck aus und haben auch kein Bestreben, sich gegenseitig zu verschieben. Die Querschnitte werden daher auch eben bleiben. Auf ein im Körper gedachtes Parallelepiped, dessen eine Kante parallel der Axe des Stabes ist, wirken daher gar keine Schubspannungen und nur eine Normalspannung in der Richtung der Axe des Stabes.

Wenn der Stab nicht prismatisch ist oder wenn die äusseren Kräfte nicht gleichmässig über die Endquerschnitte vertheilt sind, so ist das Gesagte nicht mehr ganz richtig. Wir wollen es indessen auch für diesen Fall als richtig annehmen, da die genaue Theorie mit grossen Schwierigkeiten verknüpft ist und die Abweichungen in praktischen Fällen nur gering sind.

Wir bezeichnen, entsprechend der früheren Bezeichnung, die in einem beliebigen Querschnitte in der Richtung der Axe wirkende Normalspannung mit N_1. Weil die relativen Längenänderungen aller Fassern in einem Querschnitte gleich gross sind, so hat N_1 an allen Stellen des Querschnittes denselben Werth. Die Summe aller auf den Stabtheil AC wirkenden Spannungen ist daher $N_1 F$. Für das Gleichgewicht des Theiles AC ist daher $N_1 F = P$ oder

$$2. \quad N_1 = \frac{P}{F} = \frac{\mathfrak{P}}{F} \pm \frac{g}{F}\int_0^x F\,dx.$$

Die Gleichung 18 (§. 13) zur Bestimmung der Hauptspannungen wird, weil von sechs Spannungen N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 nur N_1 vorhanden ist,

$$3. \quad H^3(H - N_1) = 0.$$

Die drei Hauptspannungen sind daher 0, 0 und N_1, so dass also die Spannung N_1 zugleich die einzige Hauptspannung ist. Das Spannungsellipsoid wird eine Gerade, so dass alle Spannungen in Richtung der Axe des Stabes wirken. Schliesst die Normale eines Flächenelementes mit der Axe den Winkel α ein, so wird nach 34, 35, 36 (§. 18):

$$4. \quad R = N_1 \cos\alpha, \quad N = N_1 \cos^2\alpha, \quad T = \tfrac{1}{2} N_1 \sin 2\alpha.$$

Die Schubspannung T wird zum Maximum für jede Ebene, welche gegen die Axe unter 45^0 geneigt ist. Die Hauptschubspannung ist nach 37 (§. 18):

$$5. \quad \mathfrak{H} = \tfrac{1}{2} N_1.$$

§. 50. Formänderung. Die relative Längenänderung einer Fasser ist nach §. 26:

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N_1}{E} = \frac{P}{EF},$$

daher ist die Aenderung des x:

$$6. \quad \Delta x = \frac{1}{E}\int_0^x \frac{P}{F}\,dx$$

Digitized by Google

und demnach die Längenänderung des ganzen Stabes:

$$7. \quad \Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{P}{F}\,dx .$$

Die relative Längenänderung einer zur Axe senkrechten Geraden ist $-\frac{1}{m}\frac{\Delta\,dx}{dx}$ und die relative Volumenänderung $\Theta = \left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{\Delta\,dx}{dx}$. Für $m = 3$ und 4 wird $\Theta = \frac{1}{3}\frac{\Delta\,dx}{dx}$ und $\frac{1}{2}\frac{\Delta\,dx}{dx}$, d. h. die relative Volumenänderung ist $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ der relativen axialen Längenänderung.

§. 51. Festigkeit. Da nur eine Hauptspannung wirkt, so ist die Festigkeitsbedingung, je nachdem der Stab auf Zug oder Druck beansprucht wird,

$$\max(+N_1) = K, \quad -\max(-N_1) = \mathfrak{K},$$

d. i.

$$8. \quad \max\frac{P}{F} = K, \quad -\max\frac{P}{F} = \mathfrak{K}.$$

Ist das Gewicht des Körpers zu vernachlässigen, so wird N_1 zum Maximum am kleinsten Querschnitte. Ist derselbe F_0, so ist die Festigkeitsbedingung

$$9. \quad \mathfrak{P} = K F_0, \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{K} F_0 .$$

Als kleinster Querschnitt bei gegebener Tragkraft folgt hieraus:

$$10. \quad F_0 = \frac{\mathfrak{P}}{K} \text{ oder } = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{K}} .$$

Es lässt sich allerdings nicht gut denken, dass ein Bruch durch Druck, welcher eine Annäherung der Molecüle veranlasst, erfolgen sollte. Es ist viel wahrscheinlicher, dass eine Trennung durch schiefes Abschieben erfolge, worauf auch die Versuche hindeuten. Die Hauptschubspannung ist nach 37 (§. 18) $= \frac{1}{2}N_1$. Ist daher K_1 der Sicherheitscoefficient für Schubfestigkeit, so ist $-\max(-\frac{1}{2}N_1) = K_1$ oder $-\max(-N_1) = 2K_1$, oder

$$-\max\frac{P}{F} = 2K_1.$$

Demnach wäre

$$11. \quad \mathfrak{K} = 2K_1, \quad K_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{K}.$$

Für Schmiedeeisen ist z. B. für 1fache Sicherheit $K = 4150$, $\mathfrak{K} = 3630$, $K_1 = 3230$ Klgr. pro □Cent., so dass hier die eben aufgestellte Beziehung nicht bewahrheitet wird.

Wenn ein Bruch durch Zerreissen in Folge der seitlichen Ausdehnung entstehen sollte, so müsste bei isotropen Körpern $K_1 = \frac{1}{3}K$ sein, was von der Erfahrung noch viel mehr abweicht. Jedenfalls bleibt es vor der Hand am zweckmässigsten, die durch direkte Druckversuche gefundenen Coefficienten der Druckfestigkeit in Anwendung zu bringen.

§. 52. Prismatischer Stab. Der Stab sei prismatisch, d. h. der

Digitized by Google

Querschnitt sei constant. Wenn wir das Eigengewicht vernachlässigen, so ist

$$12.\quad N_1 = \frac{\mathfrak{P}}{F},$$

$$13.\quad \Delta l = \frac{\mathfrak{P}\, l}{E\,F},$$

$$14.\quad \mathfrak{P} = K\,F \text{ oder } = \mathfrak{K}\,F.$$

Hiernach ist der Querschnitt bei gegebener Tragkraft

$$15.\quad F = \frac{\mathfrak{P}}{K} \text{ oder } F = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{K}}.$$

b) Wenn nur das Eigengewicht wirkt, so ist $P = Fgx$, $\Delta x = Fg\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}Fgx^2$, also

$$16.\quad \Delta l = \tfrac{1}{2}Fgl^2 = \tfrac{1}{2}Fgl.l.$$

Die Längenänderung ist hiernach halb so gross, als wenn die Hälfte des Gewichtes des Stabes an jedem Ende wirkte.

§. 53. Beliebig begrenzter Stab. Es kommen zuweilen unregelmässig begrenzte Stäbe vor, bei denen sich F nicht als Function von x ausdrücken lässt, um die zur Bestimmung der Längenänderung nöthige Integration vornehmen zu können. Alsdann berechnet man dieselbe am besten nach der Sympson'schen Regel. Hierzu sei der Stab in eine gerade Anzahl gleicher Theile getheilt und die einzelnen Querschnitte seien F_0, F_1, $F_2 \ldots F_n$.

Ist F der Querschnitt eines prismatischen Stabes von gleicher Länge und gleicher Längenänderung, so ist bei Vernachlässigung des Eigengewichtes $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$, also nach 7 $\frac{Pl}{EF} = \frac{\mathfrak{P}}{E}\int_0^l \frac{dx}{F}$, mithin

$$17.\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{3n}\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{F_n}+4\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_3}+\cdots\right)+2\left(\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_4}+\cdots\right)\right].$$

Sind z. B. nur zwei Theile angenommen und sind ausserdem die beiden Endquerschnitte gleich, so wird

$$18.\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{F_0}+\frac{2}{F_1}\right),\quad F = \frac{3F_0F_1}{2F_0+F_1}.$$

Bei wenig von einander abweichenden Querschnitten lässt sich die Regel vereinfachen. Es ist nämlich $\frac{1}{F_m} = \frac{1}{F+(F_m-F)}$, d. i. nahezu, weil $F_m - F$ gegen F sehr klein ist, $= \frac{1}{F}\left(1-\frac{F_m-F}{F}\right) = \frac{1}{F}\left(2-\frac{F_m}{F}\right)$. Durch Einsetzung dieses für F_0, F_1, F_2, ... angewendeten Ausdruckes ergiebt sich leicht

$$19.\quad F = \frac{1}{3n}\left[F_0+F_n+4\left(F_1+F_3+\ldots\right)+2\left(F_2+F_4+\ldots\right)\right].$$

Digitized by Google

Statt der Formel 18 würde sich hiernach ergeben:

$$20.\quad F = \frac{1}{3}\left(F_0 + 2F_1\right).$$

§. 54. Körper von constanter Festigkeit. Ist G das Gewicht des Körpertheiles AC (Fig. 10), so ist $P = \mathfrak{P} + G$, $N = \frac{\mathfrak{P}+G}{F}$. Damit der Körper in allen Querschnitten gleich leicht zerrissen oder zerdrückt werde, muss für jeden Querschnitt

$$K = \frac{\mathfrak{P}+G}{F},\quad FK = P + G$$

sein. Die Differenziation giebt

$$K\,dF = dG.$$

Nun aber ist offenbar $dG = F\,g\,dx$, mithin

$$K\,dF = F\,g\,dx,\qquad dx = \frac{K}{g}\frac{dF}{F},$$

$$x = \frac{K}{g}\int\frac{dF}{F} = \frac{K}{g}(\text{lognat}\,F + \text{Const}).$$

Für $x = o$ werde $F = F_0$, also $\text{Const} = -\text{lognat}\,F_0$; alsdann wird

$$21.\quad x = \frac{K}{g}\,\text{lognat}\,\frac{F}{F_0},$$

$$22.\quad F = F_0\,e^{\frac{xg}{K}}$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Da $e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \ldots$ ist, so ist

$$23.\quad F = F_0\left(1 + \frac{g}{K}x + \frac{g^2}{2K^2}x^2 + \ldots\right).$$

Anwendung bei Brückenpfeilern, Schachtgestängen u. s. w.

§. 55. Drähte. Bei den Drähten wird durch das Ziehen das Metall mehr auf der Oberfläche, als im Innern verdichtet, so dass sich auf der Oberfläche eine Kruste bildet, welche fester ist, als der Kern. Die Gasammtdicke sei $= \delta$, die Dicke der Kruste $= \delta$, der Gesammtquerschnitt $= F$, der Querschnitt des Kernes und der Kruste bezüglich $= F'$, F''. Ist ferner N', N'' die Spannung im Kern und in der Kruste, E', E'' der Elasticitätscoefficient für Kern und Kruste, so ist $\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{N_1'}{E'} = \frac{N''}{E''}$, $\mathfrak{P} = N'F' + N''F''$. Aus der ersten Gleichung folgt $N' : N'' = E' : E''$, daher nach der zweiten Gleichung

$$N' = \frac{E'\mathfrak{P}}{E'F' + E''F''},\quad N'' = \frac{E''\mathfrak{P}}{E'F' + E''F''}.$$

Da der Kern eine kleinere Festigkeit hat, als die Kruste, so ist die Festigkeitsbedingung $N' = K$. Denken wir den Festigkeitscoefficient im ganzen Querschnitte constant $= K$, so würde $\mathfrak{P} = K'F$ sein. Demnach wird

$$K = \frac{K'E'F}{E'F' + E''F''},\quad K' = K\frac{E'F' + E''F''}{E'F}.$$

Digitized by Google

Nun aber ist $F = \frac{\pi}{4}\partial^2$, $F' = \frac{\pi}{4}\left(\partial - \delta\right)^2$, $F'' = \frac{\pi}{4}\left[\partial^2 - (\partial - \delta)^2\right]$ $= \frac{\pi}{4}(2\partial - \delta)\delta$, mithin

$$24.\quad K' = \frac{E'\partial^2 + 2(E'' - E')\,\partial\delta + (E'' - E')\,\delta^2}{E'\partial^2}$$

oder, wenn wir δ^2 gegen $\partial\delta$ vernachlässigen und die Constante $2K\frac{E'' - E'}{E'}\delta = A$ setzen

$$25.\quad K' = K + \frac{A}{\partial}.$$

Es wird nun $\mathfrak{P} = K\frac{\pi}{4}\partial$, d. i.

$$26.\quad \mathfrak{P} = \frac{\pi}{4}\partial(K\partial + A),$$

$$27.\quad \partial = \frac{A}{K} + \sqrt{\frac{A^2}{K} + \frac{4\mathfrak{P}}{\pi K}}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe für K und A zusammengestellt:

Metall	nicht geglüht		geglüht	
	K	A	K	A
Argentan	5480	270	5480	44
Blei	170	0	—	—
Eisen, beste Drähte	5780	160	3000	38
„ gewöhnliche Drähte	4160	230	2600	64
„ Claviersaiten	5780	230	5090	64
Gold, fein	2260	64	1380	20
Kupfer	3400	95	2360	—
Messing, gewöhnliches	5480	100	2870	70
„ Claviersaiten	5030	70	3500	25
Platin	2840	120	2210	95
Silber, fein	2670	95	1640	20
„ 12löthig	4830	210	3250	100
Stahl	8000	270	7200	38
Zink	1350	22	—	—

§. 56. Festigkeit zweier sich drückender runder Körper.

Zwei Körper mit krummer Oberfläche mögen mit einer Kraft $\mathfrak{P}$ gegen einander gedrückt werden und sich dabei im Punkte C berühren. Bekanntlich stehen die beiden Normalebenen einer Fläche in einem beliebigen Punkte, für welche der Krümmungsradius ein Maximum und Minimum wird, auf einander senkrecht. Die beiden Körper mögen eine solche Lage haben, dass diese beiden Ebenen in beiden Körpern zusammenfallen. Die Krümmungsradien für dieselben seien in einem Körper r_1, r_2, im andern ϱ_1, ϱ_2. Ist r, ϱ der Krümmungsradius für eine Ebene OD

Digitized by Google

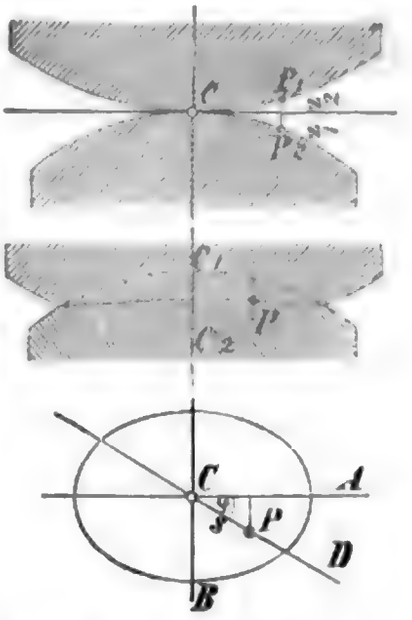
(Fig. 11). welche mit der ersten der beiden Ebenen den Winkel φ bildet, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

Ist z_1, z_2 der Abstand eines Punktes P_1, P_2 der Oberfläche jedes Körpers in der Ebene CD von der gemeinschaftlichen Berührungsebene, s der gemeinschaftliche Abstand dieser Punkte von der gemeinschaftlichen Normale beider Körper, so ist sehr nahe $\delta^2 = 2rz_1$, $s^2 = 2\varrho z_2$, also

$$z_1 = \frac{s^2}{2r}, \quad z_2 = \frac{s^2}{2\varrho}.$$

Fig. 11.



Nach der Zusammendrückung werden sich beide Körper in einer Fläche berühren. Die Zusammendrückung an den Punkten P_1, P_2 sei alsdann ν_1, ν_2 und der Normaldruck in diesen Punkten, welche jetzt zusammenfallen, N. Annähernd wird alsdann, wenn A_1, A_2 Erfahrungswerthe bedeuten,

$$\nu_1 = A_1 N, \quad \nu_2 = A_2 N$$

sein. Bezeichnet noch ν die Summe $C_1 C_2$ der Verrückungen beider Körper, so ist $\nu - (\nu_1 + \nu_2) = z_1 + z_2$, d. i.

$$\nu - (A_1 + A_2) N = \frac{s^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right).$$

Setzen wir zur Abkürzung $A_1 + A_2 = A$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right) = k$, so giebt die Reduction auf N

$$28. \quad N = \frac{\nu - k s^2}{A}.$$

Im Umfange der Berührungsfläche ist $\nu_1 = \nu_2 = 0$, also $N = 0$. Ist für einen Punkt im Umfange der Berührungsfläche $s = \sigma$, so ist $0 = \nu - k\sigma^2$, also

$$\nu = k\sigma^2.$$

Nach dem Obigen wird $\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\sin^2\varphi$, oder, wenn wir $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\varrho_1} = k_1$, $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\varrho_2} = k_2$ setzen, $k = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$, mithin

$$\nu = \sigma^2(k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi),$$

woraus leicht folgt: die Berührungsfläche ist eine Ellipse mit den Halbaxen

$$a = \sqrt{\frac{\nu}{k_1}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\nu}{k_2}}.$$

Die Summe aller Normaldrücke zwischen beiden Körpern ist gleich der wirksamen Kraft $\mathfrak{P}$. Demnach ist, da das Flächendifferenzial für die gewählten Polarcoordinaten $s\,d\varphi.ds$ ist,

Digitized by Google

$$\mathfrak{P} = \int_0^{2\pi}\int_0^{b} N\, s\, d\varphi\, ds = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{b} (\nu - k s^2)\, s\, d\varphi\, ds$$

$$= \frac{1}{2A}\int_0^{2\pi} (\nu - \frac{1}{2} k\sigma^2)\, \sigma^2 d\varphi = \frac{\nu}{2A}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sigma^2 d\varphi.$$

Das Integral aber ist offenbar der Flächeninhalt der elliptischen Berührungsfläche, d. i. $ab\pi = \frac{\nu\pi}{\sqrt{k_1 k_2}}$, mithin

$$29.\quad \mathfrak{P} = \frac{\pi\nu^2}{2A\sqrt{k_1 k_2}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{2A\mathfrak{P}}{\pi}\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Der grösste Normaldruck findet für $s = o$, d. i. im anfänglichen Berührungspunkte statt. Nach 28 ist derselbe $\frac{\nu}{A}$. Die Festigkeitsbedingung ist demnach $\frac{\nu}{A} = \mathfrak{K}$, d. i.

$$\mathfrak{K} = \sqrt{\frac{2\mathfrak{P}}{A\pi}\sqrt{k_1 k_2}},$$

$$\mathfrak{P} = \frac{A\pi\mathfrak{K}^2}{2\sqrt{k_1 k_2}}.$$

Bezeichnen wir die vom Materiale abhängige Constante $\frac{1}{2} A\pi\mathfrak{K}^2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)\pi\mathfrak{K}^2$ mit C und führen für k_1, k_2 wieder ihre Werthe ein, so wird

$$30.\quad \mathfrak{P} = \frac{C}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{\varrho_2}\right)}}.$$

Ist der eine Körper eine Kugel mit dem Radius r, welche eine ebene Fläche des andern berührt, so ist $r_1 = \varrho_1 = r$, $r_2 = \varrho_2 = \infty$ also

$$31.\quad \mathfrak{P} = \frac{1}{2} C\sqrt{2r}.$$

Berühren sich zwei Cylinder mit den Radien r und ϱ, deren Axen sich rechtwinklig kreuzen, so wird

$$32.\quad \mathfrak{P} = C\sqrt{r\varrho}.$$

Für zwei sich berührende Cylinder mit parallelen Axen gilt die Formel nicht mehr. Es ergiebt sich für diesen Fall in gleicher Weise, jedoch einfacher, weil sich die Betrachtungen in der Ebene, nämlich in einem Normalschnitte führen lassen,

$$33.\quad \mathfrak{P} = \frac{C_1 l}{\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}}}$$

Digitized by Google

wenn r, ϱ die beiden Krümmungsradien, l die Länge des kürzeren Cylinders, C_1 einen Erfahrungscoefficient bedeuten. Zwischen C und C_1 besteht die Beziehung

$$C_1^2 = C \frac{8\,\mathfrak{K}}{32\,\pi}.$$

Ist statt des einen Cylinders eine ebene Platte vorhanden, so wird

$$34. \quad \mathfrak{P} = C_1\, l \sqrt{r}.$$

Die Formel 32 findet z. B. Anwendung bei der Bestimmung der Beanspruchung von Eisenbahnschienen durch die Wagenräder, die Formel 34 bei den Walzenlagern eiserner Brücken u. s. w.

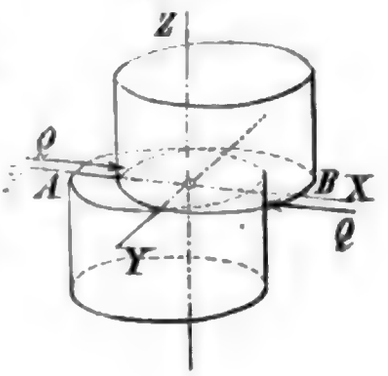
VII. Kapitel.

Schubelasticität.

§. 57. Bedingungen. Damit ein Körper nur auf Schubfestigkeit beansprucht werde, ist nöthig, dass auf ihn zwei Kräfte Q auf beiden Seiten einer durch denselben gelegten Ebene AB (Fig. 12) dicht neben dieser Ebene und parallel zu derselben nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Die Kräfte streben dann den Körper in dieser Ebene zu trennen.

Dieser Fall tritt besonders bei Nietverbindungen ein.

Fig. 12.



§. 58. Spannungen. In der Trennungsebene AB des Körpers entstehen offenbar Schubspannungen T in der Richtung der Kräfte Q. Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Trennungsfläche mit F, so ist $FT = Q$, also

$$35. \quad T = \frac{Q}{F}.$$

Wir legen die Axe der x und y in die Trennungsebene und zwar die Axe der x parallel zur Richtung der Kräfte Q. Normalspannungen in Richtung dieser Axen existiren nicht. Von den Schubspannungen existirt nur diejenige, welche in der Ebene der xy parallel zur Axe der x wirkt, und die dieser gleiche Schubspannung, welche in einer zur Ebene der yz parallelen Ebene parallel zur Axe der z wirkt. Daher ist in der allgemeinen Theorie $N_1 = N_2 = N_3 = 0$, $T_1 = T_2 = 0$, $T_3 = T$ zu setzen. Die Gleichung 17 §. 13 zur Bestimmung der Hauptspannungen geht daher über in:

$$H(H^2 - T^2) = 0.$$

Hieraus ergeben sich als Hauptspannungen

$$36. \quad A = +T = +\frac{Q}{F}, \quad B = -T = -\frac{Q}{F}$$

und $C = 0$; es existiren also zwei gleiche Hauptspannungen, von denen die eine ein Zug, die andere ein Druck ist.

Digitized by Google

Die Richtung der Hauptspannungen ist durch die Gleichungen 16 §. 13 zu bestimmen. Diese gehen über in $H\cos\beta = 0$, $H\cos\alpha = T\cos\gamma$; nach der ersteren ist $\cos\beta = 0$, $\beta = 90^0$, so dass die Hauptspannung in der Ebene der xz wirkt. Demnach ist $\gamma = 90^0 - \alpha$, $\cos\gamma = \sin\alpha$, also geht die zweite Gleichung über in $H\cos\alpha = T\sin\alpha$, $\tan\alpha = \frac{H}{T}$, d. i. weil $H = -T$ ist, $\tan\alpha = \pm 1$, also

$$37.\quad \alpha = \pm 45^0,$$

d. h. die beiden Hauptspannungen wirken in einer auf der Trennungsebene senkrechten und auf der Richtung der Kräfte Q parallelen Ebene unter einem Winkel von 45^0 gegen die Trennungsebene.

Das Spannungsellipsoid ist hier ein Kreiscylinder. (Taf. I. Fig. 7).

§. 59. Festigkeit. Die idealen Hauptspannungen sind nach §. 42 bei isotropen Körpern.

$$38.\quad S_1 = +\frac{m+1}{m}T, \qquad S_2 = -\frac{m+1}{m}T, \qquad S_3 = 0.$$

Demnach gehen die Festigkeitsbedingungen, wenn man nur einen Bruch durch Zerreissen annimmt, über in

$$39.\quad \frac{m+1}{m}\frac{Q}{F} = K.$$

Die Festigkeitsbedingung für Abschieben ist nach §. 42 $T = K_1$, also

$$40.\quad Q = F K_1.$$

Die Vergleichung beider Formeln giebt

$$41.\quad K_1 = \frac{m}{m+1}K.$$

Für $m = 3$ ergiebt sich $K_1 = \frac{3}{4}K = 0{,}75\,K$, für $m = 4$ aber $K_1 = \frac{4}{5}K = 0{,}80\,K$, so dass K zwischen 0,75 K und 0,80 K liegen müsste. Für Schmiedeeisen haben Versuche in der That ergeben, dass beim Bruche (oder für einfache Sicherheit) sehr nahe

$$42.\quad K_1 = 0{,}8\,K$$

ist. Für andere isotrope Materialien fehlt es noch an genügenden Versuchen. Für Holz sind die durch Schubversuche bestimmten Festigkeitscoefficienten für Schub in §. 43 zusammengestellt.

Digitized by Google

III. Abschnitt.

Biegungselasticität gerader Stäbe im Allgemeinen.

VIII. Kapitel.

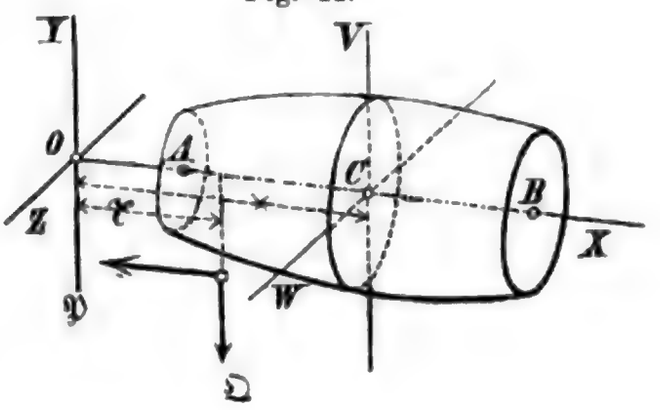
Bestimmung der Spannungen.

§. 60. Die äusseren Kräfte. Ein Körper wird nach §. 47 auf Biegungselasticität allein beansprucht, wenn nur eine Transversalkraft und ein Biegungsmoment, aber keine Axialkraft vorhanden ist. Wir wollen indessen in der allgemeinen Theorie voraussetzen, dass auch diese letztere vorhanden sei, so dass wir es eigentlich mit zusammengesetzter Normal- und Biegungselasticität zu thun haben.

Wir setzen voraus, dass alle äusseren Kräfte oder besser, dass die Resultanten der auf die einzelnen Scheiben (§. 45) wirkenden Kräfte in einer durch die Axe des Stabes gehenden Ebene, der Kraftebene, wirken.

Wir wählen die anfängliche Axe des Körpers als Axe der x und als Anfang der x einen beliebigen Punkt derselben. Die Axe der y legen wir in die Kraftebene, die der z also senkrecht zur Kraftebene (Fig. 13). In einem beliebigen Querschnitte (bei C) nehmen wir die bereits in §. 47 erwähnten Axen der v und w so an, dass die Axe der v in der Kraftebene liegt, die Axe der w also auf der Kraftebene senkrecht steht. A sei dasjenige Ende des Stabes, welches von C oder vom andern Ende aus nach der Richtung der x entgegengesetzten Richtung liegt (in den Figuren stets das linke Ende, während die x nach rechts gerechnet werden). Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Fig. 13.



$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die Componenten einer der äussern isolirten Kräfte, für deren Angriffspunkt $x = \xi$, $y = \eta$ ist, nach Richtung der x und y.

q eine über den Körper stetig vertheilte, in Richtung der y wirkende Kraft, pro Längeneinheit der Axe, im Punkte C (eine stetig vertheilte Last nach axialer Richtung setzen wir nicht voraus);

P die Axialkraft, d. i. die Summe der Componenten der auf den Körpertheil AC wirkenden äussern Kräfte nach Richtung der Tangente der deformirten Axe in C;

Digitized by Google

Q die Transversalkraft, d. i. die Summe der Componenten dieser Kräfte nach Richtung der Axe der v;

M das Biegungsmoment, d. i. die Summe der Momente dieser Kräfte in Beziehung auf die Axe der w.

Was das Vorzeichen anlangt, so betrachten wir als positiv diejenigen $\mathfrak{P}$, P, welche der Richtung der x entgegenwirken; ferner bei Belastungen durch Gewichte nach oben gerichtete y, v, nach unten gerichtete $\mathfrak{Q}$, Q, q und den Körpertheil AC nach unten drehende oder nach oben convex krümmende Momente M.

Vor der Formänderung ist alsdann

$$1. \quad \begin{cases} P = \Sigma \mathfrak{P}, \quad Q = \Sigma \mathfrak{Q} + \int q \, dx, \\ M = \Sigma \mathfrak{Q} (x - r) - \Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{y} + \int q (x - r) \, dr, \end{cases}$$

wobei die durch Σ und $\int$ angedeutete Summirung auf den ganzen Körpertheil AC zu erstrecken ist.

Wenn sich der Körper durch Wirkung der äusseren Kräfte deformirt, so nehmen P, Q, M allerdings etwas andere Werthe an; ja es kann sogar eine in Richtung der Axe der u wirkende Transversalkraft Q', ein Biegungsmoment M' in Beziehung auf die Axe der v und ein Torsionsmoment M'' entstehen. Wir setzen aber voraus, dass die Formänderung so klein sei, dass man die Werthe von P, Q, M nach der Formänderung eben so gross annehmen könne, als vor derselben und dass die erwähnten neuen Grössen Q', M', M'' zu vernachlässigen sind. Diejenigen Fälle, in welchen dies nicht zulässig ist, werden wir besonders behandeln.

§. 61. Beziehungen zwischen q, Q, M. Für einen Querschnitt mit der Abscisse $x + dx$ ist die Transversalkraft nach 1:

$$Q + dQ = \Sigma \mathfrak{Q} + \int q \, dx + q \, dx = Q + q \, dx,$$

demnach ist $dQ = q \, dx$ oder

$$2. \quad \frac{dQ}{dx} = q.$$

Ist ferner a der Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft aller auf den Theil AC wirkenden Verticalkräfte von C, so ist $M = Qa - \Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{y}$ und das Biegungsmoment für einen Querschnitt mit der Abscisse $x + dx$

$$M + dM = Q(a + dx) - \Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{y} + \tfrac{1}{2} q \, dx^2 = M + Q \, dx + \tfrac{1}{2} q \, dx^2.$$

Da $\frac{1}{2} q \, dx^2$ gegen $Q dx$ verschwindet, so ist $M + dM = M + Q \, dx$, $dM = Q dx$, also

$$3. \quad \frac{dM}{dx} = Q,$$

$$4. \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q.$$

Demnach ist der Differenzialquotient der Transversalkraft gleich der Last pro Längeneinheit und der Differenzialquotient des Biegungsmomentes gleich der Transversalkraft.

Aus 3 folgt, dass M für denjenigen Querschnitt zum Maximum wird, für welchen $Q = 0$ wird.

Sind nur isolirte Lasten vorhanden, so ist $q = 0$. Nach 4 wird daher, wenn a und b Constante bezeichnen,

$$Q = a, \quad M = ax + b.$$

Digitized by Google

Q ist also constant und M in Beziehung auf x linear. An jedem Querschnitte, in welchem eine isolirte Last wirkt, ändert sich natürlich der Ausdruck für Q und M.

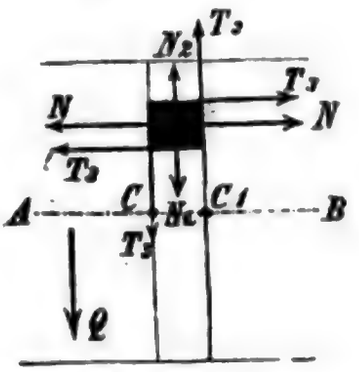
Ist ausser den isolirten Lasten eine stetig vertheilte constante Last q oder, wie wir uns in der Folge ausdrücken wollen, eine gleichmässig vertheilte Last q vorhanden, so wird nach 4:

$$Q = q\,x + a, \quad M = \tfrac{1}{2}\,q\,x^2 + a\,x + b.$$

Hier ist also in Beziehung auf x Q linear und M vom zweiten Grade. In der graphischen Darstellung würde Q durch eine Gerade, M durch eine Parabel repräsentirt.

§. 62. Spannungen. Von den Normalspannungen N_1, N_2, N_3 wirkt N_1 in der Richtung der Axe oder der Fasern des Körpers, wir nennen daher N_1 die Faserspannung. N_1 entsteht durch die Längenänderung der Fasern in Folge der Kraft P und der durch das Biegungsmoment erzeugten Krümmung des Stabes. Die Normalspannung N_2 aber entsteht durch direkte Zusammendrückung des Stabes in der Querrichtung durch die auf ihm ruhende Last. Es ist hiernach leicht einzusehen und wir werden es später genauer nachweisen, dass N_2 gegen N_1 nur klein sein kann. Da seitliche oder in Richtung der z wirkende äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so wird nahezu $N_2 = 0$ sein. Wir werden daher von den Normalspannungen nur die Faserspannung N_1 berücksichtigen und darum N für N_1 setzen.

Fig. 14.



Von den Schubspannungen wirken T_2, T_3 in der Ebene des Querschnittes parallel zu den Axen der u und v und in Ebenen, welche parallel den Ebenen der xy und xz sind, parallel zur Axe der x (Fig. 14). T_1 wirkt in den Ebenen, welche parallel zu den Ebenen der xz und xy sind, bezüglich parallel der Axe der z und y. Die letztere Schubspannung strebt den Körper in einer zur Ebene der xy parallelen Ebene zu trennen und die beiden Theile in Richtung der y über einander zu verschieben. Jedenfalls aber ist die Tendenz zu dieser Trennung nicht vorhanden oder doch so gering, dass wir auch T_1 vernachlässigen können.

Wir haben es daher nur mit den Spannungen

$$N, \quad T_3, \quad T_2$$

zu thun.

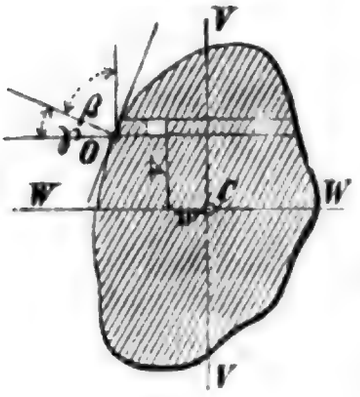
§. 63. Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte. Denken wir uns den Körper durch den Querschnitt C (Fig. 13) getrennt, so wirken auf das Stück AC am Querschnitte die Spannungen N, T_3, T_2 und an andern Stellen die Kräfte P, Q. Wenn der Körper seine Ruheform angenommen hat, so befinden sich diese Kräfte im Gleichgewichte. Die Gleichgewichtsbedingungen sind, wenn df das Flächendifferenzial du dv bedeutet (Fig. 15):

$$5. \quad \int N\,df = P, \quad \int T_3\,df = Q, \quad \int T_2\,df = 0,$$

$$6. \quad \int N\,v\,df = M, \quad \int N\,w\,df = 0,$$

Digitized by Google

Fig. 15.



wobei die Integration über die Ausdehnung des ganzen Querschnittes zu erstrecken ist.

Bezeichnen wir den Druck, welcher im beliebigen Punkte O der Oberfläche senkrecht zur Oberfläche stattfindet, mit R, die Richtungswinkel der Normale der Oberfläche in O mit α, β, γ und die in O wirksamen Spannungen mit N', T_3', T_2', so ist nach der ersten der Gleichungen 4 (§. 10):

$$R\cos\alpha = N'\cos\alpha + T_3'\cos\beta + T_2'\cos\gamma.$$

Aendert sich der Querschnitt nur sehr wenig mit x, so ist nahezu $\alpha = 90^0$, also nahezu $\cos\alpha = 0$, folglich

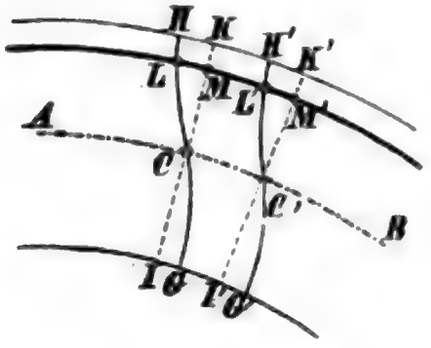
$$7.\quad T_3'\cos\beta = -T_2'\cos\gamma.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen 4 (§. 10) geben wegen der Vernächlässigung von N_2, N_3, T_1 Ungereimtes.

Früher vernachlässigte man die Schubspannungen T_3, T_2. Die zweite der Gleichungen 5, welche streng richtig ist, zeigt, dass T_3 existiren müsse und nach 7 muss dann auch T_2 existiren.

§. 64. Bestimmung der Faserspannung N. Zwei benachbarte Querschnitte (Fig. 16), welche anfänglich den Abstand dx haben, mögen nach der Formänderung in der Axe des Körpers den Abstand $CC' = dx + \Delta_0 dx$, im Punkte vw den Abstand $LL' = dx + \Delta dx$ haben, so dass $\frac{\Delta dx}{dx}$ die relative Längenänderung einer beliebigen Faser ist, welche durch den Punkt vw des Querschnittes geht.

Fig. 16.



Bei der Formänderung bleiben die Querschnitte im Allgemeinen nicht eben; sie mögen die Form GCH, G'C'H' annehmen. Es seien ferner IK, I'K' Ebenen, welche durch die Schwerpunkte C, C' der beiden Querschnitte gehen und auf der deformirten Axe AB senkrecht stehen. Wenn N, M' die Durchschnitte dieser Ebenen mit der fraglichen Faser sind, so ist

$$LL' = MM' + LM - L'M'.$$

Die Abstände LM, L'M' der Querschnitte von den Normalebenen sind, wie wir später noch genauer nachweisen werden, so wenig von einander verschieden, dass wir sie als gleich annehmen können. Daher ist sehr nahe

$$dx + \Delta dx = LL' = MM',$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \frac{MM'}{dx} - 1.$$

Die Faserspannung N ist daher

$$N = E\frac{\Delta dx}{dx} = E\left(\frac{MM'}{dx} - 1\right).$$

MM' ändert sich mit v und w; da MM' der Abstand zweier Ebenen

Digitized by Google

ist, so ist MM' in Beziehung auf u und v vom ersten Grade. Dasselbe gilt also auch von M. Wir können daher setzen:

$$8. \quad N = a + b\,v + c\,w,$$

wenn a, b, c noch näher zu bestimmende Constanten bedeuten. Die Substitution dieses Ausdruckes in die erste der Gleichungen 5 und in die Gleichungen 6 giebt

$$\begin{cases} a\int df + b\int v\,df + c\int w\,df = P, \\ a\int v\,df + b\int v^2 df + c'\int v\,w\,df = M, \\ a\int w\,df + b\int v\,w\,df + c\int w^2 df = 0. \end{cases}$$

Da die Axen der u und v durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen, so ist

$$\int v\,df = 0, \qquad \int w\,df = 0.$$

Das Integral $\int df$ ist die Gesammtfläche des Querschnittes, welche wir mit F bezeichnen. Die Integrale $\int v^2 df$, $\int w^2 df$ sind die Trägheitsmomente des Querschnittes in Beziehung auf die Axen der w und v, welche wir mit W, W' bezeichnen. Das Integral $\int v\,w\,df$ bezeichnen wir mit V. Sonach ist

$$9. \quad F = \int f\,df, \quad W = \int v^2 df, \quad W' = \int w^2 df, \quad V = \int v\,w\,df.$$

Die obigen Gleichungen gehen dadurch über in

$$\begin{cases} a\,F = P, \\ b\,W + c\,V = M, \\ b\,V + c\,W' = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich

$$10. \quad a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{W'M}{W\,W' - V^2}, \quad c = -\frac{V\,M}{W\,W' - V^2}$$

und folglich nach 8

$$11. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{M\,(W'v - V\,w)}{W\,W' - V^2}.$$

Hiernach besteht die Fasserspannung N aus zwei Theilen, von denen der eine der Axialkraft P, der andere dem Biegungsmomente M proportional ist.

§. 65. Allgemeine Eigenschaften der Grössen W, W', V.

Bevor wir in der Theorie der Spannungen weiter gehen, wird es nöthig, einige Eigenschaften der Querschnittsgrössen W, W', V zu entwickeln, wozu zunächst eine Transformation nöthig wird. Bezeichnen wir für ein Coordinatensystem v_1, w_1 mit demselben Centrum die Werthe von W, W', V mit W_1, W_1', V_1, so ist

$$W_1 = \int v_1^2\,df, \quad W_1' = \int w_1^2\,df, \quad V_1 = \int v_1\,w_1\,df.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Axen der v_1, w_1 mit den Axen der v, w bilden, mit α, so ist

$$\begin{aligned} v_1 &= v\cos\alpha - w\sin\alpha, \\ w_1 &= v\sin\alpha + w\cos\alpha, \end{aligned}$$

daher wird

$$\begin{aligned} W_1 &= \int (v^2\cos^2\alpha - v\,w\sin 2\alpha + w^2\sin^2\alpha)\,df, \\ W_1' &= \int (v^2\sin^2\alpha - v\,w\sin 2\alpha + w^2\cos^2\alpha)\,df, \\ V_1 &= \tfrac{1}{2}\int (v^2\sin 2\alpha + 2\,v\,w\cos 2\alpha - w^2\sin 2\alpha)\,df. \end{aligned}$$

Digitized by Google

d. i.

$$12. \quad \begin{cases} W_1 = W\cos^2\alpha - V\sin 2\alpha + W'\sin^2\alpha, \\ W_1' = W\sin^2\alpha + V\sin 2\alpha + W'\cos^2\alpha, \\ V_1 = \frac{1}{2}(W - W')\sin 2\alpha + V\cos 2\alpha. \end{cases}$$

Hauptaxen. Die Differenziation von W_1 nach α giebt

$$13. \quad \frac{dW_1}{dx} = (W' - W)\sin 2\alpha - 2V\cos 2\alpha$$

und hiernach wird W_1 zum Maximum oder Minimum, wenn $(W' - W)\sin 2\alpha = 2V\cos\alpha$ oder

$$14. \quad \tan 2\alpha = \frac{2V}{W' - W}$$

ist. Dieser Gleichung entsprechen zwei Werthe von α, welche um 90^0 von einander abweichen. Die nochmalige Differenziation giebt

$$\frac{d^2W_1}{d\alpha^2} = 2(W' - W)\cos 2\alpha + 4V\sin 2\alpha;$$

setzt man $90^0 + \alpha$ für α, so wird

$$\frac{d^2W_1}{d\alpha^2} = -2(W' - W)\cos 2\alpha - 4V\sin 2\alpha.$$

Die zweiten Differenzialquotienten, welche den beiden Werthen von α entsprechen, haben also entgegengesetzte Vorzeichen, dem einem Werthe von α entspricht also ein Maximum, dem anderen ein Minimum. Hieraus folgt:

Bei jedem Querschnitte existiren zwei auf einander senkrechte Schweraxen, für welche das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum wird.

Man nennt diese Axen die Hauptaxen des Querschnittes und die entsprechenden Trägheitsmomente die Hauptträgheitsmomente.

Aus 12 und 13 folgt:

$$15. \quad V_1 = -\frac{1}{2}\frac{dW_1}{d\alpha}.$$

Hiernach wird $V_1 = 0$, wenn W_1 zum Maximum oder Minimum wird, d. h. für die Hauptaxen des Querschnittes ist $V = 0$.

Umgekehrt folgt aus 15, dass W_1 zum Maximum oder Minimum wird, wenn $V = 0$ ist, d. h. Axen, für welche $V = 0$ ist, sind Hauptaxen. Ist eine der Axen der v und w Symmetrieaxe, so ist offenbar $V = 0$. Jede Symmetrieaxe ist also Hauptaxe.

Nehmen wir die Hauptaxen des Querschnittes als Axen der v und w an und bezeichnen die Hauptträgheitsmomente mit W_0, W_0', so ist nach 12:

$$16. \quad \begin{cases} W_1 = W_0\cos^2\alpha + W_0'\sin^2\alpha, \\ W_1' = W_0\sin^2\alpha + W_0'\cos^2\alpha, \\ V_1 = \frac{1}{2}(W_0 - W_0')\sin 2\alpha. \end{cases}$$

Die Addition der beiden ersten Gleichungen giebt $W_1 + W_1' = W_0 + W_0'$, die Summe der Trägheitsmomente für zwei auf einander senkrechte Axen ist also constant.

V wird zum Maximum, wenn $\sin 2\alpha = 1$, also $\alpha = 45^0$ oder 135^0 ist, d. h. V wird zum Maximum für zwei Axen, welche den Win-

Digitized by Google

kel zwischen den Hauptaxen halbiren. Das Maximum V_0 von V_1 ist:

$$17.\quad V_0 = \tfrac{1}{2}(W_0 - W_0').$$

Ist $W_0 = W_0'$, so wird für jede Lage der Axe $V_1 = 0$ und $W_1 = W_1'$, d. h. Sind die Hauptträgheitsmomente einander gleich, so ist für alle Lagen der Axe $V = 0$ und das Trägheitsmoment constant.

In dem Ausdrucke 11 für die Faserspannung kommt der Werth $WW' - V^2$ vor; aus 16 ergiebt sich $W_1 W_1' - V_1^2 = (W_0 \cos^2\alpha + W_0' \sin^2\alpha)(W_0 \sin^2\alpha + W_0' \cos^2\alpha) - (W_0 - W_0')\sin^2\alpha \cos^2\alpha$, d. i.

$$18.\quad W_1 W_1' - V_1^2 = W_0 W_0'.$$

Demnach ist $WW' - V^2$ für alle Lagen der Axen constant.

Ist für irgend eine Lage der Axe $W_1 = W_0$, so wird nach 16 $W_0 = W_0 \cos^2\alpha + W_0' \sin^2\alpha$, d. i. $W_0 \sin^2\alpha = W_0' \sin^2\alpha$, also $W_0 = W_0'$, mithin W_1 constant, d. h. Ist für zwei Axen, von denen nur die eine Hauptaxe ist, das Trägheitsmoment gleich gross, so ist dasselbe überhaupt für alle Axen gleich gross.

Hiernach würde das Trägheitsmoment bei allen Querschnitten, welche in Beziehung auf zwei beliebige recht- oder schiefwinklige Axen congruente Symmetrie besitzen, z. B. bei allen regelmässigen Vielecken, regelmässigen sternförmigen Figuren u. s. w. constant sein.

Graphische Darstellung. Auf allen durch das Centrum gehenden Axen tragen wir vom Centrum aus die reciproken Quadratwurzeln der diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente, also $\frac{1}{\sqrt{W_1}}$ auf und verbinden die so erhaltenen Punkte durch eine Curve. Bezeichnen wir die Coordinaten eines Punktes derselben in Beziehung auf die Hauptaxen mit x, y und setzen $\frac{1}{\sqrt{W_1}} = r$, $\frac{1}{\sqrt{W_0}} = m$, $\frac{1}{\sqrt{W_0'}} = n$, so ist nach 16, da $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ ist,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{m^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{1}{n^2}\frac{y^2}{r^2}$$

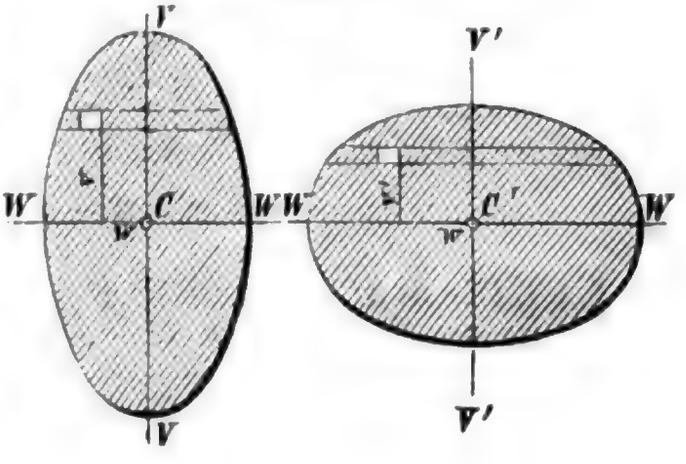
d. i.

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Diese Curve ist also eine Ellipse mit den Halbaxen m, n. Man nennt dieselbe Centralellipse oder Trägheitsellipse.

§. 66. Proportionale Querschnitte. Unter zwei proportionalen Querschnitten verstehen wir solche, bei welchen sowohl die Abscissen, als die Ordinaten entsprechender Punkte des Umfanges in beiden Querschnitten dasselbe Verhältniss haben, wobei jedoch das Verhältniss zwischen den Ordinaten ein anderes sein kann, als das zwischen den Abscissen (Fig. 17). So sind z. B. alle Rechtecke, alle gleichschenklige Dreiecke, alle Ellipsen etc. proportionale Querschnitte. Aehnliche Querschnitte sind zugleich proportional.

Fig. 17.



Bezeichnen wir die Abscissen und Ordinaten zweier proportionalen Querschnitte mit v, w und v_1, w_1, und die Breiten und Höhen oder irgend zwei entsprechende Dimensionen in Richtung der u und v mit b, h und b_1, h_1, so ist $v_1 = \frac{h_1}{h} v$, $w_1 = \frac{b_1}{b} w$, mithin

$$F = \int\int dv\, dw, \quad F_1 = \int\int dv_1\, dw_1 = \frac{b_1 h_1}{bh} \int\int dv\, dw,$$

$$W = \int\int v^2\, dv\, dw, \quad W_1 = \int\int v_1^2\, dv_1\, dw_1 = \frac{b_1 h_1^3}{b h^3} \int\int v^2\, dv\, dw,$$

mithin

$$19. \quad \frac{F_1}{F} = \frac{b_1 h_1}{b h}, \qquad \frac{W_1}{W} = \frac{b_1 h_1^3}{b h^3},$$

d. h. Bei proportionalen Querschnitten verhalten sich die Flächen, wie die Produkte aus Breite und Höhe und die Trägheitsmomente, wie die Produkte aus Breite und dritter Potenz der Höhe.

§. 67. Wahl der Hauptaxen als Axen der v, w. Jede äussere Kraft lässt sich in zwei Componenten zerlegen, welche in Richtung der Hauptaxen wirken. Ist α der Neigungswinkel der Kraftebene mit der einen Hauptaxe, die wir als Axe der v wählen, so erhält man die Componenten durch Multiplication der äusseren Kraft mit $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Ist daher wie früher, M das Moment der äusseren Kräfte in Beziehung auf die zur Kraftebene senkrechte Schweraxe des Querschnittes, so sind die Momente M_1, M_2 in Beziehung auf die Hauptaxen des Querschnittes

$$20. \quad M_1 = M\cos\alpha, \quad M_2 = M\sin\alpha.$$

Wie in §. 64 können wir $N = a + bv + cw$ setzen. Die Constanten a, b, c sind durch die Bedingungen zu bestimmen, dass die Summe der Spannungen in axialer Richtung $= P$ und die Summe der Momente der Spannungen in Beziehung auf die Axen der v, w $= M_1$, M_2 ist. Wie in §. 64 ergiebt sich, wenn man M_1 für M, M_2 für 0 setzt und beachtet, dass $\int v^2 df = W_0$, $\int w^2 df = W_0'$, $\int v\, w\, df = 0$ ist,

$$a = \frac{P}{F}, \quad b = \frac{M_1}{W_0} = \frac{M}{W_0}\cos\alpha, \quad c = \frac{M_2}{W_0'} = \frac{M}{W_0'}\sin\alpha,$$

also

$$21. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{W_0}\cos\alpha + \frac{Mw}{W_0'}\sin\alpha.$$

In den meisten Fällen der Praxis liegt eine Hauptaxe des Querschnittes in der Kraftebene. Alsdann ist $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, mithin, wenn wir das Trägheitsmoment für die andere, oder für die auf der Kraftebene senkrechte Schweraxe mit W bezeichnen,

$$22. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{W}$$

und wenn keine Axialkraft vorhanden ist, also für reine Biegungselasticität,

$$23. \quad N = \frac{Mv}{W}$$

§. 68. Die neutrale Axe. Nach dem vorigen §. ist $N = a + bv + cw$. Demnach ist die Gleichung der Linie, in welcher keine Faserspannung stattfindet,

Digitized by Google

$$a + b v + c w = 0.$$

Man nennt diese Gerade die neutrale Axe und die Fläche, welche die neutralen Axen aller Querschnitte enthält, die neutrale Schicht. Auf der einen Seite derselben finden positive, auf der andern negative Spannungen statt oder die Fasern werden auf der einen Seite der neutralen Axe ausgedehnt, auf der andern zusammengedrückt. In einer Geraden, welche der neutralen Axe parallel ist, ist die Spannung N constant; dieselbe ändert sich proportional der Entfernung von der neutralen Axe. Die grösste Faserspannung findet daher in den Punkten statt, in welchen der Querschnitt von zwei zur neutralen Axe parallelen Geraden berührt wird.

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die neutrale Axe mit der Axe der w bildet, mit φ und den Abstand derselben vom Schwerpunkte mit d, so ist die Gleichung der neutralen Axe $d - v\cos\varphi + w\sin\varphi = 0$. Die Vergleichung mit der Gleichung $a + b v + c w = 0$ giebt $\frac{\sin\varphi}{d} = \frac{c}{a}$, $\frac{\cos\varphi}{d} = -\frac{a}{b}$ und hieraus folgt $\tan\varphi = -\frac{c}{b}$, $d = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}}$, d. i. nach §. 67.

$$23\,a.\quad \tan\varphi = -\frac{M_2 W_0}{M_1 W_0'} = \frac{W_0}{W_0'}\tan\alpha,\quad d = \frac{P}{F\sqrt{\frac{M_1^2}{W_0^2} + \frac{M_2^2}{W_0'^2}}}$$

Ist $P = 0$, so wird $d = 0$, d. h. Wenn keine Axialkraft vorhanden, so geht die neutrale Axe durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Die Krümmungsebene einer Curve im Raume steht bekanntlich senkrecht auf der Durchschnittslinie zweier unendlich nahen Normalebenen. Nun aber ist die Durchschnittslinie zweier unendlich nahen Normalebenen der deformirten Axe eine von jenen parallelen Linien, in welchen der Abstand der Normalebene constant ist, zu denen auch die neutrale Axe gehört. Die Krümmungsebene der deformirten Axe steht demnach auf der neutralen Axe senkrecht.

Wenn die Axe des Stabes bei der Formänderung in der Kraftebene bleiben soll, oder, was dasselbe ist, wenn die Krümmungsebene der deformirten Axe mit der Kraftebene zusammenfallen soll, so muss die neutrale Axe auf der Kraftebene senkrecht stehen, oder es muss $\varphi = 0$ sein. Dies tritt nach 23 a. nur ein, wenn $\alpha = 0$ ist, d. h. Die Axe des Stabes bleibt bei der Formänderung nur in der Kraftebene, wenn eine Hauptaxe sämmtlicher Querschnitte in der Kraftebene liegt.

Wir nennen die Belastung bei dieser Lage der Kraftebene gerade Belastung; jede andere Belastung schiefe Belastung.

Bei gerader Belastung gelten für die Faserspannung N die Formeln 22, 23. Der Abstand der neutralen Axe vom Schwerpunkte wird nach 23a:

$$23\,b.\quad d = \frac{P W}{M F}.$$

In der Folge werden wir, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, stets voraussetzen, dass gerade Belastung vorhanden sei, weil gerade dieser Fall in der Praxis fast ausschliesslich vorkommt.

Die Gleichung der Trägheitsellipse ist $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$, daher $\frac{x\,dx}{m^2} = -\frac{y\,dx}{n^2}$

Digitized by Google

oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{n^2}{m^2}\frac{x}{y}$. Für den Punkt der Trägheitsellipse, in welchem derselbe von der Kraftebene geschnitten wird, ist $\frac{x}{y} = \tan\varphi$, also $\frac{dy}{dx} = -\frac{n^2}{m^2}\tan\varphi$ $= -\frac{W_0}{W_0'}\tan\alpha = \tan\varphi$. Die Tangente an die Trägheitsellipse im Durchschnittspunkte derselben mit der Kraftebene ist also der neutralen Axe parallel oder die neutrale Axe und die Durchschnittslinie des Querschnittes mit der Kraftebene sind conjugirte Durchmesser der Trägheitsellipse.

§. 69. Schubspannung in irgend einer zur Axe des Körpers parallelen Ebene. Die genaue allgemeine Bestimmung der Schubspannungen ist mit grossen Schwierigkeiten verknüpft. Die Bestimmung gelingt aber, wenn man die Annahme macht, dass die in einer Ebene ABB'A', welche durch eine Sehne AB (Fig. 18) des Querschnittes parallel zur Axe des Stabes gelegt wird, parallel zur Axe des Stabes wirkende Schubspannung in der ganzen Länge der Sehne AB constant ist. Unter gewissen Umständen, die wir noch näher bezeichnen werden, ist diese Annahme erlaubt.

Es bezeichne nun: T_3' die in der Ebene ABB'A' parallel zur Axe der x wirkende Schubspannung; b die Länge der Sehne AB.

Die Ebene ABB'A' schneidet von der zwischen zwei Querschnitten enthaltenen Scheibe von der Dicke dx ein Stück AEBA'E'B' ab, auf welches in Richtung der x folgende Kräfte wirken:

1. Die Summe der in der Fläche ABB'A' wirkenden Schubspannungen $= -T_3\, b\, dx$.

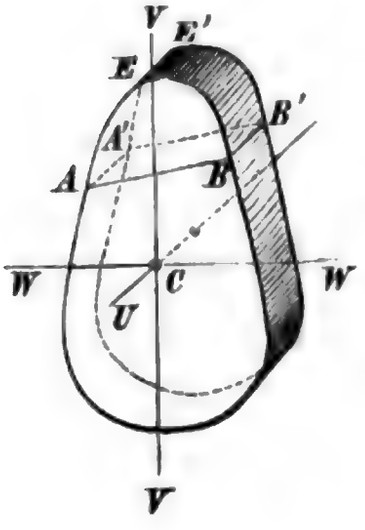
2. Auf die Fläche AEB wirkt die Kraft $\int N\, df$, wobei sich das Integral auf die Ausdehnung der Fläche AEB bezieht. Setzen wir für N den Ausdruck 22 (§. 67), so wird diese Kraft

$$\frac{P}{F}\int df + \frac{M}{W}\int v\, df = \frac{P\Theta}{F} + \frac{M\Omega}{W},$$

wenn wir den Flächeninhalt $\int df$ des Abschnittes AEB mit Θ und das statische Moment $\int v\, df$ desselben in Beziehung auf die Axe der u mit Ω bezeichnen. Die Resultante der auf die beiden Flächen AEB und A'E'B' wirkenden Kräfte, d. i. die Differenz dieser Kräfte ist

$$\frac{\partial\frac{P\Theta}{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial\frac{M\Omega}{W}}{\partial x}dx.$$

Fig. 18.



3. Es kann ausserdem noch eine Kraft auf die Masse des abgeschnittenen Stückes wirken. Die Kraft, welche auf die ganze Scheibe in Richtung der x wirkt, ist $-dP$ (—, wegen des in §. 60 angegebenen Vorzeichens von P). Setzen wir eine gleichmässige Vertheilung dieser Kraft über die ganze Scheibe voraus, so wirkt auf das abgeschnittene Stück die Kraft $-\frac{\Theta}{F}dP$.

Setzt man die Summe aller dieser Kräfte der Null gleich, so ergiebt sich

$$T_3'\, b = \frac{\partial\frac{P\Theta}{F}}{\partial x} + \frac{\partial\frac{M\Omega}{W}}{\partial x} - \frac{\Theta}{F}\frac{dP}{dx}.$$

Beachtet man, dass

Digitized by Google

$$\frac{\partial \frac{P\Theta}{F}}{\partial x} = \frac{\Theta\, dP}{F\, dx} + P\frac{\partial \frac{\Theta}{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{M\Omega}{W}}{\partial x} = \frac{\Omega}{W} Q + M\frac{\partial \frac{\Omega}{W}}{\partial x}$$

ist, so ergiebt sich

$$24. \quad T_3' b = \frac{Q\,\Omega}{W} + M\frac{\partial \frac{\Omega}{W}}{\partial x} + P\frac{\partial \frac{Q}{F}}{\partial x}.$$

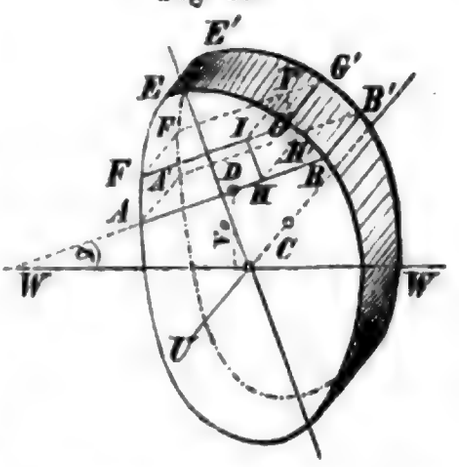
Wir setzen stets voraus, dass sich der Querschnitt mit x nur sehr wenig ändert, so dass F, W, Θ, Ω nahezu constant sind. Wir können daher die beiden letzten Glieder vernachlässigen und erhalten somit sehr einfach:

$$25. \quad T_3' = \frac{Q\,\Omega}{W\,b},$$

worin, um es nochmals zu bemerken, Ω das statische Moment des Abschnittes AEB in Beziehung auf die Axe der v und b die Länge der Sehne AB bedeutet.

§. 70. Fortsetzung. Wir bestimmen nun ferner die Schubspannung T_2', welche in einer zur Sehne AB senkrechten Ebene parallel zur Axe der x wirkt. Hierzu denken wir uns aus einer Scheibe durch eine zu ABB'A' parallele Ebene FGG'F (Fig. 19) und eine zu AB senkrechte Ebene HII'H' ein prismatisches Element HG' herausgeschnitten. Auf dasselbe wirken in Richtung der x folgende Kräfte:

Fig. 19.



1. Auf die Fläche HII'H' wirkt die Kraft $-T_2' d\nu\, dx$, wenn ν den Abstand der Sehne AB vom Schwerpunkte C, also $d\nu$ die Dicke HI des Elementes bezeichnet.

2. Auf die Fläche HBB'H' wirkt die Kraft $-T_3'(w-\omega)\, dx$, wenn w die Länge DB der halben Sehne, ω den Abstand DH des Punktes H von der Mitte D der Sehne bedeutet. Die Resultante der auf die Flächen HBB'I' und IGG'I' wirkenden Kräfte, d. i. die Differenz derselben, ist daher

$$\frac{\partial[T_2'(w-\omega)]}{\partial\nu} d\nu\, dx = \frac{Q}{2W} \frac{\partial[\frac{\Omega}{w}(w-\omega)]}{\partial\nu} d\nu\, dx$$

$$= \frac{Q}{2W}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} - \frac{\partial\frac{\Omega\omega}{w}}{\partial\nu}\right) d\nu\, dx.$$

Nun aber ist $-d\Omega$ das statische Moment des Streifens ABGF in Beziehung auf die Axe der w, d. i. $= 2 v_0 w\, d\nu$, wenn v_0 den Abstand der Sehnenmitte D von der Axe der w bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{\partial\frac{\Omega\omega}{w}}{\partial\nu} - \frac{\omega}{w}\frac{\partial\Omega}{\partial\nu} + \frac{\Omega\omega}{w^2}\frac{\partial w}{\partial\nu} = -2 v_0\omega + \frac{\Omega\omega}{w^2}\frac{\partial w}{\partial\nu},$$

daher ist die in Rede stehende Kraft $\frac{Q}{2W}\left[-2 v_0 w + 2 v_0\omega - \frac{\Omega\omega}{w^2}\frac{\partial w}{\partial\nu}\right]$,

oder, weil $\frac{Q\,\Omega}{2W w} = T_3'$ ist,

Digitized by Google

$$-\left[\frac{Q}{W} v_0 (w - \omega) - \frac{\omega}{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} T_3\right] d\nu\, dx.$$

3. Auf die Fläche HBGI wirkt die Kraft $d\nu \int_{\omega}^{w} N\, d\omega$. Bezeichnen wir den Winkel, welchen AB mit der Axe der w bildet, mit α, so ist nach 22 (§. 67) $N = \frac{P}{F} + \frac{Mv}{W} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}(v_0 + \omega \sin\alpha)$, mithin

$$d\nu \int_{\omega}^{w} N\, d\omega = \left(\frac{P}{F} + \frac{M v_0}{W}\right)(w - \omega) + \frac{M}{2W}(w^2 - \omega^2) \sin\alpha.$$

Demnach ergiebt sich als Resultante der auf die Flächen HBGI und H'B'G'I' wirkenden Kräfte, d. i. als Differenz dieser Kräfte, durch Differenziation nach x unter der Voraussetzung, dass sich der Querschnitt mit x nur wenig ändert und mit Beachtung von 3 (§. 61):

$$\left[\left(\frac{1}{F}\frac{dP}{dx} + \frac{Q v_0}{W}\right)(w - \omega) + \frac{Q}{2W}(w^2 - \omega^2) \sin\alpha\right] d\nu\, dx.$$

4. Als Kraft, welche auf die Masse des Elementes wirkt, ergiebt sich, wie im vorigen Paragraph, $-\frac{(w - \omega)\, d\nu}{F} dP$.

Setzt man die Summe dieser vier Kräfte der Null gleich, so heben sich mehrere Glieder und es ergiebt sich

$$26.\quad T_2' = T_3' \frac{\omega}{w} \frac{\partial w}{\partial \nu} + \frac{Q}{2W}(w^2 - \omega^2) \sin\alpha.$$

Aus 25 und 26 folgt, dass die Schubspannungen der Transversalkraft Q proportional sind.

§. 71. Schubspannungen für das ursprüngliche Coordinatensystem. Wenn die Sehne AB in §. 69 und 70 parallel zur Axe der w gelegt wird oder wenn $\alpha = 0$ ist, so wird nach 25 und 26, da jetzt T_3 für T_3', T_2 für T_2' und v, w für ν, ω zu setzen ist,

$$27.\quad T_3 = \frac{Q\Omega}{Wb},\quad T_2 = T_3 \frac{w}{b} \frac{\partial b}{\partial v},$$

und zwar unter der Annahme, dass T_3 für alle Punkte der Sehne AB gleich gross ist. Beim rechteckigen Querschnitte ist diese Annahme offenbar fast ganz richtig. Hier ist $\frac{\partial b}{\partial v} = 0$, also auch $T_2 = 0$. Aendert sich aber b mit v sehr schnell, oder ist $\frac{\partial b}{\partial v}$ sehr gross, so würde T_2 gegen T_3 sehr gross sein und für $\frac{\partial b}{\partial v} = \infty$ würde auch $T_2 = \infty$ werden, was aber unnatürlich ist. Es lässt sich daher erwarten, dass die gemachte Annahme um so richtiger ist, je weniger sich b mit v ändert oder je kleiner $\frac{\partial b}{\partial v}$ ist.

Für das grösste positive v verschwindet der Abschnitt AEB; hier ist also $\Omega = 0$, mithin $T_3 = 0$. Für das grösste negative v geht der Abschnitt AEB in den ganzen Querschnitt über; das statische Moment Ω desselben für die Axe der w ist aber ebenfalls Null, also ist auch hier $T_3 = 0$.

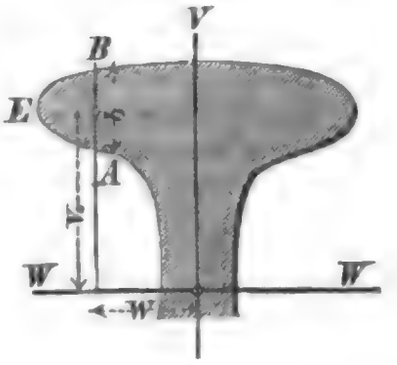
T_2 ist in der Mitte der Sehne AB Null und nimmt von hier aus nach den Enden der Sehne hin zu. An letzteren oder am Umfange des

Digitized by Google

Querschnittes ist $T_2 = \frac{1}{2} T_3 \frac{\partial b}{\partial v}$, was auch der Gleichgewichtsbedingung 7 (§. 63) entspricht.

§. 72. Fortsetzung. Manche Querschnitte haben seitliche Ansätze, deren Breite in Richtung der Axe der v sehr gering ist, wie der **I** und **T**förmige Querschnitt, der der Eisenbahnschienen u. s. w. Hier lässt sich annehmen, dass T_2 in einer zur Axe der v parallelen Sehne AB (Fig. 20) nahezu constant sein wird. In diesem Falle ist in Formel 25 und 26 $T_3' = T_2$, $T_2' = T_3$, $\sin\alpha = 1$, $\nu = w$ zu setzen. Demnach wird

Fig. 20.



$$T_2 = \frac{Q\Omega}{Wb}, \quad T_3 = T_2 \frac{\omega}{b} \frac{\partial b}{\partial w} + \frac{Q(w^2 - \omega^2)}{2W},$$

oder, weil $\omega = v - v_0$, $w = \frac{1}{2} b$ ist,

$$28. \quad T_2 = \frac{Q\Omega}{Wb}, \quad T_3 = T_2 \frac{v - v_0}{b} \frac{\partial b}{\partial w} + \frac{Q[b^2 - 4(v - v_0)^2]}{8W}.$$

Hier wird T_2 für das grösste positive und negative w gleich Null.

§. 73. Summe der Schubspannungen in einem Querschnitte. Von Wichtigkeit für die Folge ist es, die Summe der in Richtung der v auf einen Abschnitt AEB (Fig. 18) wirkenden Schubspannungen T_3 kennen zu lernen. Wir legen hierbei die Sehne AB der Axe der w parallel und bezeichnen die Summe der in AEB wirkenden T_3 mit ΣT_3. Die auf ein Flächenelement von der Breite dv wirkende Kraft ist $T_3 b\, dv$, d. i. nach 27 $= \frac{Q\Omega}{W} dv$, mithin ist

$$\Sigma T_3 = \frac{Q}{W} \int_v^{\max v} \Omega\, dv.$$

Bekanntlich aber ist $\int f(x)\, dx = x f(x) - \int x\, df(x)$, also

$$\int_a^b f(x)\, dx = b f(b) - a f(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} x\, df(x).$$

Setzen wir $x = v$, $f(x) = \Omega$, $a = v$, $b = \max v$, so wird, indem wir beachten, dass für $v = \max v$ $\Omega = 0$ wird, also $f(a) = \Omega$, $f(b) = 0$ ist,

$$\int_v^{\max v} \Omega\, dv = -v\Omega - \int_\Omega^0 v\, d\Omega.$$

Nun aber ist $d\Omega = -b\, v\, dv$ (vergl. §. 70), mithin

$$\int_v^{\max v} \Omega\, dv = -v\Omega + \int_v^{\max v} b\, v^2\, dv.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite ist das Trägheitsmoment des Flächenabschnittes AEB in Beziehung auf die Axe der w. Bezeichnen wir dasselbe mit $\mathfrak{W}$, so wird die rechte Seite $\mathfrak{W} - \Omega v$, mithin

$$29. \quad \Sigma T_3 = \frac{Q}{W} (\mathfrak{W} - \Omega v).$$

Digitized by Google

Handelt es sich um die Summe der im ganzen Querschnitte wirkenden Schubspannungen T_3, so ist $\Omega = 0$, $\mathfrak{W} = W$, mithin $\Sigma T_3 = Q$, was der zweiten der Gleichgewichts-Bedingungen 5 (§. 63) entspricht.

§. 74. Transversale Normalspannung N_2. Wir sind jetzt auch im Stande, die bisher vernachlässigte Normalspannung N_2, welche in Richtung der v wirkt, annähernd zu bestimmen, wenn wir auch hier die Annahme machen, dass N_2 in allen Punkten einer zur Axe der w parallelen Sehne AB (Fig. 18) gleich gross ist.

Wir schneiden von einer Scheibe durch eine zur Axe des Stabes parallele Ebene ein Stück AEBA'E'B' weg. Auf dasselbe wirken in Richtung der v folgende Kräfte:

1. Auf die Fläche ABB'A' wirkt die Kraft $- N_2 b\, dx$.
2. Auf die Fläche AEB wirkt die im vorigen Paragraph mit ΣT_3 bezeichnete Kraft, negativ genommen. Daher ist die Resultante der auf die Flächen AEB und A'E'B' wirkenden Kräfte, d. i. die Differenz dieser Kräfte, $\frac{\partial \Sigma T_3}{\partial x} dx$, d. i. nach 29 unter der Annahme, dass sich die Querschnitte mit x nur wenig ändern,

$$\frac{q}{W}(\mathfrak{W} - \Omega v),$$

weil nach 4 (§. 61) $dQ = q\, dx$ ist.

3. Auf die in der Oberfläche des Körpers liegende Fläche AA'E'B'AE und auf die Masse des abgeschnittenen Stückes wirkt ein Theil der über die Länge des Stabes stetig vertheilten Last q. Ist derselbe pro Längeneinheit der Axe des Stabes q', so ist die fragliche Kraft $- q'\, dx$.

Setzen wir die Summe dieser Kräfte der Null gleich, so ergiebt sich

$$30.\quad N_2 = -\frac{q'}{b} + \frac{q(\mathfrak{W} - \Omega v)}{W b}.$$

Wirkt z. B. nur das Eigengewicht, so ist q'dx das Gewicht des abgeschnittenen Stückes, d. i., wenn wir den Flächeninhalt des Abschnittes AEB mit Θ und das Gewicht der Volumeneinheit mit g bezeichnen, $= \Theta g\, dx$. Ebenso ist $q = Fg$, mithin

$$31.\quad N_2 = \frac{g}{b}\left[F\frac{(\mathfrak{W} - \Omega v)}{W} - \Theta\right].$$

§. 75. Verhältniss der Spannungen. Wir bezeichnen eine äussere Kraft mit R, die Grösse, welche durch Division einer äusseren Kraft durch die Querschnittsfläche F entsteht oder eine von dieser Grösse wenig abweichende Grösse mit A mit beliebigem Index und eine Breiten-, Höhen- und Längendimension des Stabes bezüglich mit b, h, l.

In den Formeln 22, 27, 30 für N, T_3, T_2, N_2 können wir v proportional dem h, F proportional dem bh, Ω proportional dem $Fh = bh^2$, W und $\mathfrak{W}$ proportional dem $Fh^2 = bh^3$, M proportional dem Rl und q, q' proportional dem $\frac{R}{l}$ annehmen. Hieraus ergiebt sich leicht, dass die Ausdrücke für N, T_3, T_2, N_2 dargestellt werden können durch

$$N = A + A_1\frac{l}{h},\quad T_3, T_2 = A_2,\quad N_2 = A_3\frac{h}{l}.$$

In der Regel sind die Querschnittsdimensionen b, h gegen die Länge l nur klein. Demnach ist in N das erste Glied gegen das zweite nur klein.

Digitized by Google

Ist eine Axialkraft nicht vorhanden, so ist $A = 0$ und es verhält sich alsdann

$$N : T_3, T_2 : N_2 = A_1 : A_2 \frac{h}{l} : A_3 \left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

woraus folgt, dass die Schubspannungen T_3, T_2 gegen die Fasserspannung N nur klein, die transversale Normalspannung N_2 aber gegen die Fasserspannung N sehr klein ist, wodurch sich die Vernachlässigung von N_2 rechtfertigt. Man wird aber auch meist T_3, T_2 vernachlässigen können.

Dies gilt freilich nur so lange, als die Breitendimensionen der Querschnitte nahe gleich sind. Kommt aber eine sehr kleine Breite b_1 vor, so ergiebt sich, wenn wir in den Ausdrücken für T_3, T_2, N_2 b_1 für b setzen, dass N, T_3, T_2, N_2 dargestellt werden können durch

$$N = A + A_1 \frac{l}{h}, \quad T_3, T_2 = A_2 \frac{b}{b_1}, \quad N_2 = A_3 \frac{h}{l} \frac{b}{b_1}.$$

Für $A = 0$ verhält sich

$$N : T_3, T_2 : N_2 = A_1 : A_2 \frac{h\,b}{l\,b_1} : A_3 \frac{h^2 b}{l^2 b_1}.$$

Da h gegen l und der Voraussetzung zufolge b_1 gegen b klein ist, so wird T_3, T_2 nicht mehr klein gegen N, aber N_2 immer noch klein gegen N sein. Hier wird man allenfalls N_2, nicht aber T_3, T_2 vernachlässigen können.

In extremen Fällen können allerdings Abweichungen eintreten. So wird z. B. in der Nähe des Querschnittes, für welchen $Q = 0$ ist, T_3, T_2 stets gegen N sehr klein. In der Nähe des Querschnittes, für welchen $M = 0$ ist, ist dagegen stets T_3, T_2 gross gegen N u. s. f.

§. 76. Hauptspannungen. Da wir voraussetzen, dass $N_2 = 0$, $N_3 = 0$, $T_1 = 0$ ist, so geht die Gleichung 17 a (§. 13) zur Bestimmung der Hauptspannungen über in

$$32. \quad H[H^2 - NH - (T_2^2 + T_3^2)] = 0.$$

Die Hauptspannungen sind demnach

$$33. \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}N + \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ B = \frac{1}{2}N - \sqrt{\frac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2} \end{cases}$$

und $C = 0$. Wir haben es hier also mit dem in §. 17 erörterten Falle zu thun, wo eine Hauptspannung Null ist. Hiernach ist stets A positiv, B negativ, welches Vorzeichen auch N haben mag. Es existirt also stets ein Hauptzug und ein Hauptdruck.

Die Gleichungen 16 (§. 13) gehen über in

$$\begin{cases} (N - H)\cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma = 0, \\ T_3\cos\alpha - H\cos\beta = 0, \quad T_2\cos\alpha - H\cos\gamma = 0 \end{cases}$$

und hieraus ergiebt sich leicht

$$34. \quad \tan\alpha = \frac{\sqrt{T_2^2 + T_3^2}}{H}, \quad \tan\beta = \frac{\sqrt{H^2 + T_2^2}}{T_2}, \quad \tan\gamma = \frac{\sqrt{H^2 + T_3^2}}{T_3}.$$

wodurch die Richtungen der Hauptspannungen bestimmt sind.

Sehr häufig lässt sich T_2 gegen T_3 vernachlässigen, nämlich in dem Falle, wo die Breite des Querschnittes nahe constant ist. In diesem Falle wird einfacher

$$35.\quad \tan\alpha = \cos\beta = \frac{T_3}{H},\quad \gamma = 90^0,$$

so dass die beiden Hauptspannungen in einer zur Kraftebene parallelen Ebene wirken.

In der Axe der w oder für v = 0 wird, wenn die Axialkraft P nicht vorhanden ist, N = 0, mithin

$$H = \pm\sqrt{T_2^2 + T_3^2},$$

$$\alpha = 45^0,\quad \tan\beta = \sqrt{2 + \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^2},\quad \tan\gamma = \sqrt{2 + \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^2}.$$

Für das grösste positive und negative v dagegen wird $T_2 = T_3 = 0$, also

$$H = N,\quad \alpha = 0,\quad \beta = \gamma = 90^0,$$

so dass hier nur eine Hauptspannung existirt, welche die Fasserspannung N selbst ist.

§. 77. Hauptschubspannungen. Die Hauptschubspannungen sind nach 31 (§. 16)

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}B,\quad \mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}A,\quad \mathfrak{C} = \tfrac{1}{2}(A - B),$$

d. i., wenn man für A, B die obigen Ausdrücke setzt,

$$36.\quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{B}\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{4}N \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2},$$
$$\mathfrak{C} = \sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Man ersieht hieraus leicht, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, absolut genommen, stets kleiner, als $\frac{1}{2}\mathfrak{C}$ sind. $\mathfrak{C}$ ist demnach das wirkliche Maximum der Schubspannungen. Bezeichnen wir dasselbe mit $\mathfrak{H}$, so wird

$$37.\quad \mathfrak{H} = \sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Nach 33 ergiebt sich

$$38.\quad A = -\tfrac{1}{2}N + \mathfrak{H},\quad B = -\tfrac{1}{2}N - \mathfrak{H},$$

wobei stets $\mathfrak{H} > \frac{1}{2}N$ ist. Ist N positiv, so wird $A < \mathfrak{H}$, $B > -\mathfrak{H}$; ist N negativ, so wird $A > \mathfrak{H}$, $B < -\mathfrak{H}$. Demnach ist stets $\mathfrak{H}$ kleiner als die eine und grösser als die andere der Hauptspannungen.

IX. Kapitel.

Formänderung des Stabes.

§. 78. Formänderung der Axe. Wir bestimmen zunächst die Gestalt der Axe des Stabes nach der Formänderung oder der sogenannten elastischen Linie, und zwar zuerst unter der Voraussetzung, dass alle Punkte der Axe bei der Formänderung in der Kraftebene verbleiben (siehe §. 68). Wir bezeichnen hierzu (Fig. 21) mit

ξ, η die Verrückung eines beliebigen Punktes C der Axe, dessen Abscisse x ist, nach den den x und y entgegengesetzten Richtungen (also η nach unten als positiv);

ϱ den Krümmungsradius MC der deformirten Axe in C, wobei wir ϱ

Digitized by Google

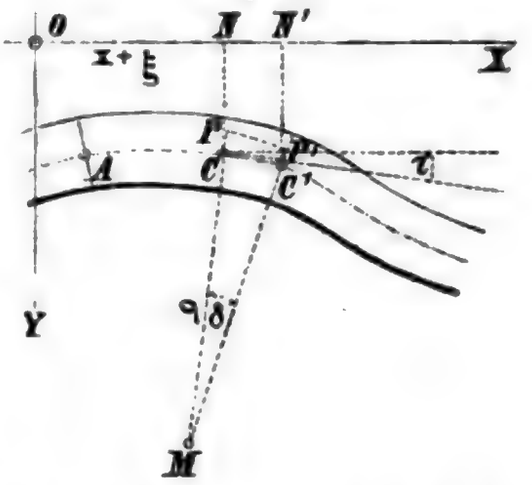
als positiv nehmen, wenn ϱ von M aus die Richtung der positiven Seite der Axe der v hat;

τ den Winkel, welchen die Tangente an die deformirte Axe in C mit der Axe der x bildet;

$d\tau$ den Winkel, welchen zwei Normalebenen der deformirten Axe in C und C', welche anfangs den Abstand dx hatten, mit einander bilden;

σ die absolute Längenänderung der Axe des Stabes von einem beliebigen festen Punkte A aus bis C.

Fig. 21.



Ist PP' der Abstand der Normalebenen in der Entfernung v von der Axe der w, so ist $PP' = CC' + v\,d\tau$; aber $CC' = AC' - AC = (s + \sigma + dx + d\sigma) - (s - \sigma) = dx + d\sigma$ also $PP' = dx + d\sigma + v\,d\tau$. Die relative Aenderung des Abstandes der Normalebenen ist demnach $\frac{d\sigma}{dx} + \frac{d\tau}{dx} v$ und mithin die Faserspannung N:

$$N = E\frac{d\sigma}{dx} + E\frac{d\tau}{dx} v.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem entsprechenden Ausdrucke 22 (§. 68) giebt die Beziehungen:

$$39. \quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{EF}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{M}{EW}.$$

Das Weitere lässt sich entweder genau oder nur angenähert durchführen.

§. 79. Näherungsbestimmung. Da wir nur sehr kleine Verrückungen voraussetzen, so ist der Winkel τ sehr klein. Sind N, N' (Fig. 21), die Projectionen von C, C' auf die Axe der x, so ist demnach sehr nahe $CC' = NN'$, oder, weil $CC' = dx + d\sigma$, $NN' = ON' - ON = (x + dx + \xi + d\xi) - (x + \xi) = dx + d\xi$ ist, $d\sigma = d\xi$, mithin nach 39:

$$40. \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{P}{EF}, \quad \xi = \frac{1}{E}\int\frac{P}{F}dx.$$

Ferner ist $\tau = \frac{N'P' - NP}{NN'} = \frac{d\eta}{dx + d\xi}$, d. i. sehr nahe $\tau = \frac{d\eta}{dx}$, also $\frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2\eta}{dx^2}$, mithin nach 39:

$$41. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EW},$$

$$42. \quad \begin{cases} \tan\tau = \frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{E}\int\frac{M}{W}dx, \\ \eta = \frac{1}{E}\int\int\frac{M}{W}dx^2. \end{cases}$$

Das letzte Doppelintegral lässt sich leicht in zwei einfache zerlegen. Bekanntlich ist $\int f(x)dx = x\,f(x) - \int x\,df(x)$, mithin

Digitized by Google

$$43.\quad \eta = \int \frac{d\eta}{dx}\,dx = x\,\frac{d\eta}{dx} - \int x\,\frac{d^2\eta}{dx^2}\,dx$$

oder

$$44.\quad \eta = \frac{x}{E}\int \frac{M}{W}\,dx - \frac{1}{E}\int \frac{Mx}{W}\,dx.$$

Für die Bestimmung des Krümmungsradius ϱ hat man: $CC' = \varrho\,d\tau$, d. i. $dx + d\xi = \varrho\,d\tau$ oder sehr nahe $dx = \varrho\,d\tau$, $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{dx}$, d. i.

$$45.\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\,W}.$$

An einem Punkte, für welchen $M = 0$ ist, wird $\varrho = \infty$. An diesem Punkte wechselt M, also auch ϱ das Vorzeichen, es ist dieser Punkt also ein sogenannter Wende- oder Inflexionspunkt der elastischen Linie.

In derselben Weise wie in §. 75 ergiebt sich, dass sich $\frac{d\xi}{dx} = \frac{A}{E}$, $\xi = \frac{A\,l}{E}$, ferner $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{A_1\,l}{E\,h^2}$, $\eta = \frac{A_1\,l^3}{E\,h^2}$ setzen lässt, so dass sich

$$\xi : \eta = A : A_1 \left(\frac{l}{h}\right)^2$$

verhält, woraus folgt, dass ξ gegen η sehr klein ist.

Wenn der Querschnitt des Stabes, also auch W constant ist, so giebt die Differenziation von 41 mit Rücksicht auf 4 (§. 61) die Gleichungen:

$$46.\quad \frac{d^3\eta}{dx^3} = \frac{Q}{E\,W},\quad \frac{d^4\eta}{dx^4} = \frac{q}{E\,W}.$$

§. 80. Genauere Bestimmung der Formänderung. Es ist $NN'^2 + (N'C' - NC)^2 = CC'^2$ d. i.

$$a.\quad (dx + d\xi)^2 + d\eta^2 = (dx + d\sigma)^2.$$

Ferner ist

$$\tan\tau = \frac{d\eta}{dx + d\xi},\quad \tau = \operatorname{Arctan}\frac{d\eta}{dx + d\xi},$$

d. i., mit Berücksichtigung von a:

$$\tau = \operatorname{Arctan}\frac{d\eta}{\sqrt{(dx + d\sigma)^2 - d\eta^2}}.$$

Mit Berücksichtigung der Differenzialformel $d\operatorname{Arctan} x = \frac{dx}{1 + x^2}$ ergiebt sich

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\frac{d^2\eta}{dx^2}\left(1 + \frac{d\sigma}{dx}\right) - \frac{d\eta}{dx}\,\frac{d^2\sigma}{dx^2}}{\left(1 + \frac{d\sigma}{dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{d\sigma}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}}.$$

Reducirt man auf $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ und setzt für $\frac{d\sigma}{dx}$ und $\frac{d\tau}{dx}$ die Ausdrücke 39, so ergiebt sich als Differenzialgleichung für η:

Digitized by Google

$$47.\quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EW}\sqrt{\left(1+\frac{P}{EF}\right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2} + \frac{d\eta}{dx}\frac{d\frac{P}{F}}{E\left(1+\frac{P}{EF}\right)dx}$$

Ist η bestimmt, so folgt ξ aus der Gleichung a, nämlich

$$48.\quad \frac{d\xi}{dx} = -1 + \sqrt{\left(1+\frac{P}{EF}\right)^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}.$$

An die Integration der Gleichung 47 in endlicher Form ist in den meisten Fällen nicht zu denken, so dass man dieselbe durch unendliche Reihen bewerkstelligen muss.

Ist eine Axialkraft P nicht vorhanden, so wird einfacher

$$49.\quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{EW}\sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2},$$

und $\frac{d\xi}{dx} = -1 + \sqrt{1-\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}$, d. i. sehr nahe

$$50.\quad \frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2.$$

Wir werden in der Folge nur die im vorigen §. entwickelten Näherungsformeln benutzen, welche für die Praxis stets genügen.

§. 81. Formänderung der Querschnitte: *a*) Wir bezeichnen die Verrückungen eines Punktes vw irgend eines Querschnittes nach Richtung der Axen der v und w mit ν und ω. Die Verrückung des Schwerpunktes des Querschnittes nach Richtung der y ist η, mithin sind die Verrückungen η', ζ' des Punktes vw nach Richtung der y, z: $\eta' = -\eta + \nu$, $\zeta' = \omega$. Nach den Gleichungen 49 (§. 27) wird, wenn wir $N_2 = N_3 = 0$, $N_1 = N$ setzen, $\frac{d\eta'}{dv} = -\frac{N}{Em}$, $\frac{d\zeta'}{dw} = -\frac{N}{Em}$, d. i.

$$\frac{d\nu}{dv} = -\frac{N}{Em}, \quad \frac{d\omega}{dw} = -\frac{N}{Em}.$$

Die Integration giebt, wenn man berücksichtigt, dass für $v = 0$ $\nu = 0$ und für $w = v$ $\omega = 0$ wird,

$$51.\quad \nu = -\frac{N}{Em}v, \qquad \omega = -\frac{N}{Em}w.$$

Setzen wir für den Fall, dass keine Axialkraft P vorhanden ist, für N den Ausdruck 23 (§. 68), so ergiebt sich

$$52.\quad \nu = -\frac{M}{mEW}v^2, \qquad w = -\frac{M}{MEW}vw.$$

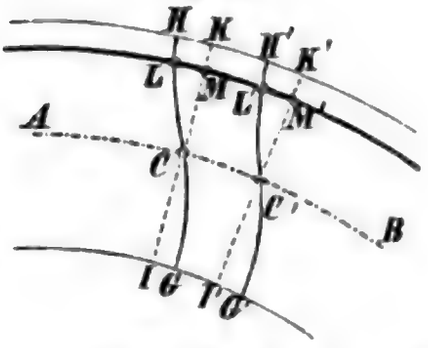
Wie in §. 75 ergiebt sich leicht, dass sich ν, $\omega : \eta = A : A_1 m \frac{l^2}{h^2}$ verhält, so dass ν, ω gegen η sehr klein sind.

b) Für die Gleitungen wird nach 58 (§. 29), wenn wir ξ', η', ζ' für ξ, η, ζ; v, w für y, z setzen, und beachten, dass $\eta' = -\eta + \nu$, $\zeta' = \omega$ ist,

$$\frac{d\xi'}{dv} + \frac{d\nu}{dx} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{T_3}{G}, \qquad \frac{d\omega}{dx} + \frac{d\xi'}{dw} = \frac{T_2}{G},$$

Digitized by Google

Fig. 22.



Bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes v w des Querschnittes von der Normalebene der deformirten Axe des Stabes mit δ, so ist nahezu $\xi' = v \tan\tau + \delta = v\frac{d\eta}{dx} + \delta$, also $\frac{\partial\xi'}{\partial v} = \frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial\delta}{\partial v}$, $\frac{\partial\xi'}{\partial w} = \frac{\partial\delta}{\partial w}$, mithin

$$\frac{\partial\delta}{\partial v} + \frac{\partial\nu}{\partial x} = \frac{T_1}{G}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial w} + \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{T_2}{G}.$$

Setzt man für ν, ω die Ausdrücke 52, so ergiebt sich unter der Annahme, dass sich die Querschnitte mit x nur wenig ändern, mit Rücksicht auf die Ausdrücke 27 (§. 71) für T_1, T_2

$$53. \quad \begin{cases} \frac{d\delta}{dv} = \frac{T_1}{G} + \frac{Q\,v^2}{m\,E\,W} = \frac{Q}{G\,W}\left[\frac{\Omega}{b} + \frac{v^2}{2(m+1)}\right], \\ \frac{d\delta}{dw} = \frac{T_2}{G} + \frac{Q\,v\,w}{m\,E\,W} = \frac{Q\,w}{G\,W}\left[\frac{\Omega\,db}{b^2 dv} + \frac{v}{2(m+1)}\right], \end{cases}$$

worin nach 54 (§. 28) $mE = 2(m+1)G$ gesetzt ist. Die Integration der ersten Gleichung giebt für $w = 0$, wenn man beachtet, dass für $v = 0$ auch $\delta = 0$ werden muss,

$$\delta = \frac{Q}{G\,W}\left[\int_0^v \frac{\Omega}{b}\,dv + \frac{v^3}{6(m+1)}\right].$$

Die Integration der zweiten Gleichung giebt nun, wenn man gleichzeitig beachtet, dass für $w = 0$ δ den eben erhaltenen Werth annehmen muss,

$$54. \quad \delta = \frac{Q}{G\,W}\left[\int_0^v \frac{\Omega}{b}dv + \frac{v^3}{6(m+1)} + \frac{w^2}{2}\left(\frac{\Omega\,db}{b^3\,dv} + \frac{v}{2(m+1)}\right)\right].$$

Es lässt sich wie in §. 75 leicht nachweisen, dass sich $\sigma : \eta = A : A_1\frac{l^3}{h^3}$ verhält, so dass δ gegen η äusserst klein ist. Es lässt sich in gleicher Weise ferner zeigen, dass sich $\frac{d\delta}{dx} : \frac{\Delta dx}{dx} = A : A_1\frac{l^2}{h^2}$ verhält, worin $\frac{\Delta dx}{dx}$ die relative Aenderung der Entfernung zweier benachbarter Querschnitte bedeutet, (siehe §. 64), so dass $\frac{d\delta}{dx}$ gegen $\frac{\Delta dx}{dx}$ sehr klein ist, wodurch sich die Vernachlässigung von δ bei der Bestimmung der Faserspannung (§. 64) rechtfertigt.

Wirkt auf die Mantelfläche des Stabes keine Kraft oder wirkt dieselbe senkrecht zur Oberfläche, so findet an der Mantelfläche in einer zu derselben parallelen Ebene keine Schubspannung statt; eine auf der Mantelfläche senkrechte Gerade wird also nicht gleiten. Bei einem prismatischen Stabe werden demnach die Querschnitte nach wie vor der Formänderung die Mantelfläche unter rechtem Winkel schneiden.

Gewöhnlich legt man der Biegungstheorie ohne Weiteres die Annahme zu Grunde: Erfahrungsgemäss bleiben die Querschnitte eben und auf

Digitized by Google

der Axe des Stabes senkrecht, während man diesem widersprechend nachträglich die Schubspannungen bestimmt. Denn wäre dieser Satz richtig, so würden keine Gleitungen, also auch keine Schubspannungen entstehen; ohne diese aber könnte ein Körpertheil mit der Transversalkraft Q unmöglich im Gleichgewichte sein.

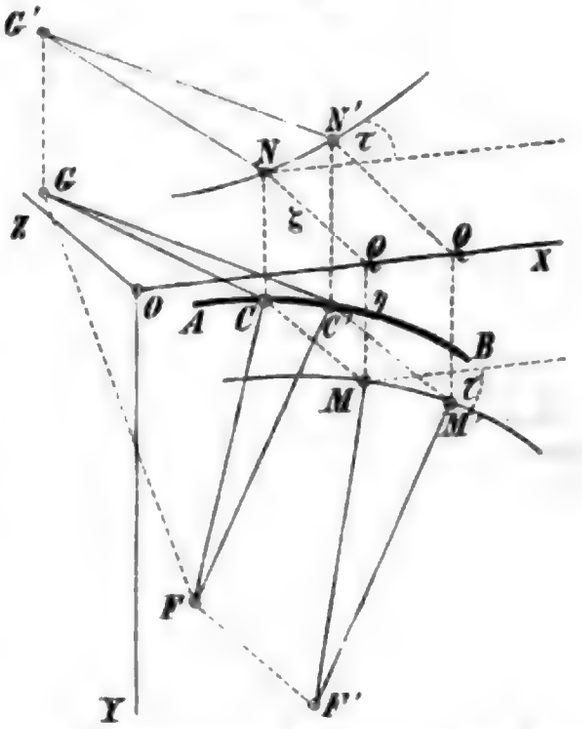
§. 82. Formänderung der Axe bei schiefer Belastung.

Wir setzen jetzt voraus, dass die Hauptaxen der Querschnitte nicht in der Kraftebene liegen, so dass die Axe bei der Formänderung aus der Kraftebene heraustritt.

Es seien CF, CG und C′F, C′G Gerade, welche in den Normalebenen der deformirten Axe in den unendlich nahen Punkten C und C′ liegen und bezüglich den Ebenen der xy und xz parallel sind; F, G seien die Durchschnitte dieser Geraden, also FG die Durchschnittslinie der Normalebenen. M, M′, F′ seien die Projectionen von C, C′, F auf die Ebene der xy und N, N′, G′ die Projectionen von C, C′, G auf die Ebene der xz.

Da CF auf der Tangente der deformirten Axe senkrecht steht und parallel der Ebene der xy ist, so steht auch, wie leicht nachzuweisen, MF′ auf der Projection dieser Tangente oder auf der Tangente der Projection der deformirten Axe senkrecht. Dasselbe gilt von M′F′, NG′, N′G. F′, G′ sind demnach die Krümmungsmittelpunkte der Projectionen der deformirten Axe.

Fig. 23.



Es bezeichne nun τ, τ' die Winkel, welche die Tangenten der Projectionen der deformirten Axe mit der Axe der x bilden und σ die Längenänderung der Axe des Stabes. Alsdann ist, wie in §. 78, $CC' = dx + d\sigma$. Der Abstand der Geraden CF, C′F in der Entfernung v von C ist $CC' + v \tan \angle CFC' = dx + d\sigma + v\, d\tau$, weil sehr nahe $\angle CFC' = \angle MF'M' = d\tau$ ist. Die relative Aenderung der Entfernung der Normalebenen in diesem Punkte ist daher $\frac{d\sigma}{dx} + v\frac{d\tau}{dx}$, also die Normalspannung in diesem Punkte

$$N = E\left(\frac{d\sigma}{dx} + v\frac{d\tau}{dx}\right).$$

Nach 11 (§. 64) wird aber für $w = 0$ oder in der Axe der v:

$$N = \frac{P}{F} + \frac{W'M}{W W' - V^2} v.$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke giebt in beiden ersten der folgenden Beziehungen:

$$55.\quad \frac{d\sigma}{dx} = \frac{P}{E F'},\quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{W'M}{E(W W' - V^2)},\quad \frac{d\tau'}{dx} = \frac{VM}{E(W W' - V^2)}.$$

Digitized by Google

Die erste und dritte Gleichung ergiebt sich in gleicher Weise durch Aufstellung zweier Ausdrücke für die Faserspannung in der Axe der w.

Bezeichnen wir nun weiter die Verrückungen eines Punktes der Axe in Richtung der x, y, z mit ξ, η, ζ, so ergiebt sich, wie in §. 79, leicht, dass sehr nahe

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{d\tau}{dx} = \frac{d^2\eta}{dx^2}, \quad \frac{d\tau'}{dx} = \frac{d^2\zeta}{dx^2}$$

ist. Demnach wird

$$56. \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{P}{EF},$$

$$57. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{W'M}{E(WW' - V^2)}, \quad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{VM}{E(WW' - V^2)}.$$

Nach §. 68 steht die Krümmungsebene der deformirten Axe auf der neutralen Axe senkrecht. Der Winkel, welchen diese Krümmungsebene mit der Axe der v bildet, ist daher gleich dem Winkel φ zwischen der neutralen Axe und der Axe der w. Nach 20 (§. 67) ist

$$58. \quad \tan\varphi = \frac{V}{W'}.$$

Wenn $\frac{V}{W'}$ in allen Querschnitten denselben Werth hat, so ist φ constant oder die deformirte Axe liegt in einer Ebene. Dies findet statt, wenn alle Querschnitte ähnlich sind und gegen die Kraftebene eine gleiche Lage haben.

Sind W_0, W_0' die Hauptträgheitsmomente des Querschnittes und α der Winkel, welchen die Kraftebene mit derjenigen Hauptaxe bildet, für welche das Trägheitsmoment W_0' ist, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Ausdrücke 16, 18 (§. 65) für W, W', V und $WW' - V^2$

$$59. \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E}\left(\frac{\cos^2\alpha}{W_0} + \frac{\sin^2\alpha}{W_0'}\right), \\ \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{M}{2E}\left(\frac{1}{W_0'} - \frac{1}{W_0}\right)\sin 2\alpha; \end{cases}$$

$$60. \quad \tan\varphi = \frac{W_0 - W_0'}{W_0\tan\alpha + W_0'\cot\alpha}.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die Biegungsebene mit derjenigen Hauptaxe bildet, für welche das Trägheitsmoment W_0' ist, mit ψ, so ist $\psi = \alpha + \varphi$, $\tan\psi = \frac{\tan\alpha + \tan\varphi}{1 - \tan\alpha\tan\psi}$. Setzt man für $\tan\varphi$ den eben aufgestellten Ausdruck, so ergiebt sich

$$61. \quad \tan\psi = \frac{W_0}{W_0'}\tan\alpha.$$

Hiernach wird φ bei veränderlichem α zu einem Maximum oder die Biegungsebene weicht von der Kraftebene am meisten ab, wenn der Differenzialquotient von $W_0\tan\alpha + W_0'\cot\alpha$ gleich Null ist, d. i. für $W_0\sin^2\alpha - W_0'\cos^2\alpha = 0$ oder

$$62. \quad \tan\alpha = \sqrt{\frac{W_0'}{W_0}}.$$

Digitized by Google

Diesem Werthe von α entspricht

$$63.\quad \tan\varphi = \frac{W_0 - W_0'}{2\sqrt{W_0 W_0'}},\quad \tan\psi = \sqrt{\frac{W_0}{W_0'}}.$$

Hiernach ist $\tan(90^0 - \psi) = \tan\alpha$, d. h. die Winkel, welche die Biegungsebene mit der einen Hauptaxe, und die Kraftebene mit der anderen Hauptaxe bilden, sind gleich. Die neutrale Axe und die Kraftebene bilden hiernach mit jeder Hauptaxe gleiche Winkel.

Aus 59 ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung $\int\int \frac{M}{EW_0}\,dx^2 = a$, $\int\int \frac{M}{EW_0'}\,dx^2 = b$ setzt,

$$64.\quad \eta = a\cos^2\alpha + b\sin^2\alpha,\quad \xi = \tfrac{1}{2}(b-a)\sin 2\alpha.$$

Die Elimination von α giebt

$$(a-\eta)(b-\eta) + \xi^2 = 0,$$

oder auch

$$65.\quad \left(\eta - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \xi^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

woraus folgt: Wenn sich der Stab, ohne dass sich die Belastung ändert, dreht, so beschreibt jeder Punkt der Axe einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}(a-b)$, dessen Mittelpunkt in der Kraftebene liegt und von der Axe der x um $\frac{1}{2}(a+b)$ entfernt ist.

Aus der zweiten der Gleichungen 64 folgt, dass die grösste Abweichung von der Kraftebene stattfindet, wenn $\alpha = 45^0$ ist, d. h. wenn die Kraftebene den Winkel zwischen den Hauptaxen halbirt.

X. Kapitel.

Bruchfestigkeit der Stäbe.

§. 83. Festigkeitsbedingungen. Als sogenannte ideale Hauptspannungen ergeben sich nach 77 (§. 42), wenn man für die Hauptspannungen A, B, C die Ausdrücke 36 (§. 77) setzt:

$$66.\quad \begin{cases} S_1 = \dfrac{m-1}{2m}N + \dfrac{m+1}{m}\sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ S_2 = \dfrac{m-1}{2m}N - \dfrac{m+1}{m}\sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ S_3 = -\dfrac{1}{m}N. \end{cases}$$

Hiernach ist stets S_1 positiv, S_2 negativ. S_3 können wir, da es stets kleiner als S_1 und S_2 ist, unbeachtet lassen. Für $m = 3$ und $m = 4$ wird, wenn wir entsprechend S', S'' für S setzen:

$$m = 3:\ S' = \tfrac{1}{3}N \pm \tfrac{4}{3}\sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2},$$
$$m = 4:\ S'' = \tfrac{3}{8}N \pm \tfrac{5}{4}\sqrt{\tfrac{1}{4}N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Digitized by Google

Ist N positiv, so wird $S_1' > S_1''$, $S_2' < S_2''$, ist N negativ, aber $S_1' < S_1''$, $S_2' > S_2''$. Nun aber ist bei positiven N $S_1 > -S_2$, bei negativen N aber $-S_2 > S_1$. Für die Festigkeit wird demnach in der Regel S_1 bei positiven N, S_2 bei negativen N massgebend sein und in beiden Fällen ergiebt sich für das massgebende S $S' > S''$. Der Sicherheit wegen wird man daher wohl thun, den Werth $m = 3$ anzunehmen. Für diesen aber wird

$$67. \quad \begin{cases} S_1 = \frac{1}{3} N + \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}, \\ S_2 = \frac{1}{3} N - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}. \end{cases}$$

Da S_1 stets positiv, S_2 stets negativ ist, so sind nun die Festigkeitsbedingungen

$$68. \quad \max S_1 = K, \qquad \max(-S_2) = \mathfrak{K},$$

wobei entweder die erste oder die zweite Gleichung massgebend ist, je nachdem

$$68a. \quad \begin{matrix} \max S_1 \\ \max(-S_2) \end{matrix} \gtrless \frac{K}{\mathfrak{K}}, \quad \text{d. i.} \quad N \gtrless \frac{K - \mathfrak{K}}{\sqrt{K\,\mathfrak{K}}} \sqrt{T_2^2 + T_3^2}$$

ist. Ist $K = \mathfrak{K}$ oder $T_2 = T_3 = 0$, so wird diese Bedingung $N \gtrless 0$, d. h. es ist die erste oder zweite Gleichung in Anwendung zu bringen, je nachdem N positiv oder negativ ist.

Die Hauptschubspannung ist nach 37 (§. 77):

$$69. \quad \Phi = \sqrt{\frac{1}{4} N^2 + T_2^2 + T_3^2}.$$

Die Vergleichung mit 67 zeigt, dass Φ stets kleiner als $\frac{3}{4}$ einer der idealen Hauptspannungen ist. Beim Schmiede- und Gusseisen ist aber der Sicherheitscoefficient für Abscheeren grösser, als $\frac{3}{4}$ des kleinsten der Coefficienten K, $\mathfrak{K}$, so dass hier ein Abscheeren nicht eintreten kann.

Das Gesagte gilt allerdings nur für isotrope, annähernd auch für nahezu isotrope Körper, z. B. Schmiedeeisen.

§. 84. Gewöhnlicher Fall. Bei Querschnitten, deren Breitendimensionen nicht sehr verschieden sind, sind nach §. 75 T_2, T_3 gegen N nur klein. Alsdann wird für jedes m nahezu $S_1 = N$, $S_2 = -\frac{1}{m} N$, so dass nur S_1 in Frage kommt. Die Festigkeitsbedingungen sind daher

$$70. \quad \max(+N) = K, \qquad \max(-N) = \mathfrak{K}.$$

N erreicht in einem Querschnitte das Maximum bei gerader Belastung für den grössten positiven und negativen Werth von v oder in den von der neutralen Axe am weitesten entfernten Fasern. Bezeichnen wir die grössten Werthe von v für die ausgedehnte und zusammengedrückte Seite mit a und $\mathfrak{a}$, so ist $\max(+N) = \frac{P}{F} + \frac{Ma}{W}$, $\max(-N) = -\frac{P}{F} + \frac{M\mathfrak{a}}{W}$; mithin sind die Festigkeitsbedingungen

$$71. \quad \begin{cases} \frac{M\,a}{W} + \frac{P}{F} = K, \\ \frac{M\,\mathfrak{a}}{W} - \frac{P}{F} = \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Ist, wie in den meisten Fällen, eine Axialkraft P nicht vorhanden, so wird einfacher

$$72. \quad \frac{Ma}{W} = K, \quad \frac{M\,a}{W} = \mathfrak{K},$$

welche Formeln als die Hauptgrundformeln für die Bruchfestigkeit anzusehen sind. Hierbei ist die erste oder zweite Gleichung massgebend, je nachdem

$$72\,a. \quad \frac{K}{a} \lessgtr \frac{\mathfrak{K}}{a}$$

ist. Ist $a = a$, so ist der kleinere der Coefficienten K, $\mathfrak{K}$ massgebend; ist derselbe K', so wird die Festigkeitsbedingung

$$73. \quad \frac{M\,a}{W} = K',$$

Der allgemeine Ausdruck für N gilt auch für anisotrope Körper; demnach gelten auch die jetzt aufgestellten Festigkeitsbedingungen für anisotrope Körper. Beim Holze ist die Festigkeit gegen Schub in Richtung der Fasern äusserst gering. Hier kann deshalb noch die Festigkeitsbedingung für Schub in Richtung der Fasern in Frage kommen. Für eine der Axe des Stabes parallele Ebene ist in Beziehung auf die Stellungswinkel α, β, γ $\cos\alpha = 0$, $\cos\gamma = \sin\beta$, daher wird nach 4 (§. 10) $X = T_3\cos\beta + T_2\sin\beta$, $Y = Z = 0$, daher nach 9 (§. 10) $T = X = T_3\cos\beta + T_2\sin\beta$. Hiernach wird T zum Maximum für

$$74. \quad \tan\beta = \frac{T_2}{T_3}$$

und zwar ergiebt sich leicht $\max T = \sqrt{T_2^2 + T_3^2}$, so dass die Festigkeitsbedingung für Schub

$$75. \quad \sqrt{T_2^2 + T_3^2} = K_1$$

würde, wenn K_1 den Sicherheitscoefficient für Abschieben in Richtung der Fasern bezeichnet.

§. 85. Gefährlicher Querschnitt. Der Bruch tritt jedenfalls in demjenigen Querschnitte ein, für welchen die ideale Hauptspannung S das Maximum erreicht. Man nennt diesen Querschnitt den gefährlichen Querschnitt. Seine Lage ist zu ermitteln und für ihn sind sodann die Festigkeitsbedingungen aufzustellen.

Bei prismatischen Stäben ist in den gewöhnlichen Fällen (§. 84) der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen M zum Maximum wird. Sind mehrere Maxima von M vorhanden, die zum Theil positiv, zum Theil negativ sind, so ist der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen $\frac{Ma}{K}$, bezüglich $\frac{Ma}{\mathfrak{K}}$ am grössten ist.

§. 86. Körper von constanter Festigkeit. Wenn in allen Querschnitten das Maximum der idealen Hauptspannung S gleich gross ist, wenn also der Körper in allen Querschnitten gleich leicht brechen kann, so nennt man den Körper einen Körper von constanter Festigkeit. Die Form derselben hängt natürlich von der Querschnittsform und der Unterstützungs- und Belastungsweise ab.

Digitized by Google

Wenn sämmtliche Querschnitte proportional und die Festigkeitsbedingungen 72 (§. 84) massgebend sind, so ist für zwei Querschnitte mit den Breiten b, b′, den Höhen h, h′ und den Momenten M, M′ etc.:

$$\text{a.}\quad K = \frac{M\,a}{W},\quad \mathfrak{K} = \frac{M\,a}{W},$$

$$K = \frac{M'\,a'}{W'},\quad \mathfrak{K} = \frac{M'\,a'}{W'}$$

also

$$\frac{M}{M'} = \frac{W\,a'}{W'a} = \frac{W\,a'}{W'a}.$$

Nun aber ist nach §. 66 $\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = \frac{h}{h'}$, $\frac{W}{W'} = \frac{b\,h^2}{b'h'^2}$, mithin

$$76.\quad \frac{b\,h^2}{b'h'^2} = \frac{M}{M'},$$

wodurch die Form bei gegebener Belastungsweise im Allgemeinen bestimmt ist.

Setzen wir $\frac{b'h'^2}{M'} = A$, so wird $bh^2 = A\,M$. Sind nur isolirte Lasten vorhanden, so wird nach §. 61 $M = \alpha + \beta x$, also $b\,h^2 = A(\alpha + \beta x)$. Bei constanter Höhe h ist hiernach der Grundriss des Stabes geradlinig begrenzt; bei constanter Breite b ist der Aufriss parabolisch begrenzt. Ist eine gleichmässige Last vorhanden, so wird $M = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, also $b\,h^3 = A(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$. Bei constanter Höhe h ist hiernach der Grundriss parabolisch begrenzt; bei constanter Breite b ist der Aufriss elliptisch oder hyperbolisch begrenzt.

Für den Krümmungsradius der deformirten Axe ist nach 45 (§. 79) $\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EW}$; nach a aber ist $\frac{M}{W} = \frac{K}{a} = \frac{\mathfrak{K}}{a}$, mithin

$$77.\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{K}{E\,a} \text{ oder } = \frac{\mathfrak{K}}{E\,a}.$$

Ist die Höhe h, mithin auch a, a, constant, so wird auch ϱ constant, d. h. ein Körper von constanter Festigkeit mit constanter Höhe biegt sich kreisförmig.

§. 87. Bruchbelastung. Die aufgestellten Festigkeitsbedingungen gründen sich auf das Elasticitätsgesetz, nach welchem die relative Längenänderung proportional der Spannung ist. Sie sind daher nur innerhalb der Elasticitätsgrenze richtig. Sie gelten aber nicht mehr im Augenblicke des Bruches, weil das Elasticitätsgesetz ausserhalb der Elasticitätsgrenze ein ganz anderes wird.

Nach den aufgestellten Festigkeitsbedingungen ergeben sich bei demselben Körper die äusseren Kräfte als proportional dem Sicherheitscoefficienten K, $\mathfrak{K}$. Wählt man daher m-fache Grenzsicherheit, d. h. die Belastung $\frac{1}{m}$ der Grenzbelastung, so muss man als Sicherheitscoefficient $\frac{1}{m}$ des Grenzcoefficienten wählen. Wählt man dagegen n-fache Bruchsicherheit, d. h. die Belastung $\frac{1}{n}$ der Bruchbelastung, so kann man nicht

Digitized by Google

mehr als Sicherheitscoefficient $\frac{1}{n}$ des Festigkeitscoefficienten wählen; es wird vielmehr zur Wahl von K, $\mathfrak{K}$ die Kenntniss der Bruchbelastung selbst nöthig. Im Folgenden wollen wir versuchen, dieselbe annähernd zu ermitteln.

Am besten benutzt man die Festigkeitsbedingungen 71 (§. 84) auch für den Bruch, wählt dabei aber statt der Coefficienten K, $\mathfrak{K}$ andere Coefficienten B, $\mathfrak{B}$, welche nicht constant sind, sondern abhängig von der Querschnittsform und Belastungsweise so gewählt werden, dass diese Gleichungen für den Bruch richtig werden. Wir nennen diese Coefficienten B, $\mathfrak{B}$ Bruchcoefficienten. Die Einführung derselben giebt als Bruchbedingungen:

$$78. \quad \begin{cases} \frac{M a}{W} + \frac{P}{F} = B, \\ \frac{M a}{W} - \frac{P}{F} = \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Abhängigkeit der Bruchcoefficienten von der Querschnittsform und Belastungsweise ist die Kenntniss des allgemeinen Elasticitätsgesetzes nöthig. Jedoch lassen sich auch ohne diese Kenntniss einige allgemeine Regeln entwickeln.

§. 88. Proportionale Querschnitte. Die relative Ausdehnung σ einer Faser oder nach §. 64 nahezu die relative Aenderung der Entfernung der Normalebenen der Axe des Stabes in der Entfernung v von der Axe der w lässt sich bei gerader Belastung ausdrücken durch $\sigma = m + n v$. Die Faserspannung N ist eine Funktion von σ und wir setzen

$$79. \quad N = \varphi(\sigma) = \varphi(m + n v).$$

Die ersten der Gleichgewichtsbedingungen 5 und 6 (§. 63) gehen daher, wenn eine Axialkraft P nicht vorhanden ist, über in folgende:

$$80. \quad 0 = \int_{-a}^{a} \varphi(m + n v)\, \beta\, dv, \quad M = \int_{-a}^{a} \varphi(m + n v)\, \beta\, v\, dv,$$

worin die Breite des Querschnittes im Abstande v von der Axe der w mit β bezeichnet ist. Die grösste Spannung findet für das grösste positive und negative v, d. i. für $v = a$, $v = -a$ statt. Bezeichnen wir die Festigkeitscoefficienten für Zug und Druck mit C und $\mathfrak{C}$, so sind demnach die Bruchbedingungen

$$81. \quad C = \varphi(m + n a), \quad \mathfrak{C} = \varphi(m - n a).$$

Für einen zweiten Körper aus demselben Materiale, dessen Querschnitt dem des vorigen Körpers proportional ist, bezeichnen wir Alles durch den Index 1. Alsdann wird

$$0 = \int_{-a_1}^{a_1} \varphi(m_1 + n_1 v_1)\, \beta_1\, dv_1, \quad M_1 = \int_{-a_1}^{a_1} \varphi(m_1 + n_1 v_1)\, \beta_1\, v_1\, dv_1$$

$$\varphi(m_1 + n_1 a_1) = C, \quad \varphi(m_1 - n_1 a_1) = \mathfrak{C}.$$

Wir setzen vorläufig nur die erste der Bruchbedingungen als massgebend voraus. Die Vergleichung derselben giebt

$$a. \quad m_1 + n_1 a_1 = m + n a.$$

Setzen wir $a - v = y$, $a_1 - v_1 = y_1$, so gehen die beiden ersten

der Gleichgewichtsbedingungen mit Beachtung der vorigen Gleichung über in

$$0 = \int_0^{a+a} \varphi\,(m + n\,a + n\,y)\,\beta\,dy, \quad 0 = \int_0^{a_1+a_1} \varphi\,(m + n\,a + n_1\,y_1)\,\beta_1\,dy.$$

Nun aber wegen der Proportionalität der Quersc l nitte $v_1 = \frac{h_1}{h} v$, $\beta_1 = \frac{b_1}{b}\,\beta$, $a_1 = \frac{h_1}{h} a$, $a_1 = \frac{h_1}{h}\,a$, $y_1 = a_1 - v_1 = \frac{h}{h}(a - v) = \frac{h_1}{h}\,y$. Die zweite der vorigen Gleichungen geht hierdurch über in

$$0 = \int_0^{a+a} \varphi\,(m + n\,a + \frac{n_1 h_1}{h}\,y)\,\beta\,dy.$$

Dieser Ausdruck und der erste der vorigen Ausdrücke können aber offenbar nur gleichzeitig Null sein, wenn $\frac{n_1 h_1}{h} = n$ ist. Demnach ist $n_1 = \frac{h}{h_1}\,n$. Dies in die Gleichung a gesetzt, giebt $m_1 = m$.

Der obige Ausdruck für M_1 wird nun

$$M_1 = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2} \int_{-a}^{a} \varphi\,(m + n\,v)\,\beta\,v\,dv = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2}\,M$$

oder

$$82. \quad \frac{M_1}{M} = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2} = \frac{F_1 h_1}{F h}.$$

d. h. Bei Körpern mit proportionalen Querschnitten verhalten sich die Momente, welche den Bruch veranlassen, bei jedwedem Elasticitätsgesetze wie die Produkte aus Breite und Quadrat der Höhe.

Die Bruchbedingungen 78 gehen nun über in

$$B = \frac{M\,a}{W}, \quad \mathfrak{B} = \frac{M\,a}{W},$$

$$B_1 = \frac{M_1\,a_1}{W_1}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{M_1\,a_1}{W_1}.$$

Es ist aber $a_1 = \frac{h_1}{h}\,a$, $a_1 = \frac{h_1}{h}\,a$, $W_1 = \frac{b_1 h_1^3}{b h^3}\,W$, $M_1 = \frac{b_1 h_1^2}{b h^2}\,M$. Substituirt man dies in die Ausdrücke für B_1, $\mathfrak{B}_1$, so ergeben sich dieselben Ausdrücke, wie für B, $\mathfrak{B}$; es ist also

$$83. \quad B_1 = B, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}.$$

d. h. für Körper mit proportionalen Querschnitten sind die Bruchcoefficienten constant.

Hat man z. B. den Bruchcoefficienten für einen Stab mit rechteckigem Querschnitte bestimmt, so gilt derselbe Coefficient bei demselben Materiale für alle übrigen rechteckigen Querschnitte.

§. 89. Bruchcoefficient für symmetrische Querschnitte.

Als allgemeines Elasticitätsgesetz kann man annehmen

$$N = \alpha\,\sigma + \beta\,\sigma^2 + \gamma\,\sigma^3 + \ldots$$

Wir machen die Annahme, dass N für gleiche positive und negative σ gleich gross sei, was allerdings nicht streng richtig ist. Alsdann müssen alle Glieder mit geraden Potenzexponenten verschwinden. Gehen wir ausserdem nicht über das Glied vom dritten Grade hinaus, so wird

$$84. \quad N = \alpha\,\sigma + \gamma\,\sigma^3.$$

Digitized by Google

Die Gleichgewichtsbedingungen 80 gehen dadurch über in

$$0 = \int [\alpha(m + n v) + \gamma (m + n v)^3] \beta \, dv,$$
$$M = \int [\alpha(m + n v) + \gamma (m + n v)^3 \beta v \, dv.$$

Nun aber wird, wenn wir die dritte Potenz entwickeln, $\int \beta \, dv = F$, $\int \beta v \, dv = 0$, $\int \beta v^2 dv = W$. Wir setzen voraus, dass der Querschnitt in Beziehung auf die Axe der w symmetrisch ist; alsdann wird $\int \beta v^3 dv = 0$. Ferner setzen wir

$$85. \quad U = \int \beta v^4 dv.$$

Somit wird nun

$$0 = m (\alpha F + \gamma m^2 F + 3 \gamma n^2 W),$$
$$M = n (\alpha W + 3 \gamma m^2 W + \gamma n^2 U).$$

Die erste Gleichung giebt $m = 0$. Für $v = 0$ wird daher $N = 0$, d. h. die neutrale Axe geht durch den Schwerpunkt. Die zweite Gleichung wird nun

$$a. \quad M = \alpha n W + \gamma n^3 U.$$

Da $m = 0$ ist, so wird $\sigma = n v$, also

$$b. \quad N = \alpha n v + \gamma n^3 v^3.$$

Der grösste positive und negative Werth von N ist $\alpha n a + \gamma n^3 a^3$ und $\alpha n a + \gamma n^3 a^3$. Bezeichnen wir daher wieder die Festigkeitscoefficienten für Zug und Druck mit C, $\mathfrak{C}$, so sind die Bruchbedingungen

$$c. \quad C = \alpha n a + \gamma n^3 a^3, \qquad \mathfrak{C} = \alpha n a + \gamma n^3 a^3.$$

Nach 78 wird, wenn wir vorläufig nur den Bruch durch Zerreissen der ausgedehntesten Fasern in's Auge fassen,

$$d. \quad B = \frac{M a}{W} = \alpha n a + \gamma n^3 a \frac{U}{W}$$
$$= \alpha n a + \gamma n^3 a^3 \frac{U}{W a^2}.$$

Reducirt man die Gleichung c auf $n a$, so findet man $n a$ nur abhängig von C, α, γ, also unabhängig von der Querschnittsform. Daher ist auch $\alpha n a$ und $\gamma n^3 a^3$ von der Querschnittsform unabhängig. Bezeichnet man diese letzteren Grössen mit α_1 und γ_1, so wird nach d und c:

$$86. \quad B = \alpha_1 + \gamma_1 \frac{U}{W a^2},$$

$$87. \quad C_1 = \alpha_1 + \gamma_1.$$

C ist durch directe Zerreissungsversuche bekannt. Bestimmt man noch B für eine specielle Querschnittsform durch Bruchversuche, so lässt sich aus diesen beiden Gleichungen α_1 und γ_1 ermitteln und man kann dann nach 86 den Bruchcoefficienten B für jeden anderen Querschnitt bestimmen. Am bequemsten ist, für die Bruchversuche einen rechtwinkligen Querschnitt anzuwenden, und wir wollen für denselben den Bruchcoefficienten mit B_0 bezeichnen. Für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und Höhe h ergiebt sich leicht $W = \frac{1}{12} bh^3$, $U = \frac{1}{48} bh^5$, also $\frac{U}{Wa^2} = \frac{3}{5}$, mithin nach 86 $B_0 = \alpha_1 + \frac{3}{5} \beta_1$. Aus dieser und der Gleichung 87 folgt $\alpha_1 = \frac{5}{2} B_0 - \frac{3}{2} C$, $\beta_1 = \frac{5}{2} (C - B_0)$. Die Gleichung 86 geht daher über in die erste der Gleichungen:

$$88. \quad \begin{cases} B = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 C) + \frac{5}{2} (C - B_0) \frac{U}{W a^2}, \\ \mathfrak{B} = \frac{1}{2} (5 B_0 - 3 \mathfrak{C}) + \frac{5}{2} (\mathfrak{C} - B_0) \frac{U}{W a^2}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Die zweite Gleichung ergiebt sich in ganz gleicher Weise für den Fall, dass ein Bruch durch Zerdrücken der am meisten zusammengedrückten Fasern eintritt.

Für einen elliptischen Querschnitt mit den Axen b, h ergiebt sich leicht $W = \frac{\pi}{61}\, bh^3$, $U = \frac{\pi}{512}\, bh^4$, also $\frac{U}{Wa^3} = \frac{1}{2}$, folglich $B = \frac{1}{2}\,(5\,B_0 = 3\,C) + \frac{3}{4}\,(C - B_0)$ oder

$$B = \tfrac{5}{4}\,B_0 - \tfrac{1}{4}\,C.$$

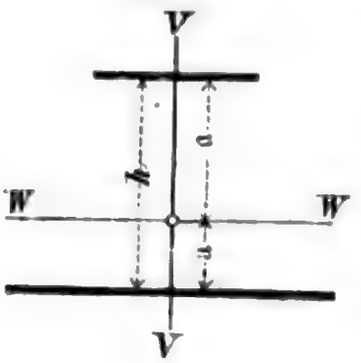
Für einen rhombischen Querschnitt mit horizontaler und verticaler Diagonale b, h wird $W = \frac{1}{48}\, bh^3$, $U = \frac{1}{480}\, bh^4$, also $\frac{U}{Wa^3} = \frac{2}{5}$, folglich $B = \frac{1}{2}\,(5\,B_0 - 3\,C) + (C - B_0)$ oder

$$B = \tfrac{3}{2}\,B_0 - \tfrac{1}{2}\,C.$$

§. 90. Bruchcoefficient für unsymmetrische Querschnitte.

In derselben Weise lässt sich auch für unsymmetrische Querschnitte der Bruchcoefficient bestimmen, jedoch werden die Ausdrücke ziemlich complicirt. Wir wählen daher hier einen andern Weg.

Fig. 24.



Wenn der Querschnitt nur aus zwei unendlich schmalen, der Axe der w parallelen Flächen f_1, f_2 besteht (Fig. 24), so werden die Gleichgewichtsbedingungen, wenn wir die Spannungen in diesen Flächen mit N_1, N_2 bezeichnen und eine Axialkraft nicht vorhanden ist,

$$0 = N_1 f_1 + N_2 f_2, \qquad M = N_1 f_1 a - N_2 f_2 a.$$

Hieraus folgt, wenn wir $a + a = h$ setzen,

$$N_1 = \frac{M}{f_1 h}, \qquad N_2 = \frac{M}{f_2 h}.$$

Die Bruchbedingungen sind daher

$$C = \frac{M}{f_1 h}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{M}{f_2 h}.$$

Nun aber ist $f_1 a = f_2 a$, $W = f_1 a^2 + f_2 a^2 = f_1 h a = f_2 h a$, also $f_1 h = \frac{W}{a}$, $f_2 h = \frac{W}{a}$, folglich

$$C = \frac{M a}{W}, \qquad \mathfrak{C} = \frac{M a}{W}.$$

Die Vergleichung mit den Gleichungen 78 giebt, da $P = 0$ ist,

$$89. \quad B = C, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$$

d. h. die Bruchcoefficienten sind gleich den Festigkeitscoefficienten für Zug und Druck.

Dasselbe würden auch die Formeln 88 geben, wenn anstatt des Ausdruckes $\frac{U}{Wa^3}$ der Ausdruck $\frac{U(a+a)}{W(a^3+a^3)}$ gesetzt würde. Alsdann würde, wenn wir zur Abkürzung

$$90. \quad \frac{U(a+a)}{W(a^3+a^3)} = \varkappa$$

setzen,

$$91. \quad \left.\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}\,(5\,B_0 - 3\,C) + \tfrac{5}{2}\,(C - B_0)\,\varkappa, \\ \mathfrak{B} &= \tfrac{1}{2}\,(5\,B_0 - 3\,\mathfrak{C}) + \tfrac{5}{2}\,(\mathfrak{C} - B_0)\,\varkappa. \end{aligned}\right\}$$

Denn es wird $W = f_1 h a = f_1 a (a + a)$, $U = f_1 a^4 + f_2 a^4 = f_1 a (a^3 + a^3)$

Digitized by Google

also $\varkappa = 1$, mithin $B = C$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Für symmetrische Querschnitte gilt dieser Ausdruck aber auch, weil hier $a = a$ ist, also $\varkappa = \frac{U}{Wa^2}$ wird. Da nun der symmetrische Querschnitt und der Querschnitt Fig. 24 gleichsam die äussersten Grenzen der in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen bilden, so kann man den Ausdruck 91 als Näherungsausdruck für alle Querschnittsformen ansehen. Man kann dies umsomehr thun, als auch der Ausdruck 88 auf einem nicht streng richtigen Elasticitätsgesetze beruht.

Für den rechteckigen Querschnitt, sowie für den idealen Querschnitt Fig. 24 ist der Ausdruck 91 streng richtig. Für andere Querschnitte bildet er gleichsam eine Interpolationsformel, die um so genauere Resultate geben wird, je mehr sich der Querschnitt einem dieser beiden Querschnitte nähert.

Von den beiden Coefficienten B, $\mathfrak{B}$ ist offenbar derjenige massgebend, für welchen sich das kleinste M ergiebt, d. i. nach 78 derjenige, für welchen $\frac{B}{a}$, $\frac{\mathfrak{B}}{a}$ den kleinsten Werth hat, also B oder $\mathfrak{B}$, je nachdem $\frac{B}{\mathfrak{B}} \lessgtr \frac{a}{a}$ ist.

Für den dreieckigen Querschnitt ($\triangle$) mit der Breite b und Höhe h ergiebt sich z. B. $a = \frac{2}{3}h$, $a = \frac{1}{3}h$, $W = \frac{1}{36}bh^2$, $U = \frac{1}{270}bh^4$, also $\varkappa = \frac{2}{5}$, mithin

$$B = \tfrac{3}{2}B_0 - \tfrac{1}{2}C.$$

§. 91. Erfahrungswerthe. In folgender Tabelle sind die Bruchcoefficienten für den idealen Querschnitt Fig. 24, welche mit den in §. 43 angegebenen Festigkeitscoefficienten C, $\mathfrak{C}$ übereinstimmen und für den rechteckigen Querschnitt, sowie die hieraus nach dem Vorigen abgeleiteten Bruchcoefficienten für den rhombischen, elliptischen und dreieckigen Querschnitt zusammengestellt.

Material	Fig. 24		Rechteck		Rhombus		Ellipse		Dreieck $\triangle$		Dreieck $\triangledown$	
	C	$\mathfrak{C}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{B}$
Holz	810	530	—	670	—	740	—	700	—	740	600	—
Schmiedeeisen .	4160	3640	—	5200	5840	—	—	5590	—	5980	5840	—
Gusseisen . . .	1320	7920	2860	—	3630	—	3245	—	3630	—	6710	—

Für einen beliebigen Querschnitt ergiebt sich:

Holz . . . . . $B = 450 + 360\,\varkappa$, $\mathfrak{B} = 890 - 360\,\varkappa$;
Schmiedeeisen . . $B = 6760 - 2600\,\varkappa$, $\mathfrak{B} = 7540 - 3900\,\varkappa$;
Gusseisen . . . . $B = 5170 - 3850\,\varkappa$, $\mathfrak{B} = 16500\,\varkappa - 4730$.

§. 92. Anwendung. Wir gehen nun dazu über, die entwickelten allgemeinen Formeln der Biegungselasticität auf bestimmte, praktisch wichtige, Fälle anzuwenden. Hiebei sind verschiedene Arten der Belastungsweise und verschiedene Arten der Querschnittsform zu unterscheiden.

Wir unterscheiden eine bestimmte und eine bedingte Belastung. Unter der ersteren verstehen wir eine solche, bei welcher alle äusseren Kräfte direkt gegeben sind, unter der letzteren dagegen eine solche, bei welcher nur ein Theil der äusseren Kräfte direkt gegeben ist, während der andere durch die Elasticität des Stabes bedingt wird. Zu der ersteren

Digitized by Google

gehören die Fälle, wo der Stab an einem Ende eingespannt, am anderen frei ist und wo der Stab mit beiden Enden auf Stützen liegt; zu der letzteren die Fälle, wo ein Ende eingespannt, das andere unterstützt ist, wo beide Enden eingespannt sind und wo der Stab auf mehr als zwei Stützen liegt. Bei der bestimmten Belastung lassen sich die Festigkeitsbedingungen aufstellen, ohne auf die Formänderung einzugehen; nicht aber bei der bedingten Belastung.

Wir unterscheiden ausserdem die drei Fälle, wo nur Transversalkräfte oder nur Axialkräfte oder gleichzeitig Transversal- und Axialkräfte vorhanden sind.

Wir beginnen zunächst mit der Belastung durch Transversalkräfte und setzen bei der Aufstellung der Festigkeitsbedingungen zunächst nur den gewöhnlichen Fall §. 84 voraus, bei welchem die Schubspannungen nicht in Frage kommen, da sich die allgemeinen Festigkeitsbedingungen ohne Specialisirung der Querschnittsform nicht ausbeuten lassen.

Digitized by Google

IV. Abschnitt.

Belastung durch Transversalkräfte.

XI. Kapitel.

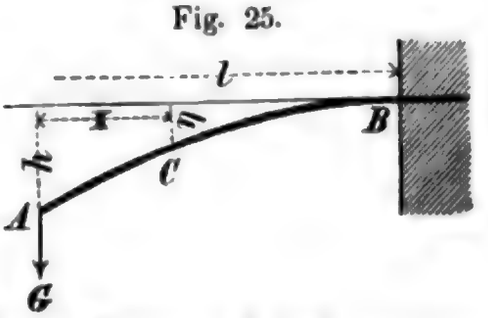
Bestimmte Belastung.

A. Stab, welcher an einem Ende eingespannt, am andern frei ist.

§. 93. Stab, welcher nur am freien Ende belastet ist. Wir nehmen das freie Ende A (Fig. 25) als Anfang der x an und bezeichnen mit

l die Länge AB des Stabes,
G die am Ende A wirkende Last,
η die Senkung des Endes A.

Fig. 25.



Für einen beliebigen Querschnitt ist alsdann

1. $Q = G, \quad M = Gx.$

Taf. I. Fig. 1 ist Q und M graphisch dargestellt.

Hiernach ist Q constant. M ist am freien Ende $= 0$ und erreicht das Maximum am eingespannten Ende B. Bei constantem Querschnitte wird demnach auch die ideale Hauptspannung bei B das Maximum erreichen; der gefährliche Querschnitt liegt also bei constantem Querschnitte am eingespannten Ende. Die Festigkeitsbedingung ist demnach $K = \frac{Gla}{W}$, $\mathfrak{K} = \frac{Gla}{W}$ oder

$$2. \quad G = \frac{KW}{la} = \frac{\mathfrak{K}W}{la}.$$

Anwendung bei Zapfen, Hebeln, Radzähnen etc.

§. 94. Formänderung. Nach 41 (§. 79) ist

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{Gx}{EW},$$

also bei constantem Querschnitte

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{Gx^2}{2EW} + \text{Const.}$$

Am eingespannten Ende, also für $x = l$, ist $\frac{d\eta}{dx} = 0$, mithin $0 = \frac{Gl^2}{2EW} + \text{Const}$, folglich

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{G(l^2 - x^2)}{2EW}.$$

Die nochmalige Integration giebt

$$\eta = -\frac{G(3l^2x - x^3)}{6EW} + \text{Const.}$$

Für $x = l$ wird $\eta = 0$, also $0 = -\frac{Gl^3}{3EW} + \text{Const}$, mithin

$$3.\quad \eta = \frac{G}{6EW}(2l^3 - 3l^2x + x^3) = \frac{G}{6EW}(2l + x)(l - x)^2.$$

Die Senkung η des freien Endes ($x = 0$) wird demnach

$$4.\quad \eta = \frac{Gl^3}{3EW}.$$

Ist der Stab mit der grössten zulässigen Last, welche durch 2 bestimmt ist, belastet, so wird

$$5.\quad \eta = \frac{Kl^3}{3Ea} = \frac{\mathfrak{K}l^3}{3Ea}.$$

Für die Verrückung ξ eines Punktes in axialer Richtung wird nach 50 (§. 80)

$$\frac{d\xi}{dx} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 = -\frac{G^2(l^2 - x^2)^2}{8E^2W^2},$$

$$\xi = \frac{G^2}{8E^2W^2}(l^4x - \tfrac{2}{3}l^2x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \text{Const}).$$

Für $x = l$ wird $\xi = 0$, also $0 = -\frac{G^2}{8E^2W^2}(\frac{8}{15}l^5 + \text{Const})$, mithin

$$6.\quad \xi = \frac{G^2}{120E^2W^2}(8l^5 - 15l^4x + 10l^2x^3 - 3x^5).$$

Die Verrückung γ des freien Endes ($x = 0$) wird demnach

$$7.\quad \gamma = \frac{G^2l^5}{15E^2W^2} = \tfrac{2}{5}\left(\frac{\eta}{l}\right)^2 l.$$

In der Folge werden wir ξ der geringeren Wichtigkeit wegen nicht ermitteln.

§. 95. Körper von constanter Festigkeit. Bezeichnen wir das Moment für das eingespannte Ende mit M_1, die Breite und Höhe des Querschnittes daselbst mit b_1, h_1, so ist für Körper mit proportionalen Querschnitten nach 76 (§. 86):

$$8.\quad \frac{bh^2}{b_1h_1^2} = \frac{M}{M_1} = \frac{x}{l}.$$

Hieraus folgen als specielle Formen (Taf. III. Fig. 1—3):

$$9.\quad \begin{cases} \text{a. Höhe constant (Fig. 1): . . . } b = b_1\dfrac{x}{l}, \\ \text{b. Breite constant (Fig 2): . . . } h = h_1\sqrt[3]{\dfrac{x}{l}}, \\ \text{c. Querschn. constant (Fig. 3): . } h = h_1\sqrt{\dfrac{x}{l}}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir die Volumina der Körper in diesen drei Fällen mit V_1, V_2, V_3, das Volumen eines prismatischen Stabes mit gleich grosser Festigkeit mit V, so ergiebt sich leicht

$$V_1 = \tfrac{1}{2} V, \quad V_2 = \tfrac{2}{3} V, \quad V_3 = \tfrac{3}{5} V,$$
$$V : V_2 : V_3 : V_1 = 30 : 20 : 18 : 15.$$

Für die Formänderung ist nach 77 (§. 86) $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{K}{Ea} = \frac{\mathfrak{M}}{E\mathfrak{a}}$. Bezeichnen wir die Senkung des freien Endes eines prismatischen Stabes mit gleich grosser Festigkeit mit η_1, so ist nach 5 $\eta_1 = \frac{Kl^2}{3Ea} = \frac{\mathfrak{M}l^2}{3E\mathfrak{a}_1}$, folglich $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3\eta_1 a_1}{l^2 a} = \frac{3\eta_1 \mathfrak{a}_1}{l^2 \mathfrak{a}}$, oder

$$10. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3\eta_1 h_1}{l^2 h}.$$

Ist die Höhe constant, so wird $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3\eta_1}{l^2}$, $\frac{d\eta}{dx} = -\frac{3\eta_1}{l^2}(l - x)$ und

$$11. \quad \eta = \tfrac{3}{2}\eta_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2.$$

Ist die Breite constant, so ist $h = h_1 \sqrt{\frac{x}{l}}$, also $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3\eta_1}{l^2}\sqrt{\frac{l}{x}}$, $\frac{d\eta}{dx} = \frac{6\eta_1}{l}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{l}}\right)$ und

$$12. \quad \eta = 2\eta_1 \left[1 - 3\frac{x}{l} + 2\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3}\right].$$

Sind endlich die Querschnitte ähnlich, so ist $h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, also $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{3\eta_1}{l^2}\sqrt[3]{\frac{l}{x}}$, $\frac{d\eta}{dx} = \frac{9\eta_1}{l}\left(1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}\right)$ und

$$13. \quad \eta = \frac{9}{5}\eta_1 \left[1 - \frac{5}{2}\frac{x}{l} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^5}\right].$$

Die Senkung η des freien Endes wird in diesen drei Fällen

$$14. \quad \text{a. } \eta = \tfrac{3}{2}\eta_1, \quad \text{b. } \eta = 2\eta_1, \quad \text{c. } \eta = \tfrac{9}{5}\eta_1.$$

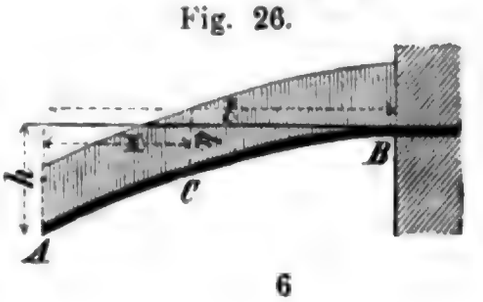
Das Verhältniss dieser Senkungen ist 15 : 20 : 18, also genau dasselbe, wie das der Volumina.

Anwendung bei Consolen, Wellen, Hebeln etc.

§. 96. Stab mit gleichmässiger Belastung. Als Anfang der x wählen wir wieder das freie Ende A (Fig. 26), behalten die vorigen Bezeichnungen bei und bezeichnen ausserdem mit q die Last pro Längeneinheit. Q ist die Last des Theiles AC, d. i. qx und M das Moment dieser Last in Beziehung auf C, d. i. $qx \cdot \frac{1}{2}x$. Also ist

$$15. \quad Q = qx, \quad M = \tfrac{1}{2} q x^2.$$

Fig. 26.



Digitized by Google

Taf. II. Fig. 2 ist Q und M graphisch dargestellt. Q und M erreichen das Maximum am eingespannten Ende B, hier wird also bei constantem Querschnitte auch S zum Maximum oder: der gefährliche Querschnitt liegt bei einem prismatischen Stabe am eingespannten Ende. Für denselben ist $M = \frac{1}{2} q l^2$, mithin die Festigkeitsbedingung $K = \frac{q l^2 a}{2W}$, $\mathfrak{K} = \frac{q l^2 a}{2W}$, also die Tragkraft

$$16. \quad q l = \frac{2 K W}{l a} = \frac{2 \mathfrak{K} W}{l a} .$$

Anwendung bei Consolen, Drehbrücken etc.

§. 97. Formänderung. Nach 41 (§. 79) ist

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{q x^2}{2 E W} .$$

Die zweimalige Integration giebt, wenn man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und $\eta = 0$ werden muss,

$$\frac{d\eta}{dx} = - \frac{q (l^3 - x^3)}{6 E W},$$

$$17. \quad \eta = \frac{q}{24 E W} (3 l^4 - 4 l^3 x + x^4).$$

Die Senkung $\mathfrak{y}$ des freien Endes ($x = 0$) ist demnach

$$18. \quad \mathfrak{y} = \frac{q l^4}{8 E W} .$$

Wenn der Stab mit der grössten zulässigen, durch 16 bestimmten Last belastet ist, so ist die Senkung

$$19. \quad \mathfrak{y} = \frac{K l^2}{4 E a} = \frac{\mathfrak{K} l^2}{4 E a} .$$

§. 98. Körper von constanter Festigkeit. Nach 76 (§. 86) wird

$$20. \quad \frac{b h^2}{b_1 h_1^2} = \frac{M}{M_1} = \left(\frac{x}{l}\right)^2 .$$

Hieraus folgen als specielle Formen (Taf. IV. Fig. 1—3):

$$21. \quad \begin{cases} \text{a. Höhe constant (Fig. 1): . . . } b = b_1 \left(\frac{x}{l}\right)^2, \\ \text{b. Breite constant (Fig. 2): . . } h = h_1 \frac{x}{l}, \\ \text{c. Querschn. ähnlich (Fig. 3): . } h = h_1 \sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^2} . \end{cases}$$

Als Volumen ergiebt sich in diesem Falle

$$V_1 = \tfrac{1}{3} V, \quad V_2 = \tfrac{1}{2} V, \quad V_3 = \tfrac{3}{7} V,$$
$$V : V_2 : V_3 : V_1 = 42 : 21 : 18 : 14.$$

Für die Formänderung ergiebt sich in gleicher Weise, wie in §. 95:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{4 \mathfrak{y}_1 h_1}{l^2 h} .$$

Digitized by Google

Hieraus folgt nun mit Berücksichtigung von 21 leicht:

$$22.\quad \begin{cases} \text{a. Höhe constant:} & \eta = 2\,\eta_1\left(1-\frac{x}{l}\right)^2, \\ \text{b. Breite constant:} & \eta = 4\,\eta_1\left(1-\frac{x}{l}+\frac{x}{l}\,\text{lognat}\frac{x}{l}\right), \\ \text{c. Querschn. ähnlich:} & \eta = 3\,\eta_1\left(1-4\frac{x}{l}+3\,\frac{x}{l}\sqrt[3]{\frac{x}{l}}\right) \end{cases}$$

und hiernach ist die Senkung η des freien Endes:

$$23.\quad \text{a. } \eta = 2\,\eta_1, \quad \text{b. } \eta = 4\,\eta_1, \quad \text{c. } \eta = 3\,\eta_1.$$

Anwendung bei Consolen.

§. 99. Stab mit isolirter und gleichmässiger Belastung.

Wenn der Stab am freien Ende mit einer Last G und ausserdem gleichmässig mit einer Last q pro Längeneinheit belastet ist, so sind die Ausdrücke für Q, M, η die Summen der entsprechenden Ausdrücke der beiden vorigen Fälle. So wird

$$24.\quad Q = G + q\,x, \quad M = G\,x + \tfrac{1}{2}\,q\,x^2,$$

wonach Taf. II. Fig. 3. Q und M graphisch dargestellt ist.

Für den Körper von constanter Festigkeit ergiebt sich

$$25.\quad \frac{b\,h^2}{b_1\,h_1^{\,2}} = \frac{M}{M_1} = \frac{2\,G\,x + q\,x^2}{2\,G\,l + q\,l^2}.$$

Die sich hiernach ergebenden Formen bei constanter Höhe und constanter Breite sind Taf. IV. Fig. 4 und 5 dargestellt. Im ersten Falle wird der Grundriss von zwei Parabeln begrenzt, deren Scheitel vom freien Ende die Entfernung $\frac{G}{q}$ hat. Im zweiten Falle wird der Aufriss von einer Hyperbel begrenzt, deren Centrum vom freien Ende ebenfalls die Entfernung $\frac{G}{q}$ hat.

B. Stab, welcher mit beiden Enden auf Stützen liegt.

§. 100. Belastung durch eine feste isolirte Last. Als Anfang der x wählen wir den einen Stützpunkt A (Fig. 27) und bezeichnen mit

G die in einem beliebigen Punkte C wirkende Last;

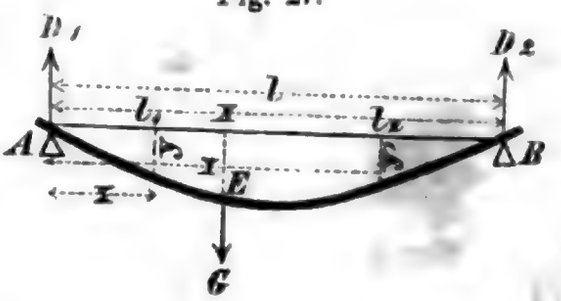
D_1, D_2 die Drücke auf die Stützen A, B oder die denselben gleichen Kräfte, welche die Stützen auf den Stab ausüben;

l die Entfernung AB der Stützen;

l_1, l_2 die Entfernung der Last von den Stützen;

η die grösste vorkommende Senkung.

Fig. 27.



Das Gleichgewicht des ganzen Stabes fordert die Erfüllung der Bedingungen $D_1 + D_2 = G$, $D_1 l = G\,l_2$ oder $D_2 l = G\,l_1$, mithin ist

$$26.\quad D_1 = G\,\frac{l_2}{l}, \quad D_2 = G\,\frac{l_1}{l}.$$

Daher ist nun, wenn wir in der Strecke CB Alles durch einen Apostroph bezeichnen, $Q = D_1$, $Q' = D_1 - G = -D_2$, $M = -D_1 x$, $M' = -D_1 x + G(x - l_1) = -D_2(l - x)$, d. i.

$$27. \quad \begin{cases} Q = G\frac{l_2}{l}, & Q' = -G\frac{l_1}{l}, \\ M = -G\frac{l_2 x}{l}, & M' = -G\frac{l_1(l-x)}{l}. \end{cases}$$

Taf. II. Fig. 4 ist Q und M graphisch dargestellt. Das Moment M erreicht das Maximum am Angriffspunkte der Last. Da Q innerhalb jeder Strecke constant ist, so liegt auch der gefährliche Querschnitt am Angriffspunkte der Last. Das Maximum von M wird

$$28. \quad \max M = -\frac{G l_1 l_2}{l}.$$

Die Festigkeitsbedingung ist daher $K = \frac{G l_1 l_2 a}{l W}$, $\mathfrak{K} = \frac{G l_1 l_2 a}{l W}$ oder

$$29. \quad G = \frac{K W l}{l_1 l_2 a} = \frac{\mathfrak{K} W l}{l_1 l_2 a}.$$

Liegt die Last in der Mitte des Stabes, so wird

$$30. \quad \max M = -\tfrac{1}{4} G l,$$

$$31. \quad G = \frac{4 K W}{l a} = \frac{4 \mathfrak{K} W}{l a}.$$

Anwendung bei Wellen, Querträgern von Brücken, Balken etc. Ausserdem zur Bestimmung der Bruchcoefficienten; nach 31 wird nämlich, wenn G die Last bedeutet, welche den Bruch veranlasst, mit Rücksicht auf §. 87

$$B = \frac{G l a}{4 W}, \quad \mathfrak{B} = \frac{G l a}{4 W}.$$

§. 101. Formänderung. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{G}{E W l} = A$ so wird

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -A l_2 x, \quad \frac{d^2\eta'}{dx^2} = -A l_1 (l - x),$$

mithin bei prismatischem Stabe

$$\frac{d\eta}{dx} = -\tfrac{1}{2} A l_2 x^2 + C, \quad \frac{d\eta'}{dx} = -A l_1 (l x - \tfrac{1}{2} x^2) + C'.$$

Für $x = l_1$ muss offenbar $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta'}{dx}$ werden. Mithin ist $-\frac{1}{2} A l_2 l_1^2 + C = -A l_1 (l l_1 - \frac{1}{2} l_1^2) + C'$. Setzt man hierin $l_2 = l - l_1$, so ergiebt sich $C' = C + \frac{1}{2} A l l_1^2$, folglich

$$\frac{d\eta}{dx} = -\tfrac{1}{2} A l_2 x^2 + C, \quad \frac{d\eta'}{dx} = -\tfrac{1}{2} A l_1 (2 l x - x^2 - l l_1) + C.$$

$$\eta = -\tfrac{1}{6} A l_2 x^3 + C x + C_1, \quad \eta' = -\tfrac{1}{2} A l_1 (l x^2 - \tfrac{1}{2} x^3 - l l_1 x) + C x + C_1'.$$

Für $x = l_1$ muss $\eta = \eta'$ werden; ausserdem muss für $x = 0$ $\eta = 0$ und für $x = l$ $\eta' = 0$ werden. Die Bedingung $\eta = 0$ für $x = 0$ giebt zunächst $C_1 = 0$. Die Bedingung $\eta = \eta'$ für $x = l_1$ giebt $-C_1' = \frac{1}{6} A l l_1^3$ und nun giebt die Bedingung $\eta' = 0$ für $x = l$ $C = \frac{1}{6} A l_1 l_2 (2 l - l_1)$. Daher wird nun nach gehöriger Reduction

Digitized by Google

$$32.\quad \begin{cases} \eta = \frac{1}{6} A l_2 x (2 l l_1 - l_1^2 - x^2), \\ \eta' = \frac{1}{6} A l_1 (l - x) (- l^2 + 2 l x - x^2). \end{cases}$$

Als Senkung η_0 des Angriffspunktes C der Last ($x = l_1$) ergiebt sich hiernach

$$33.\quad \eta_0 = \frac{1}{3} A l_1^2 l_2^2.$$

Die Differenziation von η giebt $\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{6} A l_2 (2 l l_1 - l_1^2 - 3 x^2)$. Daher wird η zum Maximum für $2 l l_1 - l_1^2 - 3 x^2 = 0$ oder für

$$34.\quad x = \sqrt{\tfrac{1}{3} (2 l - l_1) l_1}.$$

Dieser Ausdruck gilt aber nur, wenn $x < l_1$, d. i. $l_1 > \frac{1}{2} l$ ist. Setzt man diesen Werth für x in den Ausdruck für η, so ergiebt sich als grösste Senkung

$$35.\quad \mathfrak{y} = \frac{1}{27} \frac{G l_1 l_2}{E W l} (2 l - l_1) \sqrt{3 l_1 (2 l - l_1)}.$$

Liegt die Last in der Mitte des Stabes, so wird

$$36.\quad \eta = \frac{1}{27} \frac{G}{E W} x (3 l^2 - x^2),$$

$$37.\quad \mathfrak{y} = \frac{G l^3}{48 E W}.$$

Bezeichnet man die grösste Abweichung für diesen letzteren Fall mit $\mathfrak{y}$, so wird für eine andere Lage der Last nach 35 und 34:

$l_1 = 0{,}1\, l$, $\mathfrak{y} = 0{,}230\, \mathfrak{y}$, $x = 0{,}252\, l$,
$l_1 = 0{,}2\, l$, $\mathfrak{y} = 0{,}532\, \mathfrak{y}_1$, $x = 0{,}346\, l$,
$l_1 = 0{,}3\, l$, $\mathfrak{y} = 0{,}785\, \mathfrak{y}_1$, $x = 0{,}412\, l$,
$l_1 = 0{,}4\, l$, $\mathfrak{y} = 0{,}946\, \mathfrak{y}_1$, $x = 0{,}462\, l$,
$l_1 = 0{,}5\, l$, $\mathfrak{y} = 1{,}000\, \mathfrak{y}_1$, $x = 0{,}500\, l$.

Anwendung zur Bestimmung der Elasticitätscoefficienten durch Biegungsversuche. Nach 37 wird nämlich

$$E = \frac{G l^3}{48 W \mathfrak{y}}.$$

§. 102. Belastung durch eine bewegliche isolirte Last.

Wenn die Last jede mögliche Lage annehmen kann, so kommt es hauptsächlich darauf an, diejenige Lage zu bestimmen, bei welcher die Beanspruchung für einen beliebigen Querschnitt am grössten ist.

Liegt die Last zwischen B und dem betreffenden Querschnitte C, so ist $Q = -\frac{G l_2}{l}$, $M = -\frac{G l_2 x}{l}$; Q und M wachsen demnach mit l_2, werden also am grössten für $l_2 = l - x$. Liegt dagegen die Last zwischen A und C, so ist $Q = +\frac{G l_1}{l}$, $M = \frac{G l_1 (l-x)}{l}$; Q und M wachsen also mit l_1, werden mithin am grössten für $l_1 = x$. Hieraus folgt:

Q und M werden für einen beliebigen Querschnitt am grössten, wenn die Last an diesem Querschnitte liegt.

Für diese Lage der Last wird, wenn die Last dicht rechts neben dem Querschnitte liegt, $Q = -D_1 = -G \frac{l_2}{l}$, also negativ, und wenn die Last dicht links neben dem Querschnitte liegt, $Q = -D_1 + G$

$= + D_2 = + G\frac{l_1}{l}$, also positiv. Ferner wird $M = - D_1 l_1 = - G\frac{l_1 l_2}{l}$ oder, da $l_1 = x$, $l_2 = l - x$ ist,

$$38. \quad \begin{cases} \max(-Q) = -G\left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad \max(+Q) = G\frac{x}{l}, \\ \max M = G\,l\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right). \end{cases}$$

Taf. II. Fig. 5 ist Q und M graphisch dargestellt. Das absolute Maximum erreicht Q für $x = 0$ oder $x = l$, M für $x = \frac{1}{2}\,l$ und zwar ist $\max Q = \pm G$, $\max M = -\frac{1}{4}\,Gl$.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die grösste Senkung in der Mitte eintritt, wenn auch die Last in der Mitte liegt.

Anwendung bei kleinen Balkenbrücken aus Holz und Eisen.

§. 103. Körper von constanter Festigkeit. a) Wenn die Last eine feste Lage hat, so gelten auch hier die in §. 95 für einen an einem Ende eingespannten, am andern belasteten Stab ermittelten Formen, weil der Stützendruck auf den Stab in derselben Weise wirkt, wie die Last am Ende des Stabes. Der Stab besteht natürlich aus zwei besonderen, am Angriffspunkte der Last zusammenstossenden Formen. Taf. III. Fig. 4—6 sind die Formen für den Fall, dass die Last in der Mitte liegt, dargestellt.

b) Wenn aber die Last jede beliebige Lage annehmen kann, so muss jeder Querschnitt für die gefährlichste Lage der Last bestimmt werden. Bezeichnen wir für die Mitte Alles mit dem Index 1, so ist nach 38 $M = G\,x\left(1 - \frac{x}{l}\right)$, $M_1 = \frac{1}{4}\,Gl$, mithin nach 76 (§. 85):

$$39. \quad \frac{b\,h^2}{b_1\,h_1^{\,2}} = \frac{M}{M_1} = 4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Hieraus ergeben sich als besondere Formen (Taf. III. Fig. 7 und 8):

$$40. \quad \begin{cases} \text{a. Höhe constant (Fig. 7): . . } b = 4\,b_1\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right), \\ \text{b. Breite constant (Fig 8): . . } h = 2\,h_1\sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}, \\ \text{c. Querschnitte ähnlich: . . . } h = h_1\sqrt{4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}. \end{cases}$$

Im ersten Falle wird der Grundriss von Parabeln, im zweiten der Aufriss von einer Ellipse begrenzt. Für die Volumina ergiebt sich:

$$V_1 = \tfrac{2}{3}\,V = 0{,}667\,V; \quad V_2 = \frac{\pi}{4}\,V = 0{,}785\,V; \quad V_3 = 0{,}735\,V.$$

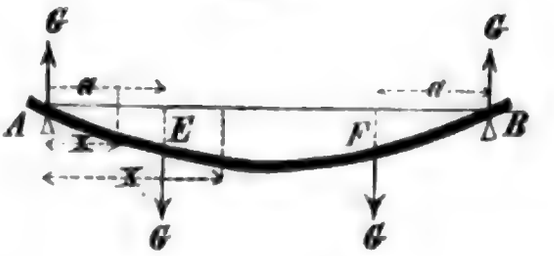
Anwendung a. bei Axen, Wellen etc., b. bei kleinen Brücken aus Gusseisen, älteren gusseisernen Eisenbahnschienen etc.

§. 104. Belastung durch zwei isolirte Lasten. Der Stab sei durch zwei gleich grosse Lasten G belastet, welche von den Stützen die gleiche Entfernung a haben (Fig. 28). Jeder Stützendruck D ist $= G$.

Digitized by Google

Nehmen wir die eine Stütze A als Anfang der x an, so ist innerhalb der äusseren Strecke AE $Q = -D = -G$, $M = -Dx = Gx$ und innerhalb der mittleren Strecke EF $Q = -D + G$, $M = -Dx + G(x - a)$, d. i.

Fig. 28.



$$41.\quad Q = 0, \quad M = Ga.$$

Innerhalb der mittleren Strecke ist also M constant und von der Entfernung AB der Stützen unabhängig. Taf. II. Fig. 6 ist Q und M graphisch dargestellt.

Anwendung bei Querträgern von Brücken etc.

§. 105. Gleichmässige Belastung. Als Anfang der x wählen wir wieder die eine Stütze A (Fig. 29) und bezeichnen mit l die Entfernung der Stützen und mit q die Last pro Längeneinheit. Der Stützendruck D ist gleich der halben Last, also $= \frac{1}{2} ql$. Daher wird für einen beliebigen Querschnitt C: $Q = -D + qx$ und $M = -Dx + \frac{1}{2} qx^2$, d. i.

Fig. 29.

$$42.\quad Q = -\tfrac{1}{2} q(l - 2x), \quad M = -\tfrac{1}{2} qx(l - x).$$

Taf. II. Fig 7 ist Q und M graphisch dargestellt. Q ist in der Mitte $= 0$ und wird an den Enden am grössten. M dagegen ist an den Enden $= 0$ und wird in der Mitte am grössten. In dem gewöhnlichen Falle (§. 84) liegt daher der gefährliche Querschnitt in der Mitte. Es wird

$$43.\quad \max Q = \tfrac{1}{2} ql, \quad \max M = \tfrac{1}{8} ql^2,$$

mithin ist die Festigkeitsbedingung $K = \frac{ql^2 a}{8W}$, $R = \frac{ql^2 a}{8W}$ oder

$$44.\quad ql = \frac{8KW}{la} = \frac{8RW}{la}.$$

Vielfache Anwendung bei Balkenbrücken aus Holz und Eisen, Balken in Gebäuden etc.

§. 106. Formänderung. Nach 41 (§. 79) wird

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{qx(l - x)}{2EW}.$$

Bei der Integration sind die Constanten durch die Bedingungen zu bestimmen, dass für $x = 0$ und $x = l$ $\eta = 0$ werden muss. Bei prismatischem Stabe kann man die Constanten auch durch die Bedingungen bestimmen, dass für $x = \frac{1}{2} l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und für $x = 0$ $\eta = 0$ wird. Es ergiebt sich so

$$45.\quad \eta = \frac{q}{24EW}(l^3 - 2lx^2 + x^3)x.$$

Digitized by Google

Taf. VII. Fig. 2 (stark) ist die elastische Linie dargestellt. Am grössten wird die Senkung in der Mitte und zwar ist dieselbe

$$46.\quad \eta = \frac{5}{384}\,\frac{q\,l^4}{E\,W} = 0{,}01302\,\frac{q\,l^4}{E\,W}\,.$$

Wenn der Stab mit der grössten zulässigen, durch 44 bestimmten Last belastet ist, so wird

$$47.\quad \eta = \frac{5}{48}\,\frac{K\,l^2}{E\,a} = \frac{5}{48}\,\frac{\mathfrak{K}\,l^2}{E\,a}\,.$$

Anwendung bei Brücken etc. und zur Bestimmung der grössten Spannung (K, $\mathfrak{K}$) durch Versuche.

§. 107. Körper von constanter Festigkeit. Bezeichnen wir für die Mitte Alles durch den Index 1, so wird nach 76 (§. 86):

$$48.\quad \frac{b\,h^2}{b_1\,h_1^{\,2}} = \frac{M}{M_1} = 4\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Hiernach erhält der Stab dieselbe Form, wie für eine bewegliche isolirte Last (§. 103 b). (Taf. III Fig. 9 und 10).

Für die Formänderung wird nach 77 (§. 86) $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{K}{Ee}$. Bezeichnen wir die Senkung in der Mitte eines Stabes von gleicher Festigkeit, d. h. mit gleichem mittleren Querschnitte, mit η_1, so wird nach 47 $\frac{K}{E} = \frac{48\,\eta_1\,a_1}{5\,l^2}$, mithin $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{48\,\eta_1\,a_1}{5\,l^2 a}$ oder

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{48\,\eta_1\,h_1}{5\,l^2 h}\,.$$

Bei constanter Höhe h ergiebt sich leicht

$$49.\quad \eta = \frac{24\,\eta_1}{5\,l^2}\,x\,(l - x).$$

$$50.\quad \eta = \frac{6}{5}\,\eta_1 = 1{,}200\,\eta_1\,.$$

Taf. VII. Fig. 2 (schwach) ist die elastische Linie dargestellt.

Bei constanter Breite wird $h = 2\,h_1\sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}$, oder, wenn man die Entfernung des variabelen Querschnittes von der Mitte mit x_1 bezeichnet, also $x = \frac{1}{2}\,l - x_1$ setzt, $h = h_1\sqrt{1 - \frac{x_1^{\,2}}{l^2}}$, folglich

$$\frac{d^2\eta}{dx_1^{\,2}} = \frac{48\,\eta_1}{5\,l\sqrt{l^2 - 4\,x_1^{\,2}}}\,.$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{24}{5}\,\frac{\eta_1}{l}\,\text{Arcsin}\,2\,\frac{x_1}{l}.$$

$$51.\quad \eta = \frac{6}{5}\,\eta_1\left[\pi - 4\,\frac{x_1}{l}\,\text{Arcsin}\,2\,\frac{x_1}{l} - 2\sqrt{1 - 4\,\frac{x_1^{\,2}}{l^2}}\right].$$

Die Senkung in der Mitte ($x_1 = 0$) ist

$$52.\quad \eta = \frac{6\,(\pi - 2)}{5}\,\eta_1 = 1{,}370\,\eta_1\,.$$

Digitized by Google

Bei ähnlichen Querschnitten wird $h = h_1 \sqrt[3]{4 \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}$, daher

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{48\,\eta_1}{5\,l \sqrt[3]{4\,l\,x\,(l-x)}}.$$

Nach 43 (§. 79) wird aber

$$\eta = x \frac{d\eta}{dx} - \int x \frac{d^2\eta}{dx^2},$$

mithin, da für $x = 0$ $\eta = 0$ und für $x = \frac{1}{2} l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$, $\eta = \eta$ wird,

$$\eta = \int_0^{\frac{1}{2}l} x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx = \frac{48\,\eta_1}{5\,l} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4\,l\,x\,(l-x)}}$$

$$= \frac{48}{5} \eta_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{x}{l}\,d\frac{x}{l}}{\sqrt[3]{4 \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)}}.$$

Das bestimmte Integral ergiebt sich durch Berechnung nach der Simpson'schen Regel zu 0,136 und daher wird

$$53. \quad \eta = 1{,}303\,\eta_1.$$

§. 108. Stab mit überragenden Enden. Der in seiner ganzen Länge gleichmässig belastete Stab rage über jede Stütze um ein gleiches Stück hinaus (Fig. 30). Als Coordinatenanfang wählen wir die Mitte des Stabes und bezeichnen mit

L die ganze Länge DE des Stabes,
l die Entfernung AB der Stützen,
η die Senkung in der Mitte,
η_1 die Senkung an den Enden.

Fig. 30.

In den ausserhalb der Stützen liegenden Theilen bezeichnen wir Alles durch einen Apostroph.

Der Druck auf jede Stütze ist $D = \frac{1}{2} q L$. Ferner wird $Q = -D + q\left(\frac{1}{2} L - x\right)$, $Q' = q\left(\frac{1}{2} L - x\right)$, d. i. nach Einsetzung des Werthes von D

$$54. \quad Q = -q\,x, \qquad Q' = \tfrac{1}{2} q\,(L - 2x).$$

Ferner wird $M = -D\left(\frac{1}{2} l - x\right) + \frac{1}{2} q \left(\frac{1}{2} L - x\right)^2$, $M' = \frac{1}{2} q \left(\frac{1}{2} L - x\right)^2$, d. i. nach Einsetzung des Werthes von D

$$55. \quad M = \tfrac{1}{8} q\,(L^2 - 2\,L\,l + 4\,x^2), \qquad M' = \tfrac{1}{8} q\,(2\,L - x)^2.$$

Das Maximum erreicht M für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2} l$, d. i. in der Mitte oder an den Stützen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von M mit M_0 und M_1, so ist

$$56. \quad M_0 = \tfrac{1}{8} q\,L\,(L - 2\,l), \qquad M_1 = \tfrac{1}{8} q\,(L - l)^2.$$

M_1 ist stets positiv, M_0 dagegen ist positiv, wenn $l < \frac{1}{2} L$, negativ, wenn

Digitized by Google

$l > \frac{1}{2}L$ ist. Ist $l < \frac{1}{2}L$, so ist M_0 und M_1 positiv und stets $M_1 > M_0$. Ist $l > \frac{1}{2}L$, so ist $-M_0 = M_1$, wenn $l = (2-\sqrt{2})\,L = 0{,}5858\,L$ ist. Ist l kleiner, so ist $-M_0 < M_1$, ist l grösser, so ist $-M_0 > M_1$.

Als Gleichungen der elastischen Linie ergeben sich leicht, wenn man beachtet, dass für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und für $x = \frac{1}{2}l$ $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{d\eta}{dx}$, $\eta' = \eta = 0$ werden muss,

$$57.\quad \begin{cases} \eta = \frac{1}{384}\frac{q}{EW}\left[-l^2(6L^2-12Ll+l^2)+24L^2x^2-48Llx^2+16x^4\right], \\ \eta' = \frac{1}{384}\frac{q}{EW}\left[-l^2(6L^2-16Ll+l^2)-24Ll^2x+24L^2x^2-32Lx^3+16x^4\right]. \end{cases}$$

Daher wird die Senkung in der Mitte und an den Enden

$$58.\quad \begin{cases} \eta_0 = -\frac{1}{384}\frac{q\,l^2}{EW}(6L^2-12Ll+l^2), \\ \eta_1 = +\frac{1}{384}\frac{q}{EW}(3L^4-18L^2l^2+16Ll^3-l^4). \end{cases}$$

Für $l = (6-\sqrt{30})\,L = 0{,}523\,L$ wird $\eta_0 = 0$ und für $l = 0{,}597\,L$ wird $\eta_1 = 0$. Für $l = 0{,}584\,L$ wird $\eta_0 = \eta_1$.

Nicht ohne Wichtigkeit ist in diesem Falle die horizontale Verrückung ξ eines Punktes. Nach 50 (§. 80) wird

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2,\quad \frac{d\xi'}{dx} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\eta'}{dx}\right)^2,\ \text{d. i.}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{4608}\left(\frac{q}{EW}\right)^2\left[36L^2(L-2l)^2+96L(L-2l)x^2+64x^4\right]x^2,$$

$$\frac{d\xi'}{dx} = -\frac{1}{4608}\left(\frac{q}{EW}\right)^2[9L^2l^4-36L^3l^2x+36L^2(L^2+2l^2)x^2-48L(3L^2+l^2)x^3+240L^2x^4-192L^2x^5+64x^6].$$

Die einmalige Integration, bei welcher zu beachten ist, dass für $x = 0$ $\xi = 0$ und für $x = \frac{1}{2}l$ $\xi' = \xi$ werden muss, giebt die Ausdrücke für ξ, ξ'. Bezeichnet man die Summe der Verrückungen beider Enden oder die Längenänderung der Horizontalprojection des Stabes mit λ, so ergiebt sich λ, indem man im Ausdrucke für ξ' $x = \frac{1}{2}L$ setzt. Es ergiebt sich, wenn man das Verhältniss $\frac{l}{L}$ mit n bezeichnet,

$$59.\quad \lambda = \frac{1}{322560}\frac{q^2L^7}{E^2W^2}(45-315n^2+735n^4-336n^5+7n^6).$$

Die sich hiernach ergebenden Werthe für λ bei verschiedener Lage der Stützen sind Taf. VII Fig. 4 als Ordinaten dargestellt. Am grössten wird hiernach λ, wenn der Stab an seinen Enden unterstützt ist. Für diesen Fall wird $\lambda = 0{,}000422\,\frac{q^2L^7}{E^2W^2}$. Wenn der Stab in der Mitte unterstützt so wird $\lambda = 0{,}000139\,\frac{q^2L^7}{E^2W^2}$. Am kleinsten wird λ für $\frac{d\lambda}{dn} = 0$, d. i. für

$$60.\quad \begin{cases} n^4-40n^3+70n^2-15 = 0, \\ n = 0{,}5594, \end{cases}$$

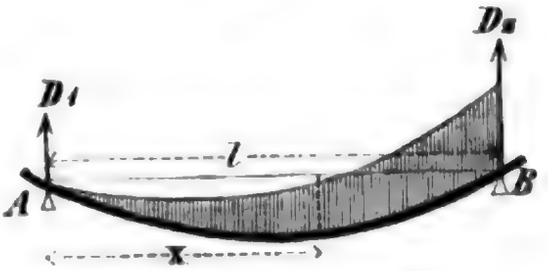
Digitized by Google

und zwar wird $\min\lambda = 0{,}00000067\,\frac{q^2 L^7}{E^2 W^2}$. Die Theile des Stabes verhalten sich in diesem Falle wie 0,22 : 0,56 : 0,22 oder nahezu wie 2 : 5 : 2.

Anwendung bei Bestimmung der zweckmässigsten Lage der Unterstützungspunkte von Messstäben für Basismessungen.

§. 109. Belastung durch eine ungleichmässig vertheilte Last. Um die Behandlung dieses Falles zu zeigen, wählen wir folgendes Beispiel: Der Stab sei durch eine stetig vertheilte Last belastet, welche an einer Stütze Null ist und nach der anderen Stütze hin gleichmässig zunimmt (Fig. 31). Die erstere Stütze nehmen wir als Anfang der x an und bezeichnen die mittlere Last oder die Last in der Mitte pro Längeneinheit mit q. Alsdann können wir setzen

Fig. 31.



$$q = 2\,q\,\frac{x}{l}\,.$$

Nach 2 und 3 (§. 61) wird nun

$$Q = \int q\,dx = \frac{2\,q}{l}\int x\,dx = \frac{q\,x^2}{l} + C,$$

$$M = \int Q\,dx = \frac{q\,x^3}{3\,l} + C\,x + C_1.$$

Für $x = 0$ wird $M = 0$, daher $C_1 = 0$; für $x = l$ wird ebenfalls $M = 0$, daher $0 = \frac{1}{3}q\,l^2 + C\,l$, $C = -\frac{1}{3}q\,l$, mithin

$$61.\quad Q = -\frac{1}{3}q\,l\left(1 - 3\frac{x^2}{l^2}\right),\quad M = -\frac{1}{3}q\,l\,x\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Taf. II Fig. 8 ist Q und M graphisch dargestellt. Q ist für $x = 0$ und $x = l$ $= -\frac{1}{3}q\,l$ und $+\frac{2}{3}q\,l$; diese Transversalkräfte sind, positiv genommen, zugleich die Stützendrücke. Für $x = l\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577\,l$ wird $Q = 0$. Für diese Stelle wird gleichzeitig M zum Maximum; dasselbe ist $\max M = \frac{1}{3}q\,l^2\sqrt{\frac{1}{3}}\,(1 - \frac{1}{3})$ oder

$$62.\quad \max M = \frac{2\sqrt{3}}{27}q\,l^2 = 0{,}1283\,q\,l^2,$$

während bei gleichmässiger Belastung $\max M = \frac{1}{8}q\,l^2 = 0{,}1250\,q\,l^2$ wird, so dass beide Momente bei gleicher Gesammtlast nur wenig von einander abweichen.

Für die Formänderung wird bei constantem Querschnitte

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{q}{3\,E\,W\,l}\,x\,(l^2 - x^2).$$

Die zweimalige Integration giebt, wenn man die Constanten durch die Bedingung bestimmt, dass für $x = 0$ und $x = l$ $\eta = 0$ wird,

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{q}{180\,E\,W\,l}\,(7\,l^4 - 30\,l^2x^2 + 15\,x^4),$$

$$63.\quad \eta = \frac{q}{180\,E\,W\,l}\,x\,(7\,l^4 - 10\,l^2\,x^2 + 3\,x^4).$$

Digitized by Google

Demnach wird η zum Maximum für $7\,l^4 - 30\,l^2x^2 + 15\,x^4 = 0$ oder

$$64. \quad x = l\sqrt{1 - \sqrt{\tfrac{8}{15}}} = 0{,}5193\,l$$

und zwar ergiebt sich als grösste Senkung

$$65. \quad \eta = 0{,}01304\,\frac{q\,l^3}{EW},$$

d. i. fast genau ebenso gross, als bei gleich grosser gleichmässig vertheilter Last nach 46 (§. 106).

Anwendung bei den Pfosten von Senkkasten oder Caissons etc.

§. 110. Beanspruchung bei unregelmässiger Belastung.

Bezeichnen wir den Stützendruck auf die linke Stütze, welche wir als Anfang der x annehmen, mit D, so ist

$$66. \quad Q = -D + \int_0^x q\,dx = -D + f(x).$$

wenn wir $\int q\,dx = f(x)$ setzen. Mit Rücksicht darauf, dass für $x = 0$ $M = 0$ ist, wird

$$67. \quad M = \int_0^x Q\,dx = -Dx + \int_0^x f(x)\,dx = -Dx + \varphi(x),$$

wenn wir $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$ setzen. Diese Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ lassen sich, wenn q für jeden Punkt gegeben ist, durch direkte Summirung, entweder durch Rechnung oder graphisch, genauer aber noch durch die Simpson'sche Regel bestimmen. Für $x = l$ wird auch $M = 0$, daher $0 = -Dl + \varphi(l)$, also $D = \frac{\varphi(l)}{l}$, womit D und somit auch Q, M für alle Stellen bestimmt ist.

Wenn die Last symmetrisch in Beziehung auf die Mitte vertheilt ist, so ist jeder Stützendruck gleich der halben Last, also

$$68. \quad D = \frac{1}{2}\int_0^l q\,dx.$$

Man berechnet daher am besten zunächst D und sodann Q und M nach 66 und 67.

Beispiel. Es sei $l = 12^m$; diese ganze Länge sei in 10 gleiche Theile von $1{,}2^m$ Länge getheilt und für jeden Theilpunkt q durch folgende Tabelle bestimmt. Colonne 3 enthält die in jedem Theile liegende Last, z. B. zwischen $x = 0{,}2\,l$ und $x = 0{,}3\,l$ $\frac{1{,}6 + 1{,}9}{2} \cdot 1{,}2 = 2{,}10$. Durch successive Addition dieser Zahlen erhält man $f(x)$, z. B. für $x = 0{,}3\,l$, $f(x) = 1{,}32 + 1{,}74 + 2{,}10 = 5{,}16$. Columne 5 enthält $\int f(x)\,dx$ für die Ausdehnung eines jeden Theiles, z. B. zwischen $x = 0{,}3\,l$ und $0{,}4\,l$ $\frac{3{,}06 + 5{,}16}{2} \cdot 1{,}2 = 4{,}93$. Durch successive Addition dieser Zahlen erhält man $\varphi(x)$, z. B. für $x = 0{,}3\,l$ $\varphi(x) = 0{,}79 + 2{,}63 + 4{,}93 = 8{,}35$. Für $x = l$ ist $\varphi(l) = 133{,}08$, also $D = \frac{133{,}08}{12} = 11{,}09$. Daher ist nun $Q = -11{,}09 + f(x)$, z. B. für $x = 0{,}3\,l$ $Q = -11{,}09 + 5{,}16 = -5{,}93$.

Digitized by Google

Columne 8 enthält $\int Q\,dx$ für die Ausdehnung eines Theiles, z. B. zwischen $x = 0{,}3\,l$ und $x = 0{,}4\,l$ $\frac{8{,}03 + 5{,}93}{2} \cdot 1{,}2 \quad 8{,}37$. Durch successive Addition dieser Zahlen erhält man M, z. B für $x = 0{,}3\,l$ $M = -12{,}51 - 10{,}67 - 8{,}37 = -31{,}55$, oder auch $M = -Dx + \varphi(x) = -11{,}09 \cdot 3{,}6 + 8{,}35 = -31{,}55$

$\frac{x}{l}$	q		f(x)		$\varphi(x)$	Q		M
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,9		0		0	− 11,09		0
		1,32		0,79			− 12,51	
0,1	1,3		1,32		0,79	− 9,77		12,51
		1,74		2,63			− 10,67	
0,2	1,6		3,06		3,42	− 8,03		23,18
		2,10		4,93			− 8,37	
0,3	1,9		5,16		8,35	− 5,93		31,55
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,9	2,3		22,08		105,04	+ 10,99		14,74
		2,58		28,04			+ 14,74	
1	2,0		24,66		133,08	+ 13,57		0

Für x 0,4 l, 0,5 l, 0,6 l wird M = 37,19, 39,69, 38,93. Nach der in der Anmerkung*) gegebenen Regel wird daher M zum Maximum für $x = 0{,}527\,l$ und zwar ist max M = 39,81.

Anwendung bei Blech- und Gitterbrücken.

§. 111. Formänderung bei unregelmässiger Begrenzung und beliebiger Belastung.

Es ist

$$69. \quad E\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{W} = f(x).$$

$$70. \quad E\frac{d\eta}{dx} = \int_0^x f(x)\,dx + C = \varphi(x) + C.$$

$$71. \quad E\eta = \int_0^x \varphi(x)\,dx + C\,x = \psi(x) + C\,x.$$

Für $x = l$ wird $\eta = 0$, daher $0 = \psi(l) + C\,l$, $C = -\frac{\psi(l)}{l}$. Hiernach kann die Rechnung in derselben Weise geführt werden, wie im vorigen Paragraph.

Wenn der Körper und die Belastung in Beziehung auf die Mitte symmetrisch sind, was meist der Fall ist, so kann man zur Berechnung der Senkung η in der Mitte ein einfacheres Verfahren anwenden. Es ist nämlich nach 43 (§. 79)

$$\eta = x\frac{d\eta}{dx} - \int x\frac{d^2\eta}{dx^2}\,dx + C.$$

*) Anmerk. Wenn y eine Funktion von x ist und für $x = x_2 - e$, $x = x_2$, $x = x_2 + e$ die Werthe y_1, y_2, y_3 hat, so wird annähernd y zum Maximum für

$$x = x_2 + \frac{e}{2}\frac{y_1 - y_3}{y_1 - 2y_2 + y_3}$$

und zwar ist

$$\max y = y_2 - \frac{1}{8}\frac{(y_1 - y_3)^2}{y_1 - 2y_2 + y_3}.$$

Genau ist dies richtig, wenn y von der Form $y = a + bx + cx^2$ ist.

Digitized by Google

Für $x = 0$ wird $\eta = 0$ und in der Mitte oder für $x = \frac{1}{2} l$ wird $\frac{d\eta}{dx} = 0$, mithin ist

$$0 = 0 - \int_0 x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx + C_1$$

$$\vartheta = 0 - \int_{\frac{1}{2}}^{l} x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx + C.$$

daher

$$72. \quad \vartheta = \int_0^{\frac{1}{2}l} x \frac{d^2\eta}{dx^2} dx = \frac{1}{E} \int_0^{\frac{1}{2}l} \frac{M\, x\, dx}{W}.$$

Ist die Hälfte des Trägers in eine gerade Anzahl, nämlich n, gleicher Theile getheilt und sind für die Theilpunkte die Momente $M_0, M_1, M_2 \ldots$, die Trägheitsmomente $W_0, W_1, W_2, \ldots$, so wird nach der Simpson'schen Regel

$$73. \quad \vartheta = \frac{2\,l}{3\,E}\left[2\left(1\frac{M_1}{W_1} + 3\frac{M_3}{W_3} + 5\frac{M_5}{W_5} + \ldots\right) + \left(2\frac{M_2}{W_2} + 4\frac{M_4}{W_4} + \ldots\right)\right].$$

Beispiel. Für das Beispiel des vorigen §. habe der Querschnitt das in der folgenden Tabelle angegebene Trägheitsmoment. Die in der Tabelle zusammengestellte Rechnung wird aus der im vorigen §. gegebenen Erläuterung leicht verständlich werden.

$\frac{x}{l}$	M	W	f(x)		$\varphi(x)$		$\psi(x)$	$E\eta$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,13	0	33,8	0	20,3	0	0
0,1	12,51	0,28	56,4	62,0	33,8	77,8	20,3	260,7
0.2	23,18	0,49	47,0	54,2	95,8	147,5	98,1	464,0
0,3	31,55	0,73	43,3	.	150,0	.	245,6	597,5
.	.	.	.	.	.	.	.	.
0,9	14,74	0,43	34,4	20,6	443,8	544,9	2266,0	263,4
1	0	0,21	0		464,4		2810,9	0

$$C = \frac{2810,9}{12} = 234,2, \quad E\eta = 234,2\, x + \psi(x).$$

Anwendung bei Blech- und Gitterbrücken.

XII. Kapitel.

Bedingte Belastung bei Stäben mit einem Felde.

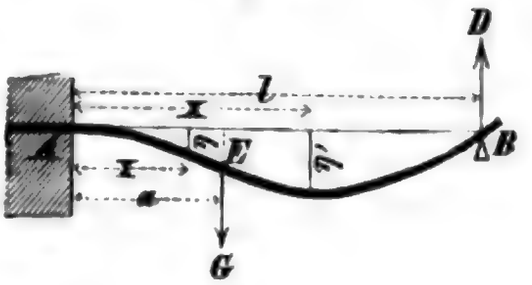
A. Prismatischer Stab, welcher an einem Ende eingespannt, am anderen unterstützt ist.

§. 112. Belastung durch eine isolirte Last. Der Stab sei in einem beliebigen Punkte E (Fig. 32) belastet und die Stütze B habe eine solche Höhe, dass sie den unbelasteten Stab berührt. Als Anfang

Digitized by Google

der x wählen wir das eingespannte Ende A und bezeichnen mit l die Länge AB des Stabes, mit G die Last, mit a den Abstand AE derselben vom eingespannten Ende, mit n das Verhältniss $\frac{a}{l}$ und mit D den Druck auf die Stütze B. Innerhalb der Strecke BE bezeichnen wir Alles durch einen Apostroph. Alsdann ist

Fig. 32.



$$\text{a.}\quad Q = D - G, \quad Q' = D,$$

$$\text{b.}\quad M = -D(l-x) + G(a-x), \quad M' = -D(l-x).$$

Setzt man $\frac{d^2\eta}{dx^2} = M$, $\frac{d^2\eta'}{dx^2} = M'$ und integrirt, wobei man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und für $x = a$ $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{d\eta}{dx}$ wird, so ergiebt sich

$$\text{c.}\quad \begin{cases} \frac{d\eta}{dx} = \frac{x}{2EW}\left[D(2l-x) - G(2a-x)\right], \\ \frac{d\eta'}{dx} = \frac{1}{2EW}\left[Dx(2l-x) - Ga^2\right]. \end{cases}$$

Die abermalige Integration giebt, wenn man die Constanten durch die Bedingung bestimmt, dass für $x = 0$ $\eta = 0$ und für $x = a$ $\eta' = \eta$ wird,

$$\text{d.}\quad \begin{cases} \eta = \frac{x^2}{6EW}\left[D(3l-x) - G(3a-x)\right], \\ \eta' = \frac{1}{6EW}\left[Dx^2(3l-x) - Ga^2(3x-a)\right]. \end{cases}$$

Für $x = l$ muss $\eta' = 0$ werden, mithin $2Dl^3 - Ga^2(3l-a) = 0$ und hieraus ergiebt sich als Stützendruck

$$74.\quad D = G\frac{a^2(3l-a)}{2l^3} = \frac{1}{2}Gn^2(3-n).$$

Liegt die Last in der Mitte des Stabes, so wird $D = \frac{1}{2}G\frac{1}{4}(3-\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}G$.

§. 113. Beanspruchung. Setzen wir den Ausdruck von D in Ausdrücke a und b für Q und M, so ergiebt sich

$$75.\quad \begin{cases} Q = -\frac{1}{2}G\left[2 - n^2(3-n)\right], \quad Q' = \frac{1}{2}Gn^2(3-n), \\ M = \frac{1}{2}Gl(1-n)\left[n(2-n) - (2+2n+n^2)\frac{x}{l}\right], \\ M' = \frac{1}{2}Gln^2(3-n)\left(1-\frac{x}{l}\right). \end{cases}$$

Taf. II Fig. 9 ist Q und M für $n = \frac{1}{2}$ graphisch dargestellt. Das Ma-

ximum kann M nur für $x = 0$ oder $x = a$ erreichen. Bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von M mit M_0, M_1, so ist

76. $M_0 = + \frac{1}{2} G l n (1 - n) (2 - n)$, $M_1 = - \frac{1}{2} G l n^2 (1 - n) (3 - n)$.

Hiernach ist stets M_0 positiv, M_1 negativ. Beide Momente werden gleich, wenn

$$n = 2 - \sqrt{2} = 0{,}5858$$

ist. Ist n grösser, so ist $M_0 > M_1$, ist n kleiner, so ist $M_0 < M_1$.

Bezeichnen wir den Abstand der obersten und untersten Faser von der neutralen Axe mit a_1, a_2, so ist in der Festigkeitsbedingung $K = \frac{Ma}{W}$. $\mathfrak{K} = \frac{Ma}{W}$ für A $a = a_1$, $a = a_2$ und für E $a = a_2$, $a = a_1$ zu setzen, weil in A die oberen Fasern, in E aber die unteren Fasern ausgedehnt werden. Demnach wird für den Bruch

77.
$$\begin{cases} \text{in A, durch Zug} & G = \frac{2 K W}{n (1 - n) (2 - n) l a_1}, \\ \text{„ A, „ Druck} & G = \frac{2 \mathfrak{K} W}{n (1 - n) (2 - n) l a_2}, \\ \text{„ E. „ Zug} & G = \frac{2 K W}{n^2 (1 - n) (3 - n) l a_2}, \\ \text{„ E, „ Druck} & G = \frac{2 \mathfrak{K} W}{n^2 (1 - n) (3 - n) l a_1}. \end{cases}$$

Von diesen vier Werthen ist nur der kleinste beizubehalten.

Beispiel. Ist z. B. der Querschnitt ein Dreieck mit nach oben gekehrter Spitze (△), so ist $a_1 = 2 a_2$. Das Verhältniss der vier Werthe von G wird daher

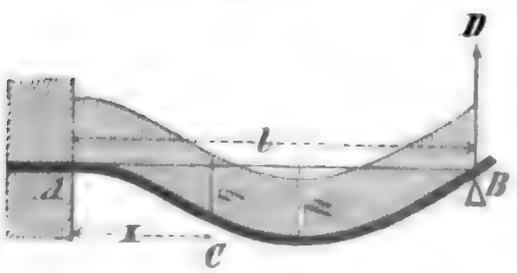
$$\frac{K}{2 (2-n)}, \quad \frac{\mathfrak{K}}{2-n}, \quad \frac{K}{n(3-n)}, \quad \frac{\mathfrak{K}}{2 n (3-n)}$$

Ist $K < 2 \mathfrak{K}$, wie bei fast allen Materialien, so wird der Stab in A durch Zug oder in E durch Druck brechen, je nachdem $n (3 - n) \gtrless 2 - n$ oder $n \gtrless 2 - \sqrt{2}$ ist.

Anwendung bei Brücken-Querträgern mit drei Stützpunkten.

§. 114. Belastung durch eine gleichmässige Last. Die Stütze B (Fig. 33) habe wiederum eine solche Lage, dass sie den unbelasteten Stab berührt. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Falles bei und bezeichnen ausserdem die Last pro Längeneinheit mit q, so wird

Fig. 33.



$$Q = D - q (l - x),$$
$$M = - D (l - x) + \tfrac{1}{2} q (l - x)^2.$$

Setzen wir $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$ und integriren zweimal, wo wir die Constanten durch die Bedingungen bestimmen, dass für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und $\eta = 0$ wird, so ergiebt sich

$$\eta = \frac{x^2}{24 E W} \left[4 D (3 l - x) - q (6 l^2 - 4 l x + x^2) \right].$$

Digitized by Google

Für $x = l$ muss ebenfalls $\eta = 0$ werden, daher $0 = 8 D l - 3 q l^2$ und hieraus ergiebt sich als Stützendruck

$$78. \quad D = \tfrac{3}{8} q l.$$

§. 115. Beanspruchung. Substituirt man diesen Werth für D in die Ausdrücke für Q und M, so ergiebt sich

$$79. \quad \begin{cases} Q = \frac{1}{8} q (5 l - 8 x), \\ M = \frac{1}{8} q (l - x) (l - 4 x). \end{cases}$$

Taf. II. Fig. 10 sind Q und M graphisch dargestellt. M wird für $x = 0$ und $x = \frac{1}{4} l$ Null und ist für $x < \frac{1}{4} l$ positiv, für $x > \frac{1}{4} l$ aber negativ. Das positive Maximum erreicht M für $x = 0$, das negative für $Q = 0$, d. i. für $x = AE = \frac{5}{8} l$. Bezeichnen wir diese Maxima von M mit M_0, M_l, so wird

$$80. \quad M_0 = + \tfrac{1}{8} q l^2, \quad M_l = - \tfrac{9}{128} q l^2 = - \tfrac{9}{16} M_0.$$

Den grössten absoluten Werth erreicht also M am eingespannten Ende; ist $a = \mathfrak{a}$ oder $K = \mathfrak{K}$, so liegt also der gefährliche Querschnitt am eingespannten Ende. Im Allgemeinen ergiebt sich als Tragkraft wie im vorigen Falle für den Bruch

$$81. \quad \begin{cases} \text{in A durch Zug} \quad q l = \dfrac{8 K W}{l a_1}, \\ \text{„ A „ Druck} \quad q l = \dfrac{8 \mathfrak{K} W}{l a_2}, \\ \text{„ E „ Zug} \quad q l = \dfrac{128 K W}{q l a_2}, \\ \text{„ E „ Druck} \quad q l = \dfrac{128 \mathfrak{K} W}{q l a_1}. \end{cases}$$

Beispiel. Ist z. B. der Querschnitt ein Dreieck mit unten liegender Spitze ($\bigtriangledown$), so ist $a_2 = 2a$; die Verhältnisse der Werthe von $q l$ werden daher

$$18 K, \quad 9 \mathfrak{K}, \quad 16 K, \quad 32 \mathfrak{K}.$$

Es kann also nur der zweite oder dritte Werth Gültigkeit haben, d. h. es kann nur ein Bruch in A durch Druck oder in E durch Zug entstehen. Beim Gusseisen ist nahe $K = \frac{1}{6} \mathfrak{K}$, also $16 K < 9 \mathfrak{K}$; hier wird also ein Bruch in E durch Zug entstehen. Beim Holze und Schmiedeeisen ist $\mathfrak{K} < K$, also auch $9 \mathfrak{K} < 16 K$; hier wird also nur ein Bruch in A durch Druck entstehen können.

Anwendung bei Balkenbrücken und Balken in Gebäuden mit zwei gleichen Feldern.

§. 116. Formänderung. Setzen wir im Ausdrucke für η in §. 114 $D = \frac{3}{8} q l$, so ergiebt sich

$$82. \quad \eta = \frac{q x^2}{38 E W} (l - x) (3 l - 2 x).$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{q x}{48 E W} (6 l^2 - 15 l x + 8 x^2).$$

Taf. VII Fig. 5 ist die elastische Linie dargestellt. Für $x = \frac{1}{4} l$ wird $M = 0$, hier liegt also ein Wendepunkt der Curve. Das Maximum erreicht η für $\frac{d\eta}{dx} = 0$, also für $6 l^2 - 15 l x + 8 x^2 = 0$ oder für

Digitized by Google

$$83. \quad x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} l = 0{,}5785\, l.$$

Als Maximum η von η selbst ergiebt sich

$$84. \quad \eta = \frac{39 + 55\sqrt{33}}{16^4} \frac{q\, l^4}{E\, W} = 0{,}0054 \frac{q\, l^4}{E\, W}.$$

B. Prismatischer Stab, welcher an beiden Enden horizontal eingespannt ist.

§. 117. Allgemeines. Durch die Einspannung werden bei einer Belastung des Stabes auf die eingespannten Theile gewisse Drücke erzeugt. Dieselben müssen zum Theil nach oben, zum Theil nach unten gerichtet sein; denn wären sie sämmtlich nach derselben Seite gerichtet, so könnten sie, wie leicht einzusehen, mit der Belastung des Stabes nicht gleichzeitig gegen Verschiebung in verticaler Richtung und gegen Drehung im Gleichgewichte sein.

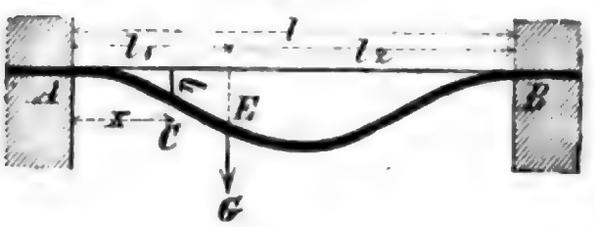
Wir bezeichnen die Summe der nach oben gerichteten Drücke an beiden Enden mit D_1', D_2', die Summe der unten gerichteten Drücke mit D_1'', D_2'' und die Abstände der Resultanten dieser Drücke von den Enden A, B (Fig. 34) des freien Stabtheiles bezüglich mit a_1', a_2', a_1'', a_2''; ferner die Transversalkräfte für die Punkte A, B mit Q_1, Q_2 und die Biegungsmomente für dieselben mit M_1, M_2. Alsdann ist

$$Q_1 = -D_1' + D_1'', \qquad Q_2 = D_2' - D_2'';$$
$$M_1 = -D_1' a_1' + D_1'' a'', \qquad M_2 = -D_2' a_2' + D_2'' a_2''.$$

Als Anfang der x wählen wir das eine (linke) Ende A des freien Stabtheiles.

§. 118. Belastung durch eine isolirte Last. Ist der Stab an einer beliebigen Stelle E (Fig. 34) durch eine isolirte Last G belastet, welche von den beiden Stützen die Entfernung l_1, l_2 hat, so fordert zunächst das Gleichgewicht des ganzen Stabes die Erfüllung der Bedingungen $D_1' + D_2' - D_1'' - D_2'' = G$, $D_1'(l_1 + a_1') - D_1''(l_1 + a_1'') = D_2'(l_2 + a_2') - D_2''(l_2 + a_2'')$ oder einfacher

Fig. 34.



$$a. \quad -Q_1 + Q_2 = G, \quad M_1 + Q_1 l_1 = M_2 - Q_2 l_2.$$

Innerhalb der Strecke AE ist $M = -D_1'(a_1' + x) + D_1''(a_1'' + x)$ oder

$$b. \quad M = M_1 + Q_1 x.$$

Setzen wir $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\, W}$ und integriren zweimal, wobei die Constanten Null werden, weil für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und $\eta = 0$ wird, so ergiebt sich

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{2\, E\, W}\left(2\, M_1 + Q_1 x\right) x,$$

$$c. \quad \eta = \frac{1}{6\, E\, W}\left(3\, M_1 + Q_1 x\right) x^2.$$

Digitized by Google

Für die Strecke BE würden sich gleiche Ausdrücke ergeben, wenn man B als Anfang der x annimmt, nur würde $-Q_2$, M_2 für Q_1, M_1 zu setzen sein. Im Punkte E müssen $\frac{d\eta}{dx}$ und η in beiden Strecken denselben Werth annehmen, $\frac{d\eta}{dx}$ jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen. Daher wird

$$\text{d.} \quad \begin{cases} (2M_1 + Q_1 l_1) l_1 = -(2M_2 - Q_2 l_2) l_2, \\ (3M_1 + Q_1 l_1) l_1^2 = \quad (3M_2 - Q_2 l_2) l_2^2. \end{cases}$$

Durch die vier Gleichungen a und d ist Q_1, Q_2, M_1, M_2 bestimmt. Aus a folgt

$$\text{e.} \quad Q_1 l = M_1 - M_2 - G l_2, \quad Q_2 l = M_1 - M_2 + G l_1;$$

dies in die Gleichungen d gesetzt, giebt

$$(M_1 + M_2) l = G l_1 l_2,$$
$$M_1 l (2 l_1 - l_2) - M_2 l (2 l_2 - l_1) = G l_1 l_2 (l_1 - l_2)$$

und hieraus ergiebt sich

$$85. \quad M_1 = G \frac{l_1 l_2^2}{l^2}, \quad M_2 = G \frac{l_1^2 l_2}{l^2}$$

und nun nach e:

$$86. \quad Q_1 = -G \frac{l_2^2 (3 l_1 + l_2)}{l^3}, \quad Q_2 = +G \frac{l_1^2 (l_1 + 3 l_2)}{l^3}.$$

Taf. VI Fig. 1 ist Q_1, Q_2 und M_1, M_2 für eine veränderliche Lage der Last graphisch dargestellt.

§. 119. Beanspruchung. Bezeichnen wir innerhalb der Strecke BE Alles durch einen Apostroph, so wird

$$87. \quad \begin{cases} Q = Q_1, \quad Q' = Q_1 + G = Q_2, \\ M = M_1 + Q_1 x, \quad M' = M_2 - Q_2 (l - x). \end{cases}$$

Taf. VI Fig. 2 ist hiernach Q und M für den Fall, dass die Last in der Mitte liegt, graphisch dargestellt.

a) Es frägt sich zunächst, für welche Lage der Last Q für irgend einen Querschnitt C am grössten wird. Liegt die Last links vom fraglichen Querschnitte, so ist $Q = Q_2$, Q_2 aber wird, wenn die Last nach rechts rückt, grösser (Taf. V Fig. 1). Liegt die Last rechts vom fraglichen Querschnitte, so ist $Q = Q_1$, Q_1 aber wird, wenn die Last nach links rückt, grösser. Demnach wird Q bei veränderlicher Lage der Last für irgend einen Querschnitt am grössten, wenn die Last über demselben liegt. Setzen wir x für l_1, $l - x$ für l_2, so wird nach 87 und 86 (vergl. §. 102):

$$88. \quad \max(-Q) = -G \frac{(l-x)^2 (l + 2x)}{l^3}, \quad \max(+Q) = G \frac{x^2 (3l - x)}{l^3}.$$

Taf. VI Fig. 1 ist max Q graphisch dargestellt.

b) Da das Moment M in Beziehung auf x vom ersten Grade ist, so kann es nur für die Punkte A, B oder E zum Maximum werden. Die Momente in A, B sind M_1, M_2; bezeichnen wir noch das Moment für E mit M_0, so ist $M_0 = M_1 - Q_1 l_1$, d. i.

$$89. \quad M_0 = -2G \frac{l_1^2 l_2^2}{l^3}, \quad M_1 = +G \frac{l_1 l_2^2}{l^2}, \quad M_2 = +G \frac{l_1^2 l_2}{l^2}.$$

Taf. VI Fig. 1 ist M_0, M_1, M_2 für eine veränderliche Lage der Last

Digitized by Google

graphisch dargestellt. Ist $l_2 > l_1$, so ist $M_1 > M_2$; ist $l_1 > l_2$, so ist $M_1 < M_2$, d. h. von den beiden Momenten an den Enden ist das Moment für das der Last am nächsten liegende Ende am grössten. Ist $l_2 > l_1$, so ist also $M_1 > M_2$ und $-M_0 < M_1$, M_0 kann daher nicht absolutes Maximum sein. Das absolut grösste Moment findet also an dem der Last am nächsten liegenden Ende statt. Nur wenn die Last in der Mitte liegt, wird

$$90. \quad -M_0 = M_1 = M_2 = \tfrac{1}{8} G l.$$

Es ist nun leicht, die Festigkeitsbedingungen aufzustellen. Ist $a = \mathfrak{a}$, der $K = \mathfrak{K}$, so ist, wenn $l_1 < l_2$, M_1 für die Festigkeitsbedingung massgebend. Wenn ausserdem die Last in der Mitte liegt, so bricht der Stab in A, B und E gleich leicht. In diesem Falle wird $K' = \frac{M_1 a}{W} = \frac{G l a}{8 W}$ oder

$$91. \quad G = \frac{8 K' W}{l a};$$

Setzen wir im Ausdrucke 89 von M_1 $l - l_1$ für l_2, so wird

$$M_1 = G \frac{l_1 (l - l_1)^2}{l^2}$$

und hiernach wird M_1 zum Maximum für

$$92. \quad l_1 = \tfrac{1}{3} l.$$

Ist $a = \mathfrak{a}$ oder $K = \mathfrak{K}$, so ist die Beanspruchung also am grössten, wenn die Last um $\frac{1}{3}$ der Stablänge von einem Ende entfernt ist. Für diese ungünstigste Belastungsweise wird

$$93. \quad M_1 = \tfrac{4}{27} G l$$

und als Tragkraft ergiebt sich

$$94. \quad G = \frac{27 K' W}{4 l a},$$

so dass die Last nur $\frac{27}{4.8} = \frac{27}{32} = 0{,}844$ von derjenigen Last ist, welche der Stab in seiner Mitte tragen kann.

§. 120. Formänderung. Substituiren wir in den Ausdruck c für η in §. 118 für Q_1 und M_1 ihre Werthe, so ergiebt sich für die Strecke AE

$$95. \quad \eta = \frac{G l_2^2 x^2}{6 E W l^3} \left(3 l l_1 - (3 l_1 + l_2) x \right),$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{G l_2^2 x}{2 E W l^3} \left[2 l l_1 - (3 l_1 + l_2) x \right].$$

$\frac{d\eta}{dx}$ wird innerhalb AE nur zu Null, wenn $l_1 > \frac{1}{2} l$ ist, so dass η sein Maximum in der grösseren der beiden Strecken AE und BE erreicht, und zwar wird η zum Maximum für

$$96. \quad x = \frac{2 l l_1}{3 l_1 + l_2} = \frac{2 l l_1}{l + 2 l_1}.$$

Durch Substitution dieses Werthes ergiebt sich als grösste Senkung η

Digitized by Google

$$97.\quad \eta = \frac{2\,G\,l_1^{\,3} l_2^{\,2}}{3\,E\,W\,(3\,l_1 + l_2)^2}\,.$$

Setzt man hierin $l_2 = l - l_1$ und differenziirt nach l_1, so ergiebt sich, dass η zum Maximum wird für $l_1 = \frac{1}{2}l$, wenn also die Last in der Mitte liegt und zwar wird alsdann

$$98.\quad \eta = \frac{G\,l^3}{192\,E\,W}\,.$$

§. 121. Körper von constanter Festigkeit. Wir wollen hier nur den Fall behandeln, wo die Last in der Mitte liegt. Bezeichnen wir Breite und Höhe an den Enden mit b_1, h_1, so wird nach 76 (§. 86)

$$\frac{b\,h^2}{b_1\,h_1^{\,2}} = \frac{M}{M_1}\,.$$

Es wird nun, da hier $Q_2 = -Q_1$, also nach a §. 118 $Q_1 = \frac{1}{2}G$ wird,

$$M = M_1 - \tfrac{1}{2}\,G\,x.$$

M ist an den Enden positiv, in der Mitte negativ, an zwei Stellen D, E (Fig. 35) muss also $M = 0$ werden. Dies sei der Fall für $x = x_0$; alsdann ist $0 = M_1 - \frac{1}{2}G\,x_0$, folglich

$$M = \tfrac{1}{2}\,G\,(x_0 - x).$$

Demnach folgt M in den äusseren Theilen AD, BD demselben Gesetze, als wenn dieselben in A, B eingespannt und bei D, E mit $\frac{1}{2}$ G belastet wären und im mittleren Theile DE, als wenn derselbe in D, E unterstützt und in der Mitte F mit G belastet wäre. Diese drei Stücke erhalten also auch eine dem entsprechende in §. 95 und §. 107 ermittelte Form (Taf. IV. Fig. 6, 7, 8). Die Axen der Theile AD, FD müssen nach der Formänderung in D eine gemeinschaftliche Tangente haben, was aber, weil in gleichen Abständen von D das Moment M und das Trägheitsmoment W denselben Werth hat, nur möglich ist, wenn D in der Mitte von AF liegt, es ist also $x_0 = AD = BE = \frac{1}{4}l$, mithin $M = \frac{1}{8}\,G\,(l - 4\,x)$, $M_1 = \frac{1}{8}\,G\,l$, also

Fig. 35.

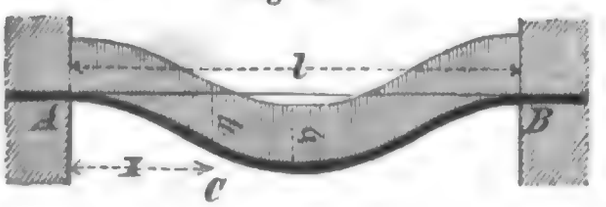
$$99.\quad \frac{b\,h^2}{b_1\,h_1^{\,2}} = 1 - 4\,\frac{x}{l}\,.$$

§. 122. Gleichmässige Belastung (Fig. 36). Hier ist offenbar der Symmetrie wegen $Q_1 = -Q_2$, $M_1 = M_2$. Ist die Last pro Längeneinheit $= q$, so wird $D_1' - D_2' + D_2' - D_2'' = q\,l$ oder $-Q_1 + Q_2 = q\,l$, also

$$Q_1 = -Q_2 = -\tfrac{1}{2}\,q\,l.$$

Ferner wird $M = -D_1'(a_1' + x) + D^2(a_1'' + x) + \frac{1}{2}\,q\,x^2$ oder

Fig. 36.



$$a.\quad M = M_1 + Q_1\,x + \tfrac{1}{2}\,q\,x^2 = M_1 - \tfrac{1}{2}\,x\,(l - x).$$

Setzen wir $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\,W}$ und integriren zweimal, wobei keine Constanten auftreten, weil für $x = o$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und $\eta = 0$ werden muss, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$\text{b.}\quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{x^2}{12\,E\,W}\left[12\,M_1 + q\,x\,(3\,l - 2\,x)\right],$$

$$\text{c.}\quad \eta = \frac{x^2}{24\,E\,W}\left[12\,M_1 + q\,x\,(2\,l - x)\right].$$

Für $x = l$ muss ebenfalls $\frac{d\eta}{dx} = 0$ und $\eta = 0$ werden. Jede dieser Bedingungen giebt

$$100.\quad M_1 = M_2 = \tfrac{1}{12}\,q\,l^2.$$

§. 123. Beanspruchung. Zunächst wird $Q = Q_1 + q\,x = -\frac{1}{2}\,q\,(l - 2\,x)$, wonach Q demselben Gesetze folgt, wie bei einem auf zwei Stützen liegenden Stabe (§. 105). Ferner erhalten wir, wenn wir in der Gleichung a für M_1 seinen Werth setzen,

$$101.\quad M = \tfrac{1}{12}\,q\,[l^2 - 6\,(l - x)\,x].$$

Taf. VI Fig. 3 ist Q und M graphisch dargestellt. M wird $= 0$ für

$$x = \tfrac{1}{6}\,(3 \mp \sqrt{3})\,l = 0{,}2113\,l \text{ und } 0{,}7887\,l.$$

Das positive Maximum erreicht M an den Enden, das negative in der Mitte. Bezeichnen wir das letztere mit M_0, so wird

$$102.\quad M_0 = -\tfrac{1}{24}\,q\,l^2,\quad M_1 = +\tfrac{1}{12}\,q\,l^2.$$

Ist $a = a$ oder $K = \mathfrak{K}$, so liegt demnach der gefährliche Querschnitt an den Enden des Stabes und als Tragkraft ergiebt sich in diesem Falle

$$103.\quad q\,l = \frac{12\,K'W}{l\,a}.$$

Im Allgemeinen aber kann der gefährliche Querschnitt entweder an den Enden oder in der Mitte E liegen. Ist der Abstand der obersten und untersten Faser von der neutralen Axe a_1, a_2, so ergiebt sich für den Bruch

$$104.\quad \begin{cases} \text{in A durch Zug} & q\,l = 12\,\dfrac{K\,W}{l\,a_1}, \\ \text{„ A „ Druck} & q\,l = 12\,\dfrac{\mathfrak{K}\,W}{l\,a_2}, \\ \text{„ E „ Zug} & q\,l = 24\,\dfrac{K\,W}{l\,a_2}, \\ \text{„ E „ Druck} & q\,l = 24\,\dfrac{\mathfrak{K}\,W}{l\,a_1}. \end{cases}$$

Beispiel. Ist der Querschnitt ein Dreieck mit unten liegender Spitze ($\bigtriangledown$), so ist $a_2 = 2\,a_1$; die Verhältnisse der vier Werthe von $q\,l$ werden daher

$$2\,K,\quad \mathfrak{K},\quad 2\,K,\quad 4\,\mathfrak{K}.$$

Es kann also nur ein Bruch in A oder E durch Zug oder in A durch Druck entstehen. Beim Holze und Schmiedeeisen ist $2\,K > \mathfrak{K}$, hier entsteht also nur ein Bruch in A durch Druck; beim Gusseisen ist $2\,K < \mathfrak{K}$, hier entsteht also ein Bruch in A oder E durch Zug.

Anwendung bei den wenig üblichen Balkenbrücken mit eingespannten Enden.

§. 124. Formänderung. Setzen wir in dem Ausdrucke c (§. 122) für M_1 seinen Werth, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$105.\quad \eta = \frac{q\,x^2(l-x)^2}{24\,E\,W}\,.$$

An den Stellen, wo $M = 0$ wird, nämlich bei $x = \frac{1}{6}(3 \mp \sqrt{3})\,l = 0{,}2113\,l$ und $0{,}7887\,l$ liegen Wendepunkte der Curve. Die grösste Senkung tritt in der Mitte ein; dieselbe ist

$$106.\quad \eta = \frac{q\,l^3}{384\,E\,W}\,.$$

Taf. VII Fig. 3 ist die elastische Linie dargestellt.

§. 125. Körper von constanter Festigkeit. Nach der Gleichung a §. 123 wird

$$M = M_1 - \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l-x).$$

In den Punkten D und E (Fig. 35) werde $M = 0$ und es sei $AD = BE = x_0$. Alsdann ist $0 = M_1 - \frac{1}{2}\,q\,x_0\,(l - x_0)$, daher auch

$$M = \tfrac{1}{2}\,q\,[x_0(l-x_0) - x\,(l-x)].$$

Es lässt sich hierdurch leicht nachweisen, dass M in den Stücken AD, BE demselben Gesetze folgt, als wenn dieselben in A, B eingespannt, gleichmässig mit q und ausserdem in D, E mit der Last, welche in der Strecke DF liegt, nämlich mit $\frac{1}{2}\,q\,(l - 2\,x_0)$ belastet wären. Im mittleren Theile DE folgt M demselben Gesetze, als wenn derselbe in D und E unterstützt wäre. Diese drei Stücke erhalten demnach auch eine dem entsprechende, in §. 99 und §. 107 ermittelte Form (Taf. IV Fig. 9 und 10). Die Punkte D, E bestimmen sich durch die Bedingung, dass die Theile der Axe nach der Formänderung in D und E dieselbe Tangente haben müssen.

Nimmt man die Mitte F als Coordinatenanfang an, bezeichnet die Entfernung des Querschnittes von der Mitte mit ξ und setzt $FD = FE = \xi_0$, so wird $x = \frac{l}{2} - \xi$, $x_0 = \frac{l}{2} - \xi_0$, mithin werden die absoluten Werthe von M:

äussere Theile: $M = \frac{1}{2}\,q\,(\xi^2 - \xi_0^2)$, $M_1 = \frac{1}{8}\,q\,(l^2 - 4\,\xi_0^2)$;
mittlerer Theil: $M = \frac{1}{2}\,q\,(\xi_0^2 - \xi^2)$, $M_0 = \frac{1}{2}\,q\,\xi_0^2$,

daher wird

$$\text{äuss. Th. } \frac{b\,h^2}{b_0\,h_0^2} = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2 - 1\,, \quad \text{mittl. Th. } \frac{b\,h^2}{b_0\,h_0^2} = 1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^2.$$

Ist die Höhe constant, so besteht die deformirte Axe aus drei Kreisbögen, welche in D und E nur dann dieselbe Tangente haben können, wenn $AD = FD$, also $x_0 = \xi_0 = \frac{1}{4}\,l$ ist. Daher wird

$$107.\quad M_0 = \tfrac{1}{32}\,q\,l^2, \quad M_1 = \tfrac{3}{32}\,q\,l^2, \quad b_1 = 3\,b_0;$$

$$108.\quad \text{äuss. Th. } b = \frac{1}{3}\,b_1\left(16\,\frac{\xi^2}{l^2} - 1\right), \quad \text{mittl. Th. } b = b_0\left(1 - 16\,\frac{\xi^2}{l^2}\right).$$

Schwieriger ist der Fall zu behandeln, in welchem die Breite constant ist. Hier wird, wenn sich das obere und untere Vorzeichen bezüglich auf den äusseren und inneren Theil bezieht,

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\sqrt{\pm\,(\xi_0^2 - \xi^2)}}{\xi_0},$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{2\,K'}{E\,h} = \frac{2\,K'}{E\,h_0}\,\frac{\xi_0}{\sqrt{\pm\,(\xi_0^2 - \xi^2)}}\,.$$

Digitized by Google

Integrirt man einmal, wobei man beachtet, dass für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ wird, und setzt die entgegengesetzten Werthe von $\frac{d\eta}{dx}$ für $\xi = \xi_0$ einander gleich, so ergiebt sich

$$\int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}} = -\int_{\xi_0}^{\frac{1}{2}l} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \xi_0^2}}.$$

Durch Anwendung der Integralformeln

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{Arcsin}\,\frac{x}{a}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{lognat}\,(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2} = \text{lognat}\,\frac{2\,\xi_0}{l - \sqrt{l^2 - 4\,\xi_0^2}}$$

oder

$$\frac{2\,\xi_0}{l - \sqrt{l^2 - 4\,\xi_0^2}} = e^{\frac{\pi}{2}},$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen = 2,7183 bezeichnet. Durch Reduction auf ξ_0 ergiebt sich

$$109. \quad \xi_0 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{1 + e^{\pi}}\,l = 0{,}1993\,l.$$

Daher wird nun

$$110. \quad M_0 = 0{,}0198\,q\,l^2, \quad M_1 = 0{,}1051\,q\,l^2. \quad h_1 = 2{,}304\,h_0;$$

$$111. \quad h = 5{,}0183\,h_0 \sqrt{\pm\left(0{,}0397 - \frac{\xi^2}{l^2}\right)}.$$

Im Aufrisse bildet der mittlere Theil eine Ellipse, die äusseren Theile die Aeste ein und derselben Hyperbel.

§. 126. Vergleichung der Hauptfälle. Wir vergleichen in Beziehung auf die Unterstützungsweise folgende Fälle:

I. Der Stab ist an einem Ende eingespannt, am anderen frei (Fig. 25 u. 26);

II. Der Stab liegt mit den Enden auf Stützen (Fig. 27 u. 29);

III. Der Stab ist an einem Ende eingespannt, am anderen unterstützt (Fig. 32 u. 33);

IV. Der Stab ist mit beiden Enden eingespannt (Fig. 34 u. 36).

In Beziehung auf die Belastung vergleichen wir folgende Fälle:

a. Belastung durch eine isolirte Last G an der gefährlichsten Stelle (bei I. am Ende, bei II. in der Mitte, bei III. für die Tragkraft bei $x = 0{,}428\,l$, für die Senkung bei $x = 0{,}586\,l$, bei IV. für die Tragkraft bei $x = \frac{1}{3}\,l$, für die Senkung in der Mitte);

b. Belastung durch eine gleichmässig vertheilte Last, wobei die Gesammtlast $q\,l = G$ sei.

Das grösste Moment in diesen acht Fällen ist:

I a. $G\,l$, II a. $\frac{1}{4}\,G\,l$, III a. $0{,}193\,G\,l$, IV a. $\frac{4}{27}\,G\,l$,
I b. $\frac{1}{2}\,G\,l$, II b. $\frac{1}{8}\,G\,l$, III b. $\frac{1}{8}\,G\,l$, IV b. $\frac{1}{12}\,G\,l$.

Digitized by Google

Die Tragkraft ist diesen Momenten umgekehrt proportional; nehmen wir die Tragkraft im Falle I a als Einheit an, so ergiebt sich als Tragkraft bei gleichen Dimensionen:

I a. **1,** II a. **4,** III a. **5,2,** IV a. **6,75,**
I b. **2,** II b. **8,** III b. **8,** IV b. **12.**

Die grösste Senkung ist, wenn wir $\frac{G l^3}{E W} = A$ setzen.

I a. $\frac{1}{3}$ A, II a. $\frac{1}{48}$ A, III a. 0,00981 A, IV a. $\frac{1}{192}$ A,
I b. $\frac{1}{8}$ A, II b. $\frac{5}{384}$ A, III b. 0,00540 A, IV b. $\frac{1}{384}$ A.

Setzt man die Senkung im Falle Ia = 100, so ist die Senkung bei gleichen Dimensionen:

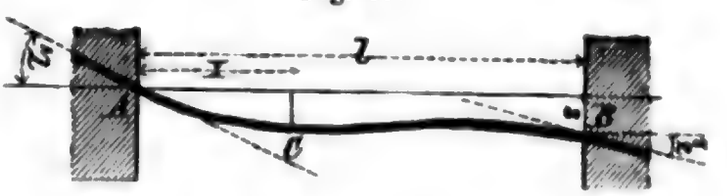
I a. **100,00,** II a. **6,25,** III a. **2,94,** IV a. **1,56,**
I b. **37,50,** II b. **3,91,** III b. **1,62,** IV b. **0,78.**

Man sieht, dass die Tragkraft vom Falle I a bis zum Falle IV b bis zum 12fachen zunimmt, während die Senkung bis zum 128sten Theile abnimmt.

C. Prismatischer Stab mit schiefer Einspannung.

§. 127. Unbelasteter Stab. Die Enden des Stabes seien so eingespannt, dass sie mit der Horizontalen die Winkel τ_1, τ_2 bilden und das eine Ende B (Fig. 37) um s unter der durch das Ende A gehenden Horizontalen liegt. Wir setzen voraus, dass der Stab gar nicht belastet ist. Als Anfang der x wählen wir das Ende A. Im Uebrigen behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Falles B bei.

Fig. 37.



Als Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Stab ergeben sich leicht, wie in §. 118:

$$-Q_1 + Q_2 = 0, \quad M_1 - M_2 + Q_1 l = 0.$$

Daher ist

$$112. \quad Q_1 = -\frac{M_1 - M_2}{l}, \quad Q_2 = +\frac{M_1 - M_2}{l}.$$

Ferner ist nun

$$113. \quad M = M_1 + Q_1 x = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} x.$$

Setzt man $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}$ und integrirt zweimal, wobei man die Constanten durch die Bedingungen bestimmt, dass für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$ und $\eta = 0$ werden muss, so ergiebt sich

$$\frac{d\eta}{dx} = \tau_1 + \frac{x}{2 E W}\left[2 M_1 - (M_1 - M_2)\frac{x}{l}\right],$$

$$114. \quad \eta = \tau_1 x + \frac{x^2}{6 E W}\left[3 M_1 - (M_1 - M_2)\frac{x}{l}\right].$$

Digitized by

Für $x = l$ muss $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$, $\eta = s$ werden; daher ergeben sich zur Bestimmung von M_1 und M_2 folgende Gleichungen:

$$2\,E\,W\,(\tau_2 - \tau_1) = (M_1 + M_2)\,l,$$
$$6\,E\,W\,(s - l\,\tau_1) = (2\,M_1 + M_2)\,l^2$$

und hieraus ergiebt sich

$$115.\quad \begin{cases} M_1 = -\frac{2\,E\,W}{l^2}\left[l\,(2\,\tau_1 + \tau_2) - 3\,s\right], \\ M_2 = +\frac{2\,E\,W}{l^2}\left[l\,(\tau_1 + 2\,\tau_2) - 3\,s\right]. \end{cases}$$

Daher wird nun

$$116.\quad M = -\frac{2\,E\,W}{l^2}\left[l\,\tau_1\left(2 - 3\,\frac{x}{l}\right) + l\,\tau_2\left(1 - 3\,\frac{x}{l}\right) - 3\,s\left(1 - 2\,\frac{x}{l}\right)\right],$$

$$117.\quad \eta = x\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[\tau_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \tau_2\,\frac{x}{l}\right] + \frac{s\,x^2}{l^2}\left(3 - 2\,\frac{x}{l}\right).$$

§. 128. Beliebige Belastung. Der Stab sei nun ganz beliebig belastet. Das Moment für einen beliebigen Querschnitt C, welches nur durch die zwischen A und C liegende Last erzeugt wird, sei X. Alsdann ist

$$118.\quad M = M_1 + Q_1\,x + X,$$

Setzen wir $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\,W}$ und integriren zweimal, wobei wir die Constanten durch die Bedingung bestimmen, dass für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$, $\eta = 0$ wird, so ergiebt sich

$$E\,W\,\frac{d\eta}{dx} = \tau_1 + M_1\,x + \frac{1}{2}\,Q_1\,x^2 + \int_0^x X\,dx,$$

$$119.\quad E\,W\,\eta = \tau_1\,x + \frac{1}{2}\,M_1\,x^2 + \frac{1}{6}\,Q_1\,x^3 + \int_0^x dx \int_0^x X\,dx.$$

Für $x = l$ muss $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$, $\eta = s$ werden, wodurch sich zur Bestimmung von Q_1 und M_1 zwei Gleichungen ergeben. Die Reduction derselben auf Q_1, M_1 giebt:

$$Q_1 = +\frac{6\,E\,W}{l^3}\left[l\,(\tau_1 + \tau_2) - 2\,s\right] - \frac{6}{l^3}\left[l\int_0^l X\,dx - 2\int_0^l dx \int_0^x X\,dx\right],$$

$$M_1 = -\frac{2\,E\,W}{l^2}\left[l\,(2\tau_1 + \tau_2) - 3\,s\right] + \frac{2}{l^2}\left[l\int_0^l X\,dx - 3\int_0^l dx \int_6^x X\,dx\right].$$

Bei horizontaler Einspannung verschwindet der erste Theil, so dass der zweite Theil den Werth von Q_1, M_1 bei horizontaler Einspannung bedeutet, während der erste Theil den Werth von Q_1, M_1 im unbelasteten Zustande bedeutet. Dasselbe ergiebt sich auch für Q_2, M_2. Bezeichnen wir daher für die horizontale Einspannung die Momente an den Enden mit $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, so wird

Digitized by Google

$$120. \quad \begin{cases} M_1 = \mathfrak{M}_1 - 2\,E\,W\,\dfrac{l\,(2\,\tau_1 + \tau_2) - 3\,s}{l^2}, \\ M_2 = \mathfrak{M}_2 + 2\,E\,W\,\dfrac{l\,(\tau_1 + 2\,\tau_2) - 3\,s}{l^2}. \end{cases}$$

Die Reduction auf τ_1, τ_2 bei gegebenem M_1, M_2 ergiebt

$$121. \quad \begin{cases} \tau_1 = -\dfrac{l}{6\,E\,W}\left(2\,M_1 + M_2 - 2\,\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2\right) + \dfrac{s}{l}, \\ \tau_2 = +\dfrac{l}{6\,E\,W}\left(M_1 + 2\,M_2 - \mathfrak{M}_1 - 2\,\mathfrak{M}_2\right) + \dfrac{s}{l}. \end{cases}$$

Substituiren wir die Werthe für Q_1, M_1 in die Ausdrücke für Q, M, η, so ergiebt sich, dass auch diese Grössen aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine nur von τ_1, τ_2, s abhängt, also dem unbelasteten Zustande entspricht und der andere der horizontalen Einspannung entspricht. Für η ergiebt sich, wenn wir den Werth von η für horizontale Einspannung mit $\mathfrak{y}$ bezeichnen, mit Rücksicht auf 117 im vorigen Paragraph:

$$122. \quad \eta = \mathfrak{y} + x\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left[\tau_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \tau_2\frac{x}{l}\right] + \frac{s\,x^2}{l^2}\left(3 - 2\,\frac{x}{l}\right).$$

Für eine gleichmässige Belastung ist nach 105 (§. 124) $24\,E\,W\,\mathfrak{y} = q\,x^2\,(l-x)^2$, nach 100 (§. 122) $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{12}\,q\,l^2$; daher nach 120: $\tau_1 = -\frac{l}{6\,E\,W}\,(2\,M_1 + M_2 - \frac{1}{4}\,q\,l^2) + \frac{s}{l}$, $\tau_2 = +\frac{l}{6\,E\,W}\,(M_1 + 2\,M_2 - \frac{1}{4}\,q\,l^2) + \frac{s}{l}$. Dies in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$123. \quad \eta = \frac{x\,(l-x)}{24\,E\,W}\left[q\{l^2 + x\,(l-x)\} - 4\,(2\,M_1 + M_2) + 4\,(M_1 - M_2)\frac{x}{l}\right] + s\,\frac{x}{l}.$$

Anwendung bei continuirlichen Trägern im nächsten Kapitel.

D. Stab mit variabelem Querschnitte.

§. 129. Stab mit horizontal eingespannten Enden. Wir bezeichnen wieder das Moment, welches durch die zwischen A und dem fraglichen Querschnitte C liegenden Last in Beziehung auf C erzeugt wird, mit X. Alsdann ist wie im vorigen Paragraph:

$$M = M_1 + Q_1\,x + X.$$

Ist die Last pro Längeneinheit im Abstande ξ von A $= q$, so ist $dX = q\,d\xi\,(x - \xi)$, also

$$X = \int_0^x q\,(x - \xi)\,d\xi.$$

Bei gleichmässiger Belastung wird $X = \frac{1}{2}\,qx^2$.

Wir setzen $\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\,W}$ und integriren einmal. Da für $x = 0$ und $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden muss, so ergiebt sich

$$0 = \int_0^l \frac{M}{W}\,dx = M_1\int_0^l \frac{dx}{W} + Q_1\int_0^l \frac{x\,dx}{W} + \int_0^l \frac{X\,dx}{W}.$$

Digitized by

Ferner wird nach 43 (§. 79) $\eta = x\frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{E}\int\frac{M\,x\,dx}{W}$, mithin, da für $x = 0$ und $x = l$ $\eta = 0$ und für $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden muss,

$$0 = \int_0^l \frac{M\,x}{W}\,dx = M_1\int_0^l \frac{x\,dx}{W} + Q_1\int_0^l \frac{x^2\,dx}{W} - \int_0^l \frac{X\,x\,dx}{W}.$$

Wir bezeichnen das mittlere Trägheitsmoment der Querschnitte mit $\mathfrak{W}$ und eine mittlere, gleichmässig vertheilte Last pro Längeneinheit mit q und setzen zur Abkürzung

$$124.\quad \begin{cases} A = \frac{\mathfrak{W}}{l}\int_0^l \frac{dx}{W}, \quad B = \frac{2\,\mathfrak{W}}{l^2}\int_0^l \frac{x\,dx}{W}, \quad C = \frac{3\,\mathfrak{W}}{l^3}\int_0^l \frac{x^2\,dx}{W}, \\ H = \frac{6\,\mathfrak{W}}{q\,l^3}\int_0^l \frac{X\,dx}{W}, \quad I = \frac{8\,\mathfrak{W}}{q\,l^3}\int_0^l \frac{X\,x\,dx}{W}. \end{cases}$$

Alle diese Ausdrücke sind so eingerichtet, dass sie = 1 werden, wenn der Querschnitt constant und die Last gleichmässig vertheilt ist. In Wirklichkeit werden diese Werthe immer wenig von 1 abweichen. Führen wir diese Bezeichnungen in den beiden vorigen Gleichungen ein, so gehen dieselben über in

$$a.\quad \begin{cases} 0 = A\,M_1\,l + \frac{1}{2}B\,Q_1\,l^2 + \frac{1}{6}H\,q\,l^3, \\ 0 = \frac{1}{2}B\,M_1\,l + \frac{1}{3}C\,Q_1\,l^2 + \frac{1}{8}I\,q\,l^3, \end{cases}$$

und hieraus ergiebt sich

$$125.\quad \begin{cases} Q_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{3\,A\,I - 2\,B\,H}{4\,A\,C - 3\,B^2}\,q\,l, \\ M_1 = +\frac{1}{12}\,\frac{9\,B\,I - 8\,C\,H}{4\,A\,C - 3\,B^2}\,q\,l^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den Werth von X für $x = l$ mit X_1 und die gesammte auf dem Stabe liegende Last mit G_1, so wird

$$126.\quad \begin{cases} Q_2 = Q_1 + G_1, \\ M_2 = M_1 + Q_1\,l + X_1, \end{cases}$$

womit nun Q_1, Q_2, M_1, M_2 bestimmt sind.

Die Werthe A, B, C, H, I berechnet man bei stetiger Aenderung des Querschnittes am besten nach der Simpson'schen Regel. In vielen praktischen Fällen ändert sich der Querschnitt aber sprungweise; alsdann kann man diese Werthe auch genau durch Zerlegung in mehrere Integrale berechnen. Bezeichnen wir in diesem Falle die Trägheitsmomente der einzelnen Theile mit W_1, W_2, W_3. . . ., die Abstände der Theilpunkte vom Anfange der x mit l_1, l_2, l_3. . . ., die Last pro Längeneinheit in den einzelnen Theilen mit q_1, q_2, q_3, ..., so ergiebt sich

$$127.\quad \begin{cases} A = \frac{\mathfrak{W}}{l}\left[\frac{l_1}{W_1} + \frac{l_2 - l_1}{W_2} + \frac{l_3 - l_2}{W_3} + \ldots\right], \\ B = \frac{\mathfrak{W}}{l^2}\left[\frac{l_1^2}{W_1} + \frac{l_2^2 - l_2^2}{W_2} + \frac{l_3^2 - l_2^2}{W_3} + \ldots\right], \\ C = \frac{\mathfrak{W}}{l^3}\left[\frac{l_1^3}{W_1} + \frac{l_2^3 - l_1^3}{W_2} + \frac{l_3^3 - l_2^3}{W_3} + \ldots\right], \end{cases}$$

Digitized by Google

$$127.\quad \begin{cases} H = \dfrac{\mathfrak{W}}{q\,l^3}\left[\dfrac{q_1 l_1{}^3}{W_1} + \dfrac{q_2 (l_2{}^3 - l_1{}^3)}{W_2} + \dfrac{q_3 (l_3{}^3 - l_2{}^3)}{W_3} + \ldots\right], \\ I = \dfrac{\mathfrak{W}}{q\,l^4}\left[\dfrac{q_1 l_1{}^4}{W_1} + \dfrac{q_2 (l_2{}^4 - l_1{}^4)}{W_2} + \dfrac{q_3 (l_3{}^4 - l_2{}^4)}{W_3} + \ldots\right]; \\ G_1 = q_1 l_1 + q_2 (l_2 - l_1) + q_3 (l_3 - l_2) + \ldots, \\ X_1 = G\,l - \tfrac{1}{2}\,[q_1 l_1{}^2 - q_2 (l_2{}^2 - l_1{}^2) + q_3 (l_3{}^2 - l_2{}^2) + \ldots]. \end{cases}$$

Bei gleichmässiger Belastung wird $H = C$, $G_1 = q\,l$, $X_1 = \frac{1}{2}\,q\,l^2$.

§. 130. Unbelasteter Stab mit schiefer Einspannung.

Wir behalten die in §. 127 eingeführten Bezeichnungen bei. Alsdann wird wie dort

$$M = M_1 + Q_1 x.$$

Wir verfahren genau wie im vorigen Paragraph. Eine Aenderung tritt nur in sofern ein, als für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$ und für $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$, $\eta = s$ werden muss und dass das Glied mit X wegfällt, weil keine Belastung vorhanden ist. Statt der Gleichungen a erhalten wir die Gleichungen

$$E\,\mathfrak{W}\,(\tau_2 - \tau_1) = A\,M_1\,l + \tfrac{1}{2}\,B\,Q_1\,l^2,$$
$$E\,\mathfrak{W}\,(l\,\tau_2 - s) = \tfrac{1}{2}\,B\,M_1\,l^2 + \tfrac{1}{3}\,C\,Q_1\,l^3,$$

woraus sich Q_1, M_1 bestimmen lassen. Das Gleichgewicht des ganzen Stabes fordert die Erfüllung der Bedingungen $-Q_1 + Q_2 = 0$, $M_1 - M_2 + Q_1 l = 0$, so dass $Q_2 = -Q_1$ und $M_2 = M_1 + Q_1 l$ wird, wodurch nun auch Q_2, M_2 bestimmt sind. Durch Ausführung der Rechnung ergeben sich für M_1, M_2 die Ausdrücke

$$128.\quad \begin{cases} M_1 = -\dfrac{2\,E\,\mathfrak{W}}{\varkappa\,l^2}\left[l\,(2\,\alpha\,\tau_1 + \beta\,\tau_2) - 3\,\delta\,s\right], \\ M_2 = +\dfrac{2\,E\,\mathfrak{W}}{\varkappa\,l^2}\left[l\,(\beta\,\tau_1 + 2\,\gamma\,\tau_2) - 3\,\varepsilon\,s\right], \end{cases}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$129.\quad \begin{cases} \alpha = C, & \beta = 3\,B - 2\,C, & \gamma = 3\,A - 3\,B + C, \\ \delta = B, & \varepsilon = 2\,A - B, & \varkappa = 4\,A\,C - 3\,B^2. \end{cases}$$

Bei constantem Querschnitte und gleichmässiger Belastung wird jeder dieser sechs Coefficienten $= 1$.

§. 131. Beliebig belasteter Stab mit schief eingespannten Enden.

Die in §. 128 entwickelte Regel, dass die Ausdrücke für Q_1, Q_2, M_1, M_2 und Q, M aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine die Werthe dieser Grössen bei horizontaler Einspannung, der andere aber die Werthe dieser Grössen für den unbelasteten Zustand bei schiefer Einspannung bedeutet, gilt auch hier, da man leicht übersieht, dass die dort für einen constanten Querschnitt gemachte Entwickelung sich auch auf einen variabelen Querschnitt anwenden lässt.

Daher wird, wenn wir wieder die nach §. 129 zu bestimmenden Werthe von M_1, M_2 für horizontale Einspannung mit $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ bezeichnen

$$130.\quad \begin{cases} M_1 = \mathfrak{M}_1 - 2\,\dfrac{E\,\mathfrak{W}}{\varkappa\,l^2}\left[l\,(2\,\alpha\,\tau_1 + \beta\,\tau_2) - 3\,\delta\,s\right], \\ M_2 = \mathfrak{M}_2 + 2\,\dfrac{E\,\mathfrak{W}}{\varkappa\,l^2}\left[l\,(\beta\,\tau_1 + 2\,\gamma\,\tau_2) - 3\,\varepsilon\,s\right]. \end{cases}$$

Digitized by Google

Reducirt man diese Gleichungen auf τ_1, τ_2, so erscheinen in den gefundenen Ausdrücken die Werthe $4\alpha\gamma - \beta^2$, $2\gamma\delta - \beta\varepsilon$ und $2\alpha\varepsilon - \beta\delta$. Durch Einsetzung der Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ findet man, dass $4\alpha\gamma - \beta^2 = 8\varkappa$, $2\gamma\delta - \beta\varepsilon = 2\alpha\varepsilon - \beta\delta = \varkappa^2$ wird und die für τ_1, τ_2 erhaltenen Ausdrücke gehen dadurch über in

$$131. \quad \begin{cases} \tau_1 = -\dfrac{1}{6\,E\,\mathfrak{W}}\left[2\gamma\,(M_1 - \mathfrak{M}_1) + \beta\,(M_2 - \mathfrak{M}_2)\right] + \varkappa\dfrac{s}{l}, \\ \tau_2 = +\dfrac{1}{6\,E\,\mathfrak{W}}\left[\beta\,(M_1 - \mathfrak{M}_1) + 2\alpha\,(M_2 - \mathfrak{M}_2)\right] + \varkappa\dfrac{s}{l}. \end{cases}$$

Ist M_1 und M_2 bestimmt, so ergeben sich leicht alle übrigen Grössen. Bezeichnen wir nämlich wiederum die zwischen A und dem beliebigen Querschnitte C liegende Last mit G, das Moment derselben in Beziehung auf C mit X und die Werthe von G, X für $x = l$ mit G_1, X_1, so wird, wie in 129, $Q_2 = Q_1 + G_1$, $M_2 = M_1 + Q_1 l + X_1$ und hieraus

$$132. \quad Q_1 = -\frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{X_1}{l}, \quad Q_2 = G_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{X_1}{l}$$

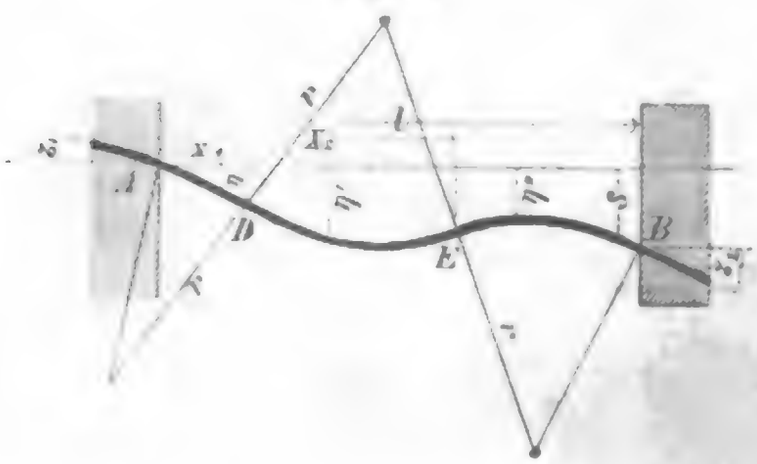
und endlich

$$133. \quad Q = Q_1 + G, \quad M = M_1 + Q_1 x + X.$$

Für gleichmässige Belastung wird einfach $Q = qx$, $Q_1 = ql$, $X = \frac{1}{2} q x^2$, $X_1 = \frac{1}{2} q l^2$.

§. 132. Körper von constanter Festigkeit. Wir wollen nur den einfachsten und wichtigsten Fall behandeln, nämlich den Fall, dass die Höhe des Körpers constant und die Belastung gleichmässig ist. Dann tritt nach §. 86, wie auch der Querschnitt gestaltet sein möge, eine kreisförmige Biegung ein. Der Stab theilt sich in drei Theile, von denen die äussersten AD, BE (Fig. 38) nach oben convex, der mittlere DE nach unten convex sind. Alle drei Theile haben denselben Radius r und zwar ist nach 77 (§. 86)

Fig. 38.



$$134. \quad r = \frac{Ea}{K} = \frac{Ea}{M}.$$

Bezeichnen wir die Senkung innerhalb AD, DE, EB bezüglich mit η, η', η'' und die Längen AD, AE mit x_1, x_2, so ist

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{d^2\eta'}{dx^2} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{d^2\eta''}{dx^2} = \frac{1}{r}.$$

Die zweimalige Integration giebt mit Rücksicht darauf, dass für $x = 0$ $\frac{d\eta}{dx} = \tau_1$, $\eta = 0$ und für $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = \tau_2$, $\eta = s$ wird,

Digitized by Google

$$\frac{d\eta}{dx} = \tau_1 + \frac{x}{r}, \qquad \frac{d\eta'}{dx} = C - \frac{x}{r}, \qquad \frac{d\eta''}{dx} = \tau_2 - \frac{l}{r} + \frac{x}{r},$$

$$\eta = \tau_1 x + \frac{x^2}{2r}, \quad \eta' = C_1 + Cx - \frac{x^2}{2r}, \quad \eta'' = s - \tau_2 l + \frac{l^2}{2r} + \tau_2 x - \frac{lx}{r} + \frac{x^2}{2r}.$$

Für $x = x_1$ muss $\frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta'}{dx}$, $\eta = \eta'$ werden, welche Bedingungen $C = \tau_1 + \frac{2x_1}{r}$, $C_1 = -\frac{x_1^2}{r}$ geben. Für $x = x_2$ endlich muss $\frac{d\eta'}{dx} = \frac{d\eta''}{dx}$, $\eta' = \eta''$ werden, d. i. nach Einsetzung von C und C_1

$$\frac{2(x_2 - x_1)}{r} - \frac{l}{r} = \tau_1 - \tau_2,$$

$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{r} - \frac{l x_2}{r} + \frac{l^2}{2r} = (\tau_1 - \tau_2) x_2 + \tau_2 l - c.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir zur Abkürzung $l = \lambda r$, $s = \sigma r$ setzen,

$$135. \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sigma + \lambda^2 - 2(\tau_1 + \tau_2)\lambda - (\tau_1 - \tau_2)^2}{4(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)} r, \\ x_2 = \dfrac{\sigma + 3\lambda^2 + 2(\tau_1 - 3\tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2}{4(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)} r. \end{cases}$$

Es ist nun ferner

$$M = M_1 + Q_1 x + \tfrac{1}{2} q x^2.$$

Für die Punkte D und E wird $M = 0$, mithin

$$0 = M_1 + Q_1 x_1 + \tfrac{1}{2} q x_1^2, \quad 0 = M_1 + Q_1 x_2 + \tfrac{1}{2} q x_2^2.$$

Hieraus ergiebt sich durch Reduction auf Q_1, M_1:

$$136. \quad Q_1 = \tfrac{1}{2} q (x_1 + x_2), \quad M_1 = -\tfrac{1}{2} q x_1 x_2.$$

Setzen wir für x_1, x_2 obige Ausdrücke ein, so ergiebt sich die erste der folgenden Gleichungen

$$137. \quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{[-\sigma - \lambda^2 + 2(\tau_1 + \tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2][\sigma + 3\lambda^2 + 2(\tau_1 - 3\tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2]}{32(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)^2} q r^2, \\ M_2 = \dfrac{[\sigma - \lambda^2 + 2(\tau_1 + \tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2][-\sigma + 3\lambda^2 + 2(3\tau_1 - \tau_2)\lambda + (\tau_1 - \tau_2)^2]}{32(\tau_1 - \tau_2 + \lambda)^2} q r^2. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung ergiebt sich aus der ersten durch Vertauschung von τ_1, τ_2, s bezüglich mit $-\tau_2$, $-\tau_1$, $-s$.

Diese Gleichungen lassen sich auch auf τ_1, τ_2 reduciren. Durch Addition und Subtraction dieser Gleichungen ergiebt sich zunächst nach gehöriger Reduction

$$a. \quad \left[-\frac{16(M_1 + M_2)}{q r^2} - 3\lambda^2 + 2\lambda(\tau_1 - \tau_2) + (\tau - \tau_2)^2\right](\lambda + \tau_1 - \tau_2)^2 = [2\lambda(\tau_1 + \tau_2) - \sigma]^2,$$

$$b. \quad \frac{4(M_1 - M_2)}{q^2 r^2}(\lambda + \tau_1 - \tau_2) = [2\lambda(\tau_1 + \tau_2) - \sigma]\lambda.$$

Die Gleichsetzung der sich aus diesen Gleichungen für $[2\lambda(\tau_1 + \tau_2) - \sigma]^2$ ergebenden Werthe giebt

$$(\tau_1 - \tau_2)^2 + 2\lambda^2(\tau_1 - \tau_2) = \frac{16(M_1 - M_2)^2}{q r^2} - \frac{16(M_1 - M_2)^2}{\lambda^2 q^2 r^4} - 3\lambda^2.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir wieder $\frac{1}{r}$ für λ setzen,

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{1}{r}\left[-1 \pm 2\sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{q l^2} + \frac{4(M_1 - M_2)^2}{q^2 l^4}}\right].$$

Digitized by Google

Für einen an beiden Enden auf Stützen liegenden Stab ist $M_1 = M_2 = 0$, also $\tau_1 - \tau_2 = \frac{l}{r}(-1 \pm 2)$. Es ergiebt sich aber für diesen Fall leicht $\tau_1 = -\tau_2 = \frac{l}{2r}$, $\tau_1 - \tau_2 = \frac{l}{r}$, so dass nur das obere Zeichen + Gültigkeit haben kann.

Nach der Gleichung b wird nun

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{s}{2l} + \frac{l}{r}\frac{4(M_1 - M_2)}{ql^2}\sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{ql^2} + \frac{4(M_1 - M_2)^2}{q^2l^4}}.$$

Die Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen giebt nun endlich

138.
$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{s}{4l} + \frac{l}{2r}\left[-1 + 2\left(1 + 2\frac{M_1 - M_2}{ql^2}\right)\sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{ql^2} + \frac{4(M_1 - M)_2{}^2}{q^2l^4}}\right], \\ \tau_2 = \frac{s}{4l} + \frac{l}{2r}\left[+1 - 2\left(1 + 2\frac{M_1 - M_2}{ql^2}\right)\sqrt{1 + \frac{4(M_1 + M_2)}{ql^2} + \frac{4(M_1 - M)_2{}^2}{q^2l^4}}\right]. \end{cases}$$

Die für Stäbe mit eingespannten Enden entwickelten Regeln finden direkt wenig Anwendung; sie bilden aber die Grundlage für die in den nächsten Kapiteln zu behandelnde Theorie der continuirlichen Träger.

XIII. Kapitel.

Prismatischer continuirlicher Stab mit gleich hohen Stützen im Allgemeinen.

A. Beliebige Belastung.

§. 133. Bezeichnungen. Unter einem continuirlichen Stabe verstehen wir einen auf mehr als zwei Stützen ruhenden Stab. Die einzelnen Abtheilungen, in welche der Stab durch die Stützen getheilt wird, nennen wir Felder.

Jedes einzelne Feld befindet sich in demselben Zustande, wie ein an den Enden schief eingespannter Stab, so dass die Untersuchungen des vorigen Kapitels hier zur Anwendung kommen können.

Die Untersuchung lässt sich am leichtesten in der Weise führen, dass wir zunächst die Momente für die über den Stützen liegenden Querschnitte bestimmen. Wir nennen dieselben die Normalmomente. Hieraus ergiebt sich dann leicht alles Uebrige, nämlich die Stützendrücke, Transversalkräfte und Momente für die übrigen Querschnitte und die Formänderung. Wir führen hierbei die folgenden Bezeichnungen ein:

n die Anzahl aller Felder, also n + 1 die Anzahl der Stützen,

0, 1, 2, 3, ... n die Indices der Stützen,

$l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ die Längen der Felder,

$D_0, D_1, D_2, \ldots D_n$ die Stützendrücke,

$M_0, M_1, M_2, \ldots M_n$ die Normalmomente,

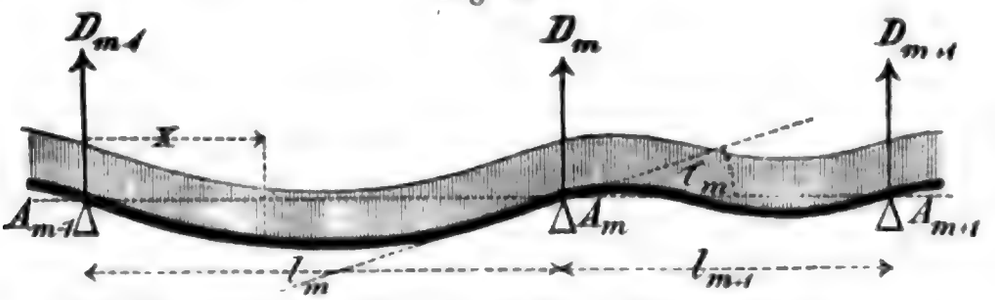
$\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ die Tangenten der Winkel, welche die deformirte Axe über den Stützen mit der Horizontalen bildet.

Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass der Querschnitt des Stabes constant ist und sämmtliche Stützen in einer Horizontalen liegen.

Digitized by Google

§. 134. Normalgleichungen. Nach den Gleichungen 121 (§. 128) ergiebt sich für den Winkel τ_m an der m^{ten} Stütze, indem man einmal diesen Winkel als τ_2 für das m^{te} Feld, sodann als τ_1 für das $(m+1)^{ste}$ Feld betrachtet (Fig. 39):

Fig. 39.



$$139.\quad \begin{cases} 6\,E\,W\,\tau_m = +\,l_m(M_{m-1} + 2\,M_m - \mathfrak{M}'_m - \mathfrak{M}''_m), \\ 6\,E\,W\,\tau_m = -\,l_{m+1}(M_m + 2\,M_{m+1} - 2\,\mathfrak{M}'_{m+1} - \mathfrak{M}''_{m+1}). \end{cases}$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{M}'_m$, $\mathfrak{M}''_m$ die Momente an den Enden des m^{ten} Feldes, wenn die Enden desselben horizontal eingespannt wären, welche sich also unabhängig von den übrigen Feldern nach den im vorigen Kapitel, **A**, entwickelten Regeln bestimmen lassen. Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke für $6\,E\,W\,\tau_m$ giebt, wenn wir zur Abkürzung

$$140.\quad 2\,\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = \mathfrak{N}',\quad \mathfrak{M}' + 2\,\mathfrak{M}'' = \mathfrak{N}''$$

setzen,

$$141.\quad M_m l_m + 2\,M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} l_{m+1} = \mathfrak{N}''_m l_m + \mathfrak{N}'_{m+1} l_{m+1}.$$

Wenden wir diese Gleichung für sämmtliche Verbindungen von drei auf einander folgenden Stützen an, so ergeben sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass für die äussersten Stützen die Momente Null sind, folgende Gleichungen:

$$142.\quad \begin{cases} 2\,M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = \mathfrak{N}_1'' l_1 + \mathfrak{N}'_2 l_2, \\ M_1 l_2 + 2\,M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = \mathfrak{N}_2'' l_2 + \mathfrak{N}'_3 l_3, \\ M_2 l_3 + 2\,M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = \mathfrak{N}_3'' l_3 + \mathfrak{N}'_4 l_4, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n-3} l_{n-2} + 2\,M_{n-2}(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} = \mathfrak{N}''_{n-2} l_{n-2} + \mathfrak{N}'_{n-1} l_{n-1}, \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2\,M_{n-1}(l_{n-1} + l_n) = \mathfrak{N}''_{n-1} l_{n-1} + \mathfrak{N}'_n l_n. \end{cases}$$

Wir wollen diese $n-1$ Gleichungen, welche zur Bestimmung der $n-1$ Normalmomente ausreichen, die Normalgleichungen nennen.

Für die Werthe $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ ergiebt sich, wenn nur eine isolirte Last G vorhanden ist, welche von der linken und rechten Stütze des Feldes um ξ, ξ_1 entfernt ist, nach 85 (§. 118):

$$143.\quad \begin{cases} \mathfrak{M}' = G\,\dfrac{\xi\,\xi_1^{\,2}}{l^2},\quad \mathfrak{M}'' = G\,\dfrac{\xi^2\,\xi_1}{l^2}; \\ \mathfrak{N}' = G\,\dfrac{\xi\,\xi_1(2\,l - \xi)}{l^2} = G\,\dfrac{\xi_1(l^2 - \xi_1^{\,2})}{l^2}, \\ \mathfrak{N}'' = G\,\dfrac{\xi\,\xi_1(l + \xi)}{l^2} = G\,\dfrac{\xi\,(l^2 - \xi^2)}{l^2}. \end{cases}$$

Ist das Feld gleichmässig mit q pro Längeneinheit belastet, so wird nach 100 (§. 122)

$$144.\quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \tfrac{1}{12}\,q\,l^2,\quad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'' = \tfrac{1}{4}\,q\,l^2.$$

Digitized by Google

§. 135. Auflösung der Normalgleichungen. Bei einer geringen Anzahl von Feldern ist die Auflösung der Normalgleichungen leicht nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra auszuführen. Bei einer grösseren Anzahl von Feldern empfiehlt sich aber ein besonderes Verfahren. Wir multipliciren die Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit Zahlen $e_1, e_2, e_3 \ldots e_{n-1}$ und wählen diese Zahlen so, dass bei der Addition sämmtlicher Gleichungen alle M_m, mit Ausnahme von M_1 verschwinden. Dies wird offenbar eintreten, wenn zwischen den Zahlen e_m die folgenden Beziehungen bestehen:

$$145. \quad \begin{cases} 2\,e_1\,(l_{n-1}+l_n) + e_2\,l_{n-1} = 0, \\ e_1\,l_{n-1} + 2\,e_2\,(l_{n-2}+l_{n-1}) + e_3\,l_{n-2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_{n-3}\,l_3 + 2\,e_{n-2}\,(l_2+l_3) + e_{n-1}\,l_2 = 0. \end{cases}$$

Die erste Zahl e_1 kann beliebig gewählt werden, am besten $= \pm 1$ und dann ergeben sich die übrigen Zahlen successive aus den einzelnen Gleichungen.

Ist hiernach M_1 bestimmt, so ergeben sich die übrigen Normalmomente successive aus den Normalgleichungen.

§. 136. Bestimmung der übrigen Grössen. Die beiden Transversalkräfte für die Enden eines Feldes bezeichnen wir mit Q', Q''. Nach §. 131 wird alsdann

$$146. \quad Q' = -\frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{X_1}{l}, \quad Q'' = Q' + G_1 = G_1 - \frac{M_1 - M_2}{l} - \frac{X_1}{l};$$

$$147. \quad Q = Q' + G;$$

$$148. \quad M = M_1 + Q'x + X,$$

wobei M_1, M_2 die Normalmomente für die Enden des fraglichen Feldes bedeuten und G, G_1, X, X_1 die in §. 131 angegebene Bedeutung haben.

Bei gleichmässiger Belastung ist $G = qx$, $G_1 = ql$, $X = \frac{1}{2}qx^2$, $X_1 = \frac{1}{2}ql^2$, mithin

$$149. \quad Q' = -\frac{1}{2}ql - \frac{M_1 - M_2}{l}, \quad Q'' = Q' + ql = +\frac{1}{2}ql - \frac{M_1 - M_2}{l};$$

$$150. \quad Q = Q' + qx.$$

Da hiernach $Q'' = Q' + ql$ wird, so ist $q = \frac{Q'' - Q'}{l}$, mithin auch

$$151. \quad Q = Q' - (Q' - Q'')\frac{x}{l}.$$

Ferner wird

$$152. \quad M = M_1 + Q'x + \frac{1}{2}qx^2 = M_1 - (M_1 - M_2)\frac{x}{l} - \frac{1}{2}qx(l-x).$$

Hiernach wird M zum Maximum für $x = \frac{Q'}{q}$ und zwar wird

$$153. \quad \max M = M_1 - \frac{Q'^2}{2q} = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) - \frac{(M_1 - M_2)^2}{ql^2} - \frac{1}{8}ql^2.$$

Nehmen wir die nach oben gerichteten Stützendrücke als positiv, so ist für irgend eine Stütze $Q''_{m+1} = Q''_m - D_m$, mithin

Digitized by Google

154. $D_m = Q''_m - Q'_{m+1}$.

Für die äussersten Stützen wird $D_0 = + Q_1'$, $D_n = - Q''_n$. Beim Vorhandensein eines negativen Stützendruckes würde sich der Stab von der betreffenden Stütze abheben. Damit eine Entfernung von der Stütze nicht eintreten kann, müsste die Stütze oberhalb des Stabes angebracht werden.

Die Formänderung ist durch 119 und 121 (§. 128) bestimmt. Wir wollen aber bei Bestimmung der Formänderung nur eine totale gleichmässige Belastung voraussetzen. Für diese wird nach 123 (§. 128)

155. $$\eta = \frac{x(l-x)}{24\,E\,W}\left[q\{l^2 + x(l-x)\} - 4(2M_1 + M_2) + 4M_1 - M_2)\frac{x}{l}\right].$$

Zum Maximum wird η für

$$x^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{M_1 - M_2}{ql} - 2l\right)x^2 + \frac{3}{2}\frac{M_1}{q}x - \left(\frac{2M_1 + M_2}{q} + l^2\right)l = 0.$$

Hiernach ist es nun leicht, bestimmte Fälle zu behandeln.

§. 137. Fall einer Belastung durch isolirte Lasten.

Die Behandlung dieses Falles wird durch das folgende Beispiel deutlich.

Der Stab habe vier Felder mit den Längen 10, 6, 4, 5 (Taf. V Fig. 1) und trage im I. Felde eine Last 8 im Abstand 4 von der Stütze 0 und im II. Felde eine Last 3 im Abstande 2 von der Stütze 1. Hier ist für das I. Feld nach 143 $\mathfrak{M}' = 8 \cdot \frac{4 \cdot 6^2}{10^2} = 11{,}52$, $\mathfrak{M}'' = 8 \cdot \frac{4^2 \cdot 6}{10^2} = 7{,}68$, also $\mathfrak{R}' = 2 \cdot 11{,}52 + 7{,}68 = 30{,}72$, $\mathfrak{R}'' = 11{,}52 + 2 \cdot 7{,}68 = 26{,}88$. Ebenso ergiebt sich für das II. Feld $\mathfrak{R}' = 6{,}67$, $\mathfrak{R}'' = 5{,}33$. Daher sind die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 32\,M_1 + 6\,M_2 &= 26{,}88 \cdot 10 + 6{,}67 \cdot 6 \\ 6\,M_1 + 20\,M_2 + 4\,M_3 &= 5{,}33 \cdot 6 \\ 4\,M_2 + 18\,M_3 &= 0 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen giebt

$$M_1 = + 10{,}582; \quad M_2 = - 4{,}971; \quad M_3 = + 1{,}105.$$

Transversalkräfte. Für das I. Feld wird nach 146: $Q' = -\frac{0 - 10{,}582}{10} - \frac{8 \cdot 6}{10} = - 3{,}742$, $Q'' = - 3{,}742 + 8 = + 4{,}258$. Im III. Felde wird $Q' = -\frac{-4{,}971 - 1{,}105}{5} = + 1{,}519$, $Q'' = Q'$ u. s. f. Sonach wird:

$$\begin{aligned} Q_1' &= - 3{,}742, \quad Q_1'' = + 4{,}258; \quad Q_2' = - 4{,}592, \quad Q_2'' = - 1{,}592; \\ Q_3' &= Q_3'' = + 1{,}519, \quad Q_4' = Q_4'' = - 0{,}221. \end{aligned}$$

Innerhalb der einzelnen Strecken ist Q constant

Stützendrücke. Nach 154 ist $D_0 = - Q_1' = + 3{,}742$, $D_1 = Q_1'' - Q_2' = 4{,}258 + 4{,}592 = + 8{,}852$ u. s. w. Sonach wird:

$D_0 = + 3{,}742$, $D_1 = + 8{,}852$, $D_2 = - 3{,}111$, $D_3 = + 1{,}740$, $D_4 = - 0{,}221$.

Momente. Nach 148 wird im I. Felde in der ersten Strecke $M = 0 - 3{,}742\,x + 0 = - 3{,}742\,x$, in der zweiten Strecke $M = 0 - 3{,}742\,x + 8(x - 4) = - 32 + 4{,}258\,x$. Im III. Felde wird $M = - 4{,}971 + 1{,}519\,x$ u. s. f. Sonach wird:

I. Feld. 1ste Strecke. $M = - 3{,}742\,x$. 2te Strecke. $M = - 32 + 4{,}258\,x$;
II. Feld. „ „ $M = 10{,}522 - 4{,}592\,x$. „ „ $M = 4{,}582 - 1{,}592\,x$;
III. Feld. $M = - 4{,}971 + 1{,}519\,x$;
IV. Feld. $M = 1{,}105 - 0{,}221\,x$.

Am Angriffspunkte der Last im I. Felde wird $M = - 3{,}742 \cdot 4 = - 14{,}968$ und am Angriffspunkte der Last im II. Felde $M = 10{,}522 - 4{,}592 \cdot 2 = + 1{,}398$. Das grösste Moment kann nur an einem Angriffspunkte einer isolirten Kraft, also an den Stützen oder an den Angriffspunkten der Lasten stattfinden. Der Vergleich zeigt, dass das grösste Moment am Angriffspunkte der Last im I. Felde stattfindet.

Taf. V Fig. 2 sind hiernach Q und M graphisch dargestellt.

Digitized by Google

§. 138. Fall einer gleichmässigen Belastung. Für die Behandlung dieses Falles diene das folgende Beispiel.

Der Stab habe 5 Felder mit den Längen 5, 8, 9, 7, 3 (Taf. V Fig. 3). Die Last pro Längeneinheit sei 8; alsdann ist $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = \frac{1}{2} q l^2$, d. i. für die einzelnen Felder $\mathfrak{R}_1 = 50$, $\mathfrak{R}_2 = 128$, $\mathfrak{R}_3 = 162$, $\mathfrak{R}_4 = 98$, $\mathfrak{R}_5 = 18$. Demnach werden die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} 26\,M_1 + 8\,M_2 &= 1274,\\ 8\,M_1 + 34\,M_2 + 9\,M_3 &= 2482,\\ 9\,M_2 + 32\,M_3 + 7\,M_4 &= 2144,\\ 7\,M_3 + 20\,M_4 &= 740. \end{aligned}$$

Die Auflösung giebt

$M_1 = +32{,}80$, $M_2 = +52{,}65$, $M_3 = +47{,}76$, $M_4 = +20{,}29$.

Transversalkräfte. Nach 149 wird für das I. Feld $Q' = -\frac{1}{2}.8.5 - \frac{0-32{,}80}{5} = -13{,}44$, $Q'' = -13{,}44 + 8.5 = +26{,}56$, $Q = -13{,}44 + 8x$. Im II. Felde wird $Q' = -\frac{1}{2}.8.8 - \frac{32{,}80-52{,}65}{8} = -29{,}52$, $Q'' = -29{,}52 + 8.8 = +34{,}48$, $Q = -29{,}52 + 8x$ u. s. f. also

$$\begin{aligned} Q_1' &= -13{,}44, & Q_1'' &= +26{,}56, & Q &= -13{,}44 + 8x,\\ Q_2' &= -29{,}52, & Q_2'' &= +34{,}48, & Q &= -29{,}52 + 8x,\\ Q_3' &= -36{,}54, & Q_3'' &= +35{,}46, & Q &= -36{,}54 + 8x,\\ Q_4' &= -31{,}64, & Q_4'' &= +24{,}36, & Q &= -31{,}64 + 8x,\\ Q_5' &= -18{,}76, & Q_5'' &= +5{,}26, & Q &= -18{,}76 + 8x. \end{aligned}$$

Stützendrücke. Nach 154 wird $D_0 = -Q_1' = +13{,}44$, $D_1 = Q_1'' - Q_2' = 26{,}56 + 29{,}52 = +56{,}08$ u. s. f. Also

$$\begin{aligned} D_0 &= +13{,}44, & D_1 &= +56{,}08, & D_2 &= +71{,}02,\\ D_3 &= +67{,}10, & D_4 &= +43{,}12, & D_5 &= +5{,}26. \end{aligned}$$

Momente. Im I. Felde wird nach 152 $M = -13{,}44\,x + 4\,x^2$; M wird zum Maximum für $x = \frac{13{,}44}{8} = 1{,}680$ und zwar ist $\max M = -\frac{13{,}44^2}{2.8} = -11{,}29$. Im II. Felde wird $M = 32{,}80 - 29{,}52\,x + 4\,x^2$: M wird zum Maximum für $x = \frac{29{,}52}{8} = 3{,}69$ und zwar ist $\max M = 32{,}80 - \frac{29{,}52^2}{2.8} = -21{,}66$ u. s. f. In Folgendem ist das x, für welches M zum Maximum wird, mit x' und das Maximum von M mit M' bezeichnet.

$$\begin{aligned} &\text{I. Feld.} && M = -13{,}44\,x + 4\,x^2, && x' = 1{,}68, && M' = -11{,}29,\\ &\text{II.} \quad " && M = 32{,}80 - 29{,}52\,x + 4\,x^2, && x' = 3{,}69, && M' = -21{,}66,\\ &\text{III.} \quad " && M = 52{,}65 - 36{,}54\,x + 4\,x^2, && x' = 4{,}57, && M' = -30{,}82,\\ &\text{IV.} \quad " && M = 47{,}76 - 31{,}64\,x + 4\,x^2, && x' = 3{,}96, && M' = -14{,}81,\\ &\text{V.} \quad " && M = 20{,}29 - 18{,}76\,x + 4\,x^2, && x' = 2{,}35, && M' = -1{,}72. \end{aligned}$$

Das absolut grösste Maximum ist hiernach M_2.

Formänderung. Nach 155 wird für das dritte Feld $24\,E\,W\,\eta = x(9-x)\left[8(9^2 + x(9-x) - 4(2.52{,}65 + 47{,}76) + 4(52{,}65 - 47{,}76)\frac{x}{9}\right]$ oder $E\,W\,\eta = +13{,}43\,x - 26{,}32\,x^2 - 6{,}09\,x^3 + \frac{1}{3}x^4$ u. s. f. Hiernach wird, wenn wir $E\,W = 1$ setzen,

$$\begin{aligned} &\text{I. Feld.} && \eta = +14{,}31\,x && -2{,}24\,x^3 + \tfrac{1}{3}x^4,\\ &\text{II.} \quad " && \eta = +13{,}00\,x + 16{,}40\,x^2 && -4{,}92\,x^3 + \tfrac{1}{3}x^4,\\ &\text{III.} \quad " && \eta = +13{,}43\,x + 26{,}32\,x^2 && -6{,}09\,x^3 + \tfrac{1}{3}x^4,\\ &\text{IV.} \quad " && \eta = +20{,}76\,x + 23{,}88\,x^2 && -5{,}31\,x^3 + \tfrac{1}{3}x^4,\\ &\text{V.} \quad " && \eta = -11{,}29\,x + 10{,}14\,x^2 && -3{,}13\,x^3 + \tfrac{1}{3}x^4. \end{aligned}$$

Taf. V Fig. 4 giebt die graphische Darstellung von Q und M und Fig. 5 die Darstellung der elastischen Linie.

B. Belastung eines einzigen Feldes.

§. 139. Normalmomente. Für die Folge, namentlich für die Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise ist es nöthig, den Einfluss der Belastung eines einzigen Feldes kennen zu lernen. Es sei das r^{te} Feld beliebig belastet. Alsdann sind die Normalgleichungen

Digitized by Google

$$156.\quad \begin{cases} 2\,M_1(l_1+l_2) + M_2 l_2 = 0, \\ M_1 l_2 + 2\,M_2(l_2+l_3) + M_3 l_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{r-2} l_{r-1} + 2\,M_{r-1}(l_{r-1}+l_r) + M_r l_r = \mathfrak{N}' l_r, \\ M_{r-1} l_r + 2\,M_r(l_r+l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} = \mathfrak{N}'' l_r, \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{n-3} l_{n-2} + 2\,M_{n-2}(l_{n-2}+l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} = 0, \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2\,M_{n-1}(l_{n-1}+l_n) + = 0. \end{cases}$$

Hiernach ist zunächst $M_2 = -M_1\left(2+2\frac{l_1}{l_2}\right)$; demnach haben M_1 und M_2 entgegengesetzte Vorzeichen und dem absoluten Werthe nach ist $M_2 \backslash 2\,M_1$. Ferner ist $M_3 = -M_2\left(2+2\frac{l_2}{l_3}\right) - M_1\frac{l_2}{l_3} = -M_2\left[2+\frac{l_2}{l_3}\left(2+\frac{M_1}{M_2}\right)\right]$; $\frac{M_1}{M_2}$ ist negativ, aber $\backslash \frac{1}{2}$, also $2+\frac{M_1}{M_2}$ positiv und $\backslash \frac{3}{2}$; demnach haben auch M_2 und M_3 entgegengesetzte Vorzeichen und dem absoluten Werthe nach ist $M_3 \backslash 2\,M_2$ oder sogar $M_3 \backslash M_2\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_2}{l_3}\right)$. Die Fortsetzung dieser Schlüsse liefert das Resultat:

Die Normalmomente sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen von den Enden nach dem belasteten Felde hin zu, wobei jedes Normalmoment grösser ist, als das Doppelte des vorhergehenden, oder sogar

$$157.\quad M_{m+1} \backslash M_m\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_m}{l_{m+1}}\right).$$

Wir setzen $M_{r-2} = -a_1 M_{r-1}$, $M_{r+1} = -a_2 M_r$, wobei nach dem eben Gesagten a_1 und a_2 positive Zahlen und kleiner als $\frac{1}{2}$ sind. Die beiden mittleren Normalgleichungen werden alsdann

$$a.\quad \begin{cases} M_{r-1}[2\,l_r + (2-a_1)\,l_{r-1}] + M_r l_r = \mathfrak{N}' l_r, \\ M_{r-1} l_r + M_r[2 l_r + (2-a_2) l_{r-1}] = \mathfrak{N}'' l_r. \end{cases}$$

Die Auflösung giebt

$$M_r = \frac{\mathfrak{N}'' l_r[2\,l_r + (2-a_1)\,l_{r-1}] - \mathfrak{N}' l_r^2}{[2\,l_r + (2-a_1)\,l_{r-1}][2\,l_r + (2-a_2) l_{r+1}] - l_r^2}.$$

Setzt man $\mathfrak{N}' = 2\,\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, $\mathfrak{N}'' = \mathfrak{M}' + 2\,\mathfrak{M}''$, so wird

$$158.\quad M_r = \frac{\mathfrak{M}'(2-a_1)\frac{l_{r-1}}{l_r} + \mathfrak{M}''\left[3+(2-a_1)\frac{l_{r-1}}{l_r}\right]}{\left[2+(2-a_1)\frac{l_{r-1}}{l_r}\right]\left[2+(2-a_2)\frac{l_{r+1}}{l_r}\right]-1}.$$

$\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ sind für vertical abwärts wirkende Lasten stets positiv. Dies folgt bestimmt aus 143; es ist aber auch nicht denkbar, dass sich ein an den Enden horizontal eingespannter Stab, wie er auch belastet sein möge, sich an den Enden nach oben krümme. Da a_1, a_2 positiv und $\backslash \frac{1}{2}$ sind, so sind die Coefficienten von $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ positiv; ebenso ist der Nenner positiv. Demnach ist M_r, diesem analog natürlich auch M_{r+1} positiv, d. h.

Die Normalmomente an den Enden des belasteten Feldes sind stets positiv.

Digitized by Google

In Verbindung mit dem Vorigen ist es nun leicht, das Vorzeichen irgend eines Normalmomentes zu bestimmen.

Da $(2 - a_1)\, l_{r-1}$ positiv ist, so ist $2\, l_r + (2 - a_1)\, l_{r-1} > 2\, l_r$; ebenso ist $2\, l_r + (2 - a_2)\, l_{r+1} > 2\, l_r$. Demnach ist nach den Gleichungen a

$$2\, M_{r-1} + M_r < \mathfrak{N}', \quad M_{r-1} + 2\, M_r < \mathfrak{N}'',$$
$$3\,(M_{r-1} + M_r) < \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'',$$

oder weil $\mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' = 3\,(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'')$ ist,

$$159. \quad M_{r-1} + M_r < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

§. 140. Transversalkräfte, Stützendrücke und Momente

Nach 145 (§. 136) wird für das m^{te} unbelastete Feld (wobei $m < r$):

$$160. \quad Q_m = -\frac{M_{m-1} - M_m}{l_m}.$$

Da M_{m-1} und M_m entgegengesetzte Vorzeichen haben, so hat Q_m dasselbe Vorzeichen wie M_m, ist also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ. Ebenso ist $Q_{m+1} l_{m+1} = -M_m + M_{m+1}$, mithin

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{1 - \dfrac{M_{m+1}}{M_m}}{\dfrac{M_{m-1}}{M_m} - 1} \cdot \frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Nach dem vorigen Paragraph ist $\dfrac{M_{m+1}}{M_m}$ negativ und > 2, also im vorigen Ausdrucke der Zähler positiv und > 3. Ferner ist $\dfrac{M_{m-1}}{M_m}$ negativ und $< \frac{1}{2}$, also der Nenner negativ und $< \frac{3}{2}$. Demnach ist $\dfrac{Q_{m+1}}{Q_m}$ negativ und $> 2\,\dfrac{l_m}{l_{m+1}}$, d. h.

Die Transversalkräfte sind abwechselnd positiv und negativ und nehmen (wenn nicht $2\, l_m < l_{m+1}$ ist) nach dem belasteten Felde hin zu und zwar ist

$$161. \quad -\frac{Q_{m+1}}{Q_m} > 2\,\frac{l_m}{l_{m+1}}.$$

Ferner ist nach 154 (§. 136) der Stützendruck an einer beliebigen Stütze $D_m = Q''_m - Q'_{m+1}$. Q''_m und Q'_{m+1} haben entgegengesetzte Vorzeichen, so dass D_m dasselbe Vorzeichen hat, wie Q''_m. D_m ist also ebenfalls abwechselnd positiv und negativ. Ferner ist $D_{m+1} = Q''_{m+1} - Q_{m+2}$, mithin

$$\frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{1 - \dfrac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}}}{\dfrac{Q_m}{Q_{m+1}} - 1}.$$

Nach dem Vorigen ist $\dfrac{Q_{m+2}}{Q_{m+1}}$ negativ und $> 2\,\dfrac{l_{m+1}}{l_{m+2}}$; ebenso ist $\dfrac{Q_m}{Q_{m+1}}$ negativ und $< \frac{1}{2}\,\dfrac{l_{m+1}}{l_m}$. Demnach ist der Zähler positiv und der Nenner negativ, also der Bruch negativ und zwar

Digitized by Google

$$162. \quad -\frac{D_{m+1}}{D_m} > \frac{1+2\frac{l_{m+1}}{l_{m+2}}}{1+\frac{1}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}} .$$

Hiernach sind die Stützendrücke abwechselnd positiv und negativ und nehmen (wenn nicht $4\,l_m < l_{m+1}$ ist), nach dem belasteten Felde hin zu.

Für einen beliebigen Querschnitt im m^{ten} Felde ist nach 152: $M = M_{m-1} + Q'_m\,x = M_{m-1} - (M_{m-1} - M_m)\frac{x}{l}$ oder

$$163. \quad M = M_{m-1}\left(1-\frac{x}{l}\right) + M_m\frac{x}{l} .$$

Da M_{m-1} und M_m nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so nimmt für dasselbe $\frac{x}{l}$ auch M nach dem belasteten Felde hin zu.

Auf Taf. V ist in Fig. 6 Q und in Fig. 7 M graphisch dargestellt.

§. 141. Formänderung. Nach 139 (§. 134) wird für ein unbelastetes Feld

$$164. \quad \tau_m = +\frac{l_m}{6\,E\,W}(M_{m-1} + 2\,M_m) = -\frac{l_{m+1}}{6\,E\,W}(M_{m+1} + 2\,M).$$

Da M_{m-1} und M_m entgegengesetztes Vorzeichen haben und $2\,M_m > M_{m-1}$ ist, so hat $M_{m-1} + 2\,M_m$ also auch τ_m dasselbe Vorzeichen, wie M_m, τ_m ist daher wie M_m abwechselnd positiv und negativ. Da $M_m > 2\,M_{m-1}$ ist, so ist $M_{m-1} + 2\,M_m > 3\,M_{m-1}$, also $2\,E\,W\,\tau_m > M_{m-1}\,l_m$ und $M_{m-1} + 2\,M_m < \frac{3}{2}M_m$, also $4\,E\,W\,\tau_m < M_m\,l_m$. Ebenso ist auch $2\,E\,W\,\tau_{m+1} > M_m\,l_{m+1}$, folglich $\frac{2\,E\,W\,\tau_{m+1}}{2\,E\,W\,\tau_m} > \frac{M_m\,l_{m+1}}{M_m\,l_m}$, d. i.

$$165. \quad \frac{\tau_{m+1}}{\tau_m} > 2\frac{l_{m+1}}{l_m} .$$

Der Winkel τ_m ist daher abwechselnd positiv und negativ und nimmt (wenn nicht $2\,l_{m+1} < l_m$ ist) nach dem belasteten Felde hin zu.

Nach 122 (§. 128) wird ferner

$$166. \quad \frac{\eta_m}{l} = \frac{x}{l}\left(1+\frac{x}{l}\right)\left[\tau_{m-1}\left(1-\frac{x}{l}\right) - \tau_m\frac{x}{l}\right] .$$

Da τ_{m-1} und τ_m entgegengesetztes Vorzeichen haben, so hat η_m dasselbe Vorzeichen wie τ_{m-1}. Da ferner τ_{m-1} und τ_m nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so muss dies auch mit $\frac{\eta_m}{l}$ für dasselbe $\frac{x}{l}$ der Fall sein. Die Abweichung erfolgt also abwechselnd nach unten und oben und nimmt nach dem belasteten Felde hin zu. (Taf. V Fig. 8).

Im Allgemeinen lässt sich also behaupten, dass der Einfluss eines belasteten Feldes von diesem Felde aus nach den Enden des Stabes hin abnimmt.

Digitized by Google

XIV. Kapitel.

Prismatischer continuirlicher Stab mit gleichen Feldern und gleich hohen Stützen.

A. Beliebige Belastung.

§. 142. Normalmomente. Bei gleicher Länge der Felder gehen die allgemeinen Normalgleichungen 142 (§. 134) über in folgende

$$167. \quad \begin{cases} 4\,M_1 + M_2 = \mathfrak{R}_1'' + \mathfrak{R}_2', \\ M_1 + 4\,M_2 + M_3 = \mathfrak{R}_2'' + \mathfrak{R}_3', \\ M_2 + 4\,M_3 + M_4 = \mathfrak{R}_3'' + \mathfrak{R}_4', \\ \quad \cdots\cdots \\ M_{n-3} + 4\,M_{n-2} + M_{n-1} = \mathfrak{R}''_{n-2} + \mathfrak{R}'_{n-1}, \\ M_{n-2} + 4\,M_{n-1} = \mathfrak{R}''_{n-1} + \mathfrak{R}'_n. \end{cases}$$

Die in §. 135 angegebene Auflösungsweise führt hier schnell zum Ziele. Wir bezeichnen für diesen Fall, mit welchen die Gleichungen multiplicirt werden müssen, damit bei der Addition auf der linken Seite nur M_1 oder M_{n-1} übrig bleibt, je nachdem die letzte oder erste Gleichung mit der ersten Zahl multiplicirt, mit $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots$ Alsdann besteht zwischen drei auf einander folgenden Zahlen die Beziehung

$$168. \quad c_{m-1} + 4\,c_m + c_{m+1} = 0.$$

Wählt man die erste Zahl $c_1 = -1$, und nimmt die noch vor dieser stehenden Zahl $c_0 = 0$ an, so ergeben sich für die einzelnen Zahlen folgende Werthe:

$$\begin{array}{llll} c_1 = -1, & c_5 = -209, & c_9 = -40545, \\ c_2 = +4, & c_6 = +780, & c_{10} = -151316, \\ c_3 = -15, & c_7 = -2911, & c_{11} = -564719, \\ c_4 = +56, & c_8 = +10864, & \text{u. s. f.} \end{array}$$

Wir nennen diese Zahlen die Clapeyron'schen Zahlen, weil Clapeyron dieses Verfahren zuerst angegeben hat.

Hat man in dieser Weise M_1 bestimmt, so erhält man die übrigen Normalmomente successive unmittelbar aus den Normalgleichungen. Man kann indessen jedes Normalmoment auch direkt erhalten. Hierzu multiplicire man die Normalgleichungen, mit der ersten beginnend, bis zu derjenigen, welche das gesuchte Normalmoment M_m als mittleres Glied enthält, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addire alle diese Gleichungen; ebenso multiplicire man die übrigen Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addire sie ebenfalls. Hierbei haben sich sämmtliche M, mit Ausnahme von M_m und M_{m+1}, welche man aus den zwei durch die Addition erhaltenen Gleichungen bestimmen kann.

§. 143. Die Clapeyron'schen Zahlen. Zunächst wollen wir uns mit einigen für die Folge wichtigen Eigenschaften dieser Zahlen bekannt machen.

1. Verhältniss zweier Zahlen. Nach Gleichung 168 ist das Verhältniss von zwei auf einander folgenden Clapeyron'schen Zahlen

$$\frac{c_m}{c_{m+1}} = -\frac{c_m}{4\,c_m + c_{m-1}} = -\frac{1}{4 + \dfrac{c_{m-1}}{c_m}}.$$

Digitized by Google

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{c_m}{c_{m+1}} = k_m$, so ist demnach

$$169. \quad k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{4 - k_1}, \quad k_3 = \frac{1}{4 - k_2} \cdots$$

Da k_1 positiv und < 4 ist, so ist $4 - k_1$, also auch k_2 positiv; weil $4 - k_1 < 4$ ist, so ist $k_2 > \frac{1}{4}$ oder $k_2 > k_1$ und weil $k_1 < 1$, also $4 - k_1 > 3$ ist, so ist $k_2 < \frac{1}{3}$. — Da nun ferner k_2 positiv und < 4 ist, so ist $4 - k_2$, also auch k_3 positiv; weil $k_2 > k_1$, also $4 - k_2 < 4 - k_1$ ist, so ist $k_3 > k_2$ und weil $k_2 < 1$, also $4 - k_2 > 3$ ist, so ist $k_3 < \frac{1}{3}$ u. s. f. Demnach sind sämmtliche k positiv und wachsen fortwährend, ohne $\frac{1}{3}$ zu erreichen.

Bei wachsendem m nähert sich k_m immer mehr der Grenze

$$k = \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}}}$$

Hiernach ist $k = \frac{1}{4 - k}$ oder

$$k^2 - 4k + 1 = 0.$$

$$170. \quad k = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949192,$$

so dass demnach k_m stets zwischen den engen Grenzen 0,25 und 0,26795 enthalten ist. Die wirkliche Division je zweier auf einander folgender Zahlen giebt

$k_1 = 0.25,$ $\quad k_4 = 0{,}2679426,$
$k_2 = 0{,}2666667,$ $\quad k_5 = 0{,}2679487.$
$k_3 = 0{,}2678571,$ $\quad$ u. s. w.

2. Summe der Zahlen. Es ist

$$\begin{cases} c_1 = -1, \\ 4c_1 + c_2 = 0. \\ c_1 + 4c_2 + c_3 = 0. \\ \cdots \\ c_n + 4c_{n+1} + c_{n+2} = 0. \end{cases}$$

Addiren wir sämmtliche Gleichungen und bezeichnen die Summe der n ersten Clapeyron'schen Zahlen mit S_n, so ergiebt sich $6S_n + 5c_{n+1} + c_{n+2} = -1$, oder, weil $c_{n+2} = -4c_{n+1} - c_n$ ist,

$$171. \quad S_n = \tfrac{1}{6}(c_n - c_{n+1} - 1).$$

Es ist ferner

$$\begin{cases} c_1 = -1, \\ c_1 + c_3 = -4c_2, \\ c_3 + c_5 = -4c_4, \\ \cdots \\ c_{n-2} + c_n = -4c_{n-1}. \end{cases}$$

Addiren wir sämmtliche Gleichungen und bezeichnen dabei die Summe der Zahlen mit geradem Index bis c_n mit S'_n, die der Zahlen mit ungeradem Index bis c_n mit S''_n, so ergiebt sich $2S''_n = c_n - 1 - 4S'_{n-1}$. Ausserdem ist $S'_{n-1} + S''_n = S_n$. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich $S'_{n-1} = \frac{1}{2}(c_{n-1} - 1) - S_n$, $\quad S''_n = -\frac{1}{2}(c_{n-1} - 1) + 2S_n$, d. i.

Digiti

$$S'_{n-1} = + \tfrac{1}{6}(2\,c_n + c_{n+1} - 2), \quad S'_n = - \tfrac{1}{6}(c_n + 2\,c_{n+1} - 1)$$

oder

$$172. \quad \begin{cases} S'_n = + \tfrac{1}{6}(-c_n - 2\,c_{n+1} - 2) \\ S''_n = - \tfrac{1}{6}(c_n + 2\,c_{n+1} - 1). \end{cases}$$

3. Summe der Zahlen $c_{n+1} + k\,c_n$. Da nach 1 $k\,c_n$ von $-c_{n-1}$ nicht viel abweicht, so wird die Zahl $c_{n-1} + k\,c_n$ sehr klein sein und mit wachsendem n immer mehr abnehmen. So ergiebt sich

$$k\,c_1 = -0{,}26795, \quad k_3 + k\,c_4 = +0{,}00515.$$
$$k_1 + k\,c_2 = +0.07180. \quad k_4 + k\,c_5 = -0{,}00138$$
$$k_2 + k\,c_3 = -0{,}01924, \qquad \text{u. s. f.}$$

Da $k\,c_n$, absolut genommen, $> c_{n-1}$ ist, so hat $c_{n+1} + k\,c_n$ dasselbe Vorzeichen, wie c_n, ist also abwechselnd positiv und negativ. Bezeichnen wir die Summe der positiven Zahlen bis zu $c_{n-1} + k\,c_n$ mit Σ'_n und die Summe der negativen Zahlen bis zu $c_{n-1} + k\,c_n$ mit Σ''_n, so ist

$$173. \quad \begin{cases} \Sigma'_n = S''_{n-1} + k\,S'_n = \tfrac{1}{6}[-(c_{n-1} + 2\,c_n - 1) + k(-c_n - 2\,c_{n+1} - 2)], \\ \Sigma''_n = S'_{n-1} + k\,S''_n = \tfrac{1}{6}[-(c_{n-1} + 2\,c_n - 2) - k(c_n + 2\,c_{n+1} - 1)]. \end{cases}$$

Denken wir uns die Zahlen $c_{n-1} + k\,c_n$ bis in's Unendliche fortgesetzt, so ist $k\,c_n = -c_{n-1}$, $k\,c_{n+1} = -c_n$ zu setzen. Hierdurch heben sich in jedem Ausdrucke zweimal je zwei Glieder und es ergiebt sich

$$174. \quad \begin{cases} \Sigma''_\infty = + \tfrac{1}{6}(1 - 2\,k) = + \tfrac{1}{6}(2\sqrt{3} - 3) = +0{,}0773503, \\ \Sigma'_\infty = - \tfrac{1}{6}(2 - k) = - \tfrac{1}{6}\sqrt{3} = -0{,}2886751. \end{cases}$$

Die Summe sämmtlicher positiver und negativer Zahlen, d. i. $\Sigma''_\infty + \Sigma'_\infty$ ist daher

$$175. \quad \Sigma_\infty = - \tfrac{1}{6}(1 + k) = - \tfrac{1}{6}(3 - \sqrt{3}) = -0{,}2113248.$$

4. Beziehung zwischen zwei Zahlen. Setzen wir in dem Ausdrucke $A = c^2_{n-1} + 4\,c_{n-1}c_n + c^2_n$ $c_n = -(4\,c_{n-1} + c_{n-2})$, so ergiebt sich $A = c^2_{n-2} + 4\,c_{n-2}c_{n-1} + c^2_{n-1}$. Setzen wir hierin wieder $c_{n-1} = -(4\,c_{n-2} + c_{n-3})$, u. s. f., so ergiebt sich schliesslich $A = c_1^2 + 4\,c_1c_2 + c_2^2 = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 + 4^2 = 1$. Demnach ist für jedes n

$$176. \quad c^2_{n-1} + 4\,c_{n-1}c_n + c^2_n = 1.$$

wonach es möglich ist, jede Zahl aus der vorhergehenden allein zu berechnen.

B. Belastung eines einzigen Feldes.

§. 144. Normalmomente. Wenn nur ein Feld, und zwar das r^{te} belastet ist, so werden die Normalgleichungen

$$177. \quad \begin{cases} 4\,M_1 + M_2 = 0, \\ M_1 + 4\,M_2 + M_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{r-2} + 4\,M_{r-1} + M_r = \mathfrak{N}', \\ M_{r-1} + 4\,M_r + M_{r+1} = \mathfrak{N}'', \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{n-3} + 4\,M_{n-2} + M_{n-1} = 0, \\ M_{n-2} + 4\,M_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Durch das in §. 142 angegebene Verfahren zur Bestimmung von M_1 und M_{n-1} ergiebt sich

$$178. \quad M_1 = \frac{\mathfrak{N}'c_{n-r+1} + \mathfrak{N}''c_{n-r}}{c_n}, \quad M_{n-1} = -\frac{\mathfrak{N}'c_{r-1} + \mathfrak{N}''c_r}{c_n}.$$

Digitized by Google

Nun wird $M_2 = -4M_1$, $M_3 = -4M_2 - M_1 = +15M_1$, $M_4 = -4M_3 - M_2 = -56M_1$ u. s. w., allgemein also

179. $M_m = -c_m M_1 \quad (m \leqq r-1) \qquad M_m = -c_{n-m} M_{n-1} \quad (m \geqq r)$.

Die auf einander folgenden Momente verhalten sich also wie die Clapeyron'schen Zahlen.

Dieses Verfahren bedarf einer Modification, wenn eine unendlich grosse Anzahl von Feldern vorhanden ist. Für diesen Fall ergiebt sich für ein m, welches $> r$ ist, leicht

$$\frac{M_{m+1}}{M_m} = -\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ldots}}},$$

d. i. nach der Bezeichnung des vorigen Paragraphen

180. $$\frac{M_{m+1}}{M_m} = -k = -2+\sqrt{3}.$$

Demnach wird auch $M_{r+1} = -k M_r$. Nach dem Obigen ist ferner $M_{r-1} = -c_{r-1} M_1$, $M_{r-2} = -c_{r-2} M_1$. Substituiren wir diese Werthe in die beiden mittleren der Gleichungen 177, beachten dabei, dass $c_{r-2} + 4c_{r-1} = -c_r$ ist und reduciren auf M_1 und M_r, so ergiebt sich, den Werth für k eingesetzt,

$$M_1 = \frac{(2+\sqrt{3})\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}''}{(2+\sqrt{3})c_r + c_{r-1}}, \qquad M_r = \frac{c_{r-1}\mathfrak{R}' + c_r\mathfrak{R}''}{(2+\sqrt{3})c_r + c_{r-1}}.$$

Multipliciren wir, um einen rationalen Nenner zu erhalten, Zähler und Nenner mit $2c_r + c_{r-1} - c_r\sqrt{3}$, so wird der Nenner $c^2_{r-1} + 4c_{r-1}c_r + c^2_r$, d. i. nach 176 (vor. §.) $= 1$, mithin wird

181. $$\begin{cases} M_1 = [(2-\sqrt{3})c_r + c_{r-1}][(2+\sqrt{3})\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}''], \\ M_r = [(2-\sqrt{3})c_r + c_{r-1}][c_{r-1}\mathfrak{R}' + c_r\mathfrak{R}'']. \end{cases}$$

Ist hiernach M_1, M_r bestimmt, so ist

182. $M_m = -c_m M_1$, $(m < r)$, $\quad M_m = (2-\sqrt{3})^{m-r} M_r \quad (m \geqq r)$.

Die letztere Gleichung ergiebt sich leicht durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung 180.

Ist ein mittleres Feld belastet, also $r = \infty$, so wird $M_{r+1} = -k M_r$, $M_{r-2} = -k M_{r-1}$. Dies in die mittleren der Gleichungen 177 gesetzt, giebt, wenn man gleichzeitig $\mathfrak{R}' = 2\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{M}' + 2\mathfrak{M}''$ setzt,

183. $$\begin{cases} M_{r-1} = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}' + k\mathfrak{M}''), \\ M_r = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}'' + k\mathfrak{M}'). \end{cases}$$

Alsdann wird $M_{r-2} = -k M_{r-1}$, $M_{r-3} = k^2 M_{r-1}$ u. s. f. und $M_{r+1} = -k M_r$, $M_{r+2} = k^2 M_r$ u. s. f.

Beispiel. Sind z. B. 5 Felder vorhanden, von denen das IV. belastet ist, so ist nach 178 $M_1 = -\frac{\mathfrak{R}' c_2 + \mathfrak{R}'' c_1}{c_3} = -\frac{4\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}''}{-209} = \frac{2\mathfrak{R}' + 7\mathfrak{R}''}{209}$, $M_2 = -\frac{\mathfrak{R}' c_3 + \mathfrak{R}'' c_2}{c_3} = \frac{15\mathfrak{R}' + 56\mathfrak{R}''}{-209} = \frac{26\mathfrak{R}' + 97\mathfrak{R}''}{209}$. Nach 179 wird nun $M_3 = -4M_2$, $M_4 = +15M_1$. Ist hierbei das IV. Feld gleichmässig belastet, so ist $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = \frac{1}{12} q l^2$, mithin

$$M_1 = +\frac{3}{836} q l^2, \quad M_2 = -\frac{12}{836} q l^2, \quad M_3 = +\frac{45}{836} q l^2, \quad M_4 = +\frac{41}{836} q l^2.$$

Digitized by Google

In gleicher Weise sind beispielsweise die Normalmomente für einen Stab mit 7 Feldern berechnet und in folgender Tabelle zusammengestellt.

Belast. Feld	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
I.	+ 780	− 209	+ 56	− 15	+ 4	− 1
II.	+ 571	+ 627	− 168	+ 45	− 12	+ 3
III.	− 153	+ 612	+ 616	− 165	+ 44	− 11
IV.	+ 41	− 164	+ 615	+ 615	− 164	+ 41
V.	− 11	+ 44	− 165	+ 616	+ 612	− 153
VI.	+ 3	− 12	+ 45	− 168	+ 627	+ 571
VII.	− 1	+ 4	− 15	+ 56	− 209	+ 780
			$\frac{q\,l^2}{1644}$			

Ist ferner z. B. bei unendlich vielen Feldern das IV. Feld gleichmässig belastet, so ist nach 181 und 182: $M_1 = [(2-\sqrt{3})c_4 - c_3](2+\sqrt{3}-1)\frac{1}{4}\,q\,l^2 = [(2-\sqrt{3})\,56 - 15]\,(1+\sqrt{3})\,\frac{1}{4}\,q\,l^2 = +0{,}003517\,q\,l^2$, $M_2 = -4\,M_1 = -0{,}0141\,q\,l^2$, $M_3 = +15\,M_1 = +0{,}0528\,q\,l^2$, $M_4 = [(2-\sqrt{3})c_4 - c_3](c_3 + c_4)\frac{1}{4}\,q\,l^2 = [(2-\sqrt{3})\,56 - 15](-15+56)\,\frac{1}{4}\,q\,l^2 = +0{,}0528\,q\,l^2$, $M_5 = -(2-\sqrt{3})\,M_4 = -0{,}0141\,q\,l^2$, $M_6 = (2-\sqrt{3})^2\,M_4 = +0{,}0038\,q\,l^2$, $M_7 = -(2-\sqrt{3})^3\,M_4 = -0{,}0010\,q\,l^2$ u. s. f.

Ist ein mittleres Feld gleichmässig belastet, so wird nach 188

$$M_{r-1} = M_r = +\frac{3-\sqrt{3}}{24}\,q\,l^2 = +0{,}05283\,q\,l^2.$$

$$M_{r-2} = M_{r+1} = -\frac{9-5\sqrt{3}}{24}\,q\,l^2 = -0{,}01416\,q\,l^2 \text{ u. s. f.}$$

§. 145. Die übrigen Grössen.

a. Transversalkräfte. Für einen beliebigen Querschnitt des m^{ten} unbelasteten Feldes ist nach 160 (§. 140):

$$184.\quad Q_m = -\frac{M_{m-1} - M_m}{l} = (c_{m-1} - c_m)\frac{M_1}{l}.$$

Hiernach wird $Q_1 = +1\,\frac{M_1}{l}$, $Q_2 = -(1-4)\,\frac{M_1}{l} = 5\,\frac{M_1}{l}$ $Q_3 = (15+4)\,\frac{M_1}{l} = +19\,\frac{M_1}{l}$ u. s. f. Die Transversalkräfte verhalten sich hiernach wie

$$+1 : -5 : +19 : -71 : +265 : +989 : \ldots$$

Hiernach wird

$$\frac{Q_{m+1}}{Q_m} = \frac{c_m - c_{m+1}}{c_{m-1} - c_m} = \frac{1 - \frac{c_{m+1}}{c_m}}{\frac{c_{m-1}}{c_m} - 1},$$

so dass sich dieses Verhältniss bei wachsendem m mit Rücksicht auf §. 143 dem Werthe

$$\frac{1+\frac{1}{k}}{-k-1} = -\frac{1}{k} = -(2+\sqrt{3}) = -3{,}7321$$

nähert.

b. Stützendrücke. Der Druck auf die Stütze m ist nach 154 (§. 136) $D_m = Q''_m - Q'_{m+1}$, d. i.

Digitized by Google

$$D_m l = -(M_{m-1} - M_m) + (M_m + M_{m+1})$$
$$= -M_{m-1} + 2M_m - M_{m+1}$$
$$= (c_{m-1} - 2c_m + c_{m+1}) M_1$$

oder, weil $c_{m-1} + 4c_m + c_{m+1} = 0$ ist,

$$185. \quad D_m = -6c_m \frac{M_1}{l} = 6\frac{M_m}{l}.$$

Die Stützendrücke sind also dem entsprechenden Normalmomente proportional.

Für die äussere Stütze wird $D_0 l = -Q_1 l = (0 - M_1) = -M_1$; ferner wird $D_1 l = +6M_1$, $D_2 l = 6M_2 = -24M_1$, $D_3 l = 6M_3 = +90M_1$ u. s. f.

c. Formänderung. Nach 155 (§. 137) wird in einem unbelasteten Felde

$$186. \quad \eta = \frac{x(l-x)}{6EW}\left[2c_{m-1} + c_m - (c_{m-1} - c_m)\frac{x}{l}\right] M_1.$$

Im I. Felde wird $6EWl\eta = -x(l^2 - x^2)M_1$; η wird zum Maximum für $x = l\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5774\,l$ und zwar ist $EW \max \eta = 0{,}0642\,M_1 l^2$. In den übrigen Feldern wird η zum Maximum für $x = 0{,}6228\,l$ bis $x = 0{,}6196\,l$ und es liegt $EW \max \eta$ zwischen $0{,}0562\,M_m l^2$ und $0{,}0491\,M_m l^2$, so dass $\max \eta$ nahezu dem M_m proportional ist.

C. Gleiche Belastung aller Felder.

§. 146. Normalmomente. Die Felder seien beliebig, aber symmetrisch in Beziehung auf ihre Mitte und sämmtliche Felder seien in ganz gleicher Weise belastet. Alsdann wird $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''$; $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}''$; die allgemeine Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Normalmomenten wird demnach

$$187. \quad M_{m-1} + 4M_m + M_{m+1} = 2\mathfrak{N} = 6\mathfrak{M}.$$

Wären diese drei Momente gleich, so wäre jedes $= \mathfrak{M}$. Wir wollen daher allgemein

$$188. \quad M_m = (1 + \Delta_m)\mathfrak{M}$$

setzen; alsdann wird

$$189. \quad \Delta_{m-1} + 4\Delta_m + \Delta_{m+1} = 0.$$

Die erste Normalgleichung wird $4M_1 + M_2 = 6M$ oder $4(1 + \Delta_1)\mathfrak{M} + (1 + \Delta_2)\mathfrak{M} = 6\mathfrak{M}$, d. i. $4\Delta_1 + \Delta_2 = 1$. Daher gehen die Normalgleichungen über in

$$190. \quad \begin{cases} 4\Delta_1 + \Delta_2 = 1, \\ \Delta_1 + 4\Delta_2 + \Delta_3 = 0, \\ \Delta_2 + 4\Delta_3 + \Delta_4 = 0, \\ \quad \cdots \\ \Delta_{n-3} + 4\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1} = 0, \\ \Delta_{n-2} + 4\Delta_{n-1} = 1. \end{cases}$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, multipliciren wir dieselben, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addiren sie sodann. Hierbei ergiebt sich $\Delta_1(c_{n-2} + 4c_{n-1}) = -1 + c_{n-1}$ oder $-c_n \Delta_1 = -1 + c_{n-1}$. Um nun ein beliebiges Δ_m zu bestimmen, multipliciren wir die $(m-1)$ ersten Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen

Digitized by Google

und addiren sie sodann. Hierbei ergiebt sich $\Delta_1(c_{m-2}+4c_{m-1})-\Delta_m = c_{m-1}$ oder $c_m\Delta_1-\Delta_m=c_{m-1}$. Sonach ist

$$191.\quad \Delta_1=\frac{1-c_{m-1}}{c_m},\quad \Delta_m=-c_{m-1}-c_m\Delta_1.$$

Beispielsweise ist für fünf Felder $\Delta_1=\frac{1-c_4}{c_5}=\frac{1-56}{-209}=+\frac{5}{19}$ $\Delta_2=-c_1-c_2\Delta_1=1-4.\frac{5}{19}=-\frac{1}{19}$, $\Delta_3=-c_2-c_3\Delta_1=-4+15.\frac{5}{19}=-\frac{1}{19}$, $c_4=-c_3-c_4\Delta_1=-15+56.\frac{5}{19}=+\frac{5}{19}$.

Das Verhältniss zweier auf einander folgender Δ ist

$$\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}=\frac{-4\Delta_m-\Delta_{m+1}}{\Delta_m}=-\left(4+\frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m}\right),$$

oder, wenn wir zur Abkürzung $\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}=v_m$ setzen,

$$v_m=-\left(4+\frac{1}{v_{m+1}}\right).$$

Hat der Stab eine ungerade Anzahl von Feldern, so sind offenbar die Momente für die beiden mittleren Stützen einander gleich; sind i, i + 1 die Indices dieser Stützen, so ist also $\Delta_i=\Delta_{i+1}$, mithin

$$v_{i+1}=1,\quad v_i=-\left(4+\frac{1}{1}\right)=-5.$$

Hat der Stab aber eine gerade Anzahl von Feldern und ist i der Index der mittleren Stütze, so ist $\Delta_{i-1}=\Delta_{i+1}$, und da $\Delta_{i-1}+4\Delta_i+\Delta_{i+1}=0$ ist, $2\Delta_{i+1}+4\Delta_i=0$, also

$$v_{i+1}=-2,\quad v_i=-\left(4+\frac{1}{-2}\right)=-3\frac{1}{2}.$$

Weiter ist nun

$$v_{i-1}=-\left(4-\frac{1}{v_i}\right),\quad v_{i-2}=-\left(4-\frac{1}{v_{i-1}}\right),\quad \ldots$$

Da in beiden Fällen v_i negativ und >3 ist, so ist v_{i-1} ebenfalls negativ und $>4-\frac{1}{3}$, d. i. $>3\frac{2}{3}$. — Da also v_{i-1} negativ und >3 ist, so ist v_{i-2} ebenfalls negativ und $>4-\frac{1}{3}$, d. i. $>3\frac{2}{3}$ u. s. f. Es ist also jedes v negativ und grösser als 3. Die Δ_m sind daher abwechselnd positiv und negativ und werden von der Mitte nach den Enden hin immer grösser oder:

Die Normalmomente sind abwechselnd grösser und kleiner, als $\mathfrak{M}$ und nähern sich diesem Werthe von den Enden nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

Bei unendlich vielen Feldern ergiebt sich ebenso wie bei den Clapeyron'schen Zahlen in §. 149

$$192.\quad \frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m}=-k=-(2-\sqrt{3})=-0{,}267949.$$

Demnach wird $\Delta_2=-k\Delta_1$, $\Delta_3=k^2\Delta_1,\ldots$ Setzen wir in der ersten der Gleichungen 190 $\Delta_2=-k\Delta_1$, so wird $\Delta_1=\frac{1}{4-k}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ $=2-\sqrt{3}$ oder

$$193.\quad \Delta_1=+k,\quad \Delta_2=-k^2,\quad \Delta_3=+k^3,\ldots\quad \Delta_m=(-k)^m.$$

Die hiernach berechneten Werthe von Δ_m sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Digitized by Google

n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7
2	+ 0,5000						
3	+ 0,2000	+ 0,2000					
4	+ 0,2857	— 0,1429	+ 0,2857				
5	+ 0,2632	— 0,0526	— 0,0526	+ 0,2632			
6	+ 0,2692	— 0,0769	+ 0,0385	— 0,0769	+ 0,2692		
7	+ 0,2676	— 0,0704	+ 0,0141	+ 0,0141	— 0,0704	+ 0,2676	
∞	+ 0,2680	— 0,0716	+ 0,0191	— 0,0051	+ 0,0014	— 0,0005	+ 0,0001

Für die äusseren Stützen ist $M_0 = M_n = 0$; für diese ist also $\Delta_0 = \Delta_n = -1$ zu setzen.

§. 147. Transversalkräfte. In den Formeln 146 (§. 136) für Q', Q'' ist $X_1 = \frac{1}{2} Gl$ zu setzen, wenn G die Gesammtlast eines Feldes bedeutet. Daher wird

194. $$Q'_m = -\frac{1}{2} G - (\Delta_{m-1} - \Delta_m)\frac{\mathfrak{M}}{l}, \quad Q''_m = +\frac{1}{2} G - (\Delta_{m-1} - \Delta_m)\frac{\mathfrak{M}}{l},$$

wonach sich Q', Q'' leicht berechnen lassen. Es ist

$$\Delta_{m-1} - \Delta_m = \left(\frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} - 1\right)\Delta_m = -(-\nu_m + 1)\,\Delta_m .$$

Nach dem vorigen Paragraph ist ν_m negativ und > 3, also $-\nu_m + 1$ positiv und > 4, mithin hat $\Delta_{m-1} - \Delta_m$ das entgegengesetzte Vorzeichen, als Δ_m, ist also ebenfalls positiv und negativ. Da sich Δ_{m-1} und Δ_m nach der Mitte zu immer mehr der Null nähern, so ist dies auch mit $\Delta_{m-1} - \Delta_m$ der Fall. Hieraus folgt:

Jede der Transversalkräfte Q', Q'' ist abwechselnd grösser und kleiner als $\frac{1}{2}$ G und nähert sich diesem Werthe nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

Bei gleichmässiger Belastung ist $G = ql$. $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} ql$ zu setzen. Für diesen Fall ist folgende Tabelle berechnet:

n	Q_1' —	Q_1'' +	Q_2' —	Q_2'' +	Q_3' —	Q_3'' +	Q_4' —	Q_4'' +	Q_5' —	Q_5'' +	Q_6' —	Q_6'' +
2	0,750	1,250	1,250	0,750								
3	0,800	1,200	1,000	1,000	1,200	0,800						
4	0,786	1,214	1,071	0,929	0,929	1,071	1,214	0,786				
5	0,790	1,211	1,053	0,947	1,000	1,000	0,947	1,053	1,211	0,790		
6	0,789	1,212	1,058	0,942	0,981	1,019	1,019	0,981	0,942	1,058	1,212	0,789
∞	0,789	1,211	1,059	0,943	0,985	1,015	1,004	0,996	0,999	1,000	1,000	1,000

$\cdot \frac{1}{2} ql.$

Bei gleichmässiger Belastung ist für eine beliebige Stelle

$$Q = Q' - q\,x.$$

Für $x = \frac{Q'}{q}$ wird $Q = 0$. Da Q' abwechselnd grösser und kleiner ist als $\frac{1}{2} ql$, so ist dieses x abwechselnd grösser und kleiner als $\frac{1}{2} l$, d. h. der Querschnitt, für welchen die Transversalkraft $Q = 0$ oder das Momont M zu einem Maximum wird, liegt abwechselnd links

Digitized by

und rechts von der Mitte des Feldes. In allen Fällen liegt dieses x zwischen 0,375 l und 0,625 l. Das absolut grösste Q ist stets Q_1''.

Taf. VI Fig. 4, 6, 10 ist Q für 2, 3, 4 Felder graphisch dargestellt.

§. 148. Stützendrücke. Der Druck auf die m^{te} Stütze ist $D_m = Q''_m - Q'_{m+1}$, d. i. nach dem vorigen Paragraph $D_m l = Gl - (\Delta_{m-1} - 2\Delta_m + \Delta_{m+1})\mathfrak{M}$, oder, weil $\Delta_{m-1} + 4\Delta_m + \Delta_{m+1} = 0$ ist,

$$195.\quad D_m = G + 6\Delta_m \frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Hieraus folgt: Die Stützendrücke sind abwechselnd grösser und kleiner als die ganze Last G eines Feldes und nähern sich diesem Werthe von den Enden nach der Mitte zu immer mehr und mehr.

Für den Druck auf die äussere Stütze ist $D_0 = -Q_1' = \frac{1}{2}G - \frac{M_1}{l}$ oder

$$196.\quad D_0 = \frac{1}{2}G - (1 + \Delta_1)\frac{\mathfrak{M}}{l}.$$

Bei gleichmässiger Belastung ist $G = ql$, $\mathfrak{M} = \frac{1}{12}ql^2$, mithin

$$197.\quad D_0 = \frac{5 - \Delta_1}{12}ql, \quad D_m = (1 + \tfrac{1}{2}\Delta_m)ql.$$

Wirkt dagegen eine isolirte Last G in der Mitte, so ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{8}Gl$ mithin

$$198.\quad D_0 = \frac{3 - \Delta_1}{8}G, \quad D_m = (1 + \tfrac{3}{4}\Delta_m)G.$$

Die hiernach für eine gleichmässige Belastung berechneten Stützendrücke sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

n	D_0	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
2	0.3750	1,2500	0.3750				
3	0,4000	1,1000	1,1000	0,4000			
4	0,3928	1,1429	0,9285	1,1429	0,3928		
5	0,3947	1,1316	0,9737	0,9737	1,1316	0,3947	
6	0,4942	1,1346	0,9514	1,0192	0,9514	1,1346	0,3942
∞	0.3942	1,1340	0,9641	1,0096	0,9974	1,0007	0,9998
	ql						

Nach 195 wird $D_{m-1} + 4D_m + D_{m+1} = 6G + 6(\Delta_{m-1} + 4\Delta_m + \Delta_{m+1})\frac{M}{l}$, d. i. nach 182

$$199.\quad D_{m-1} + 4D_m + D_{m+1} = 6G,$$

so dass zwischen den Drücken auf drei benachbarte Stützen eine gleiche Beziehung besteht, wie zwischen den Momenten an diesen Stützen. Hiernach würde man die Stützendrücke auch direct, d. h. unabhängig von den Normalmomenten berechnen können.

§. 149. Momente. Bei gleichmässiger Belastung ist für einen beliebigen Querschnitt durch 152 (§. 136) bestimmt. M wird zum analy-

Digitized by Google

tischen Maximum an derselben Stelle, für welche Q = 0 wird, nämlich für

$$x = \frac{Q'}{q} = \frac{1}{2} l \left(1 + \frac{\Delta_{m-1} - \Delta_m}{6}\right)$$

und zwar ist, wenn wir das analytische Maximum von M mit M′ bezeichnen,

200. $$M'_m = M_{m-1} - \frac{Q'^2_m}{2q} = -\frac{1}{24}\left[1 - (\Delta_{m-1} - \Delta_m) + \frac{1}{12}(\Delta_{m-1} - \Delta_m)^2\right] q l^2.$$

Da Δ_m stets $\leqq \frac{1}{2}$ ist, so ist $\Delta_{m-1} - \Delta_m$ ein echter Bruch, also $\frac{1}{12}(\Delta_{m-1} - \Delta_m)^2 < (\Delta_{m-1} - \Delta_m)$; $\Delta_{m-1} - \Delta_m$ ist nach §. 147 abwechselnd positiv und negativ und nähert sich nach der Mitte hin der Grenze 0 immer mehr. Aus beiden folgt: Das analytische Maximum M′ der Momente ist negativ und abwechselnd grösser und kleiner, als $\frac{1}{24} q l^2$ und nähert sich diesem Werthe nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

Die hiernach berechneten Werthe von M′ sind nebst den Normalmomenten in folgender Tabelle zusammengestellt.

n	M_1' —	M_1 +	M'_2	M_2 +	M'_3 —	M_3 +	M'_4 —	M_4 +	M'_5 —	M_5 +	M'_6 —
2	0,844	1,500	0,844								
3	0,960	1,200	0,300	1,200	0,960						
4	0,926	1,286	0,436	0,857	0,436	1,286	0,926				
5	0,935	1,263	0,399	0,947	0,553	0,947	0,399	1,263	0,935		
6	0,933	1,269	0,430	0,923	0,520	1,088	0,520	0,923	0,430	1,269	0,933
∞	0,934	1,268	0,401	0,939	0,527	1,019	0,493	0,995	0,502	1,002	0,499

$\cdot \frac{1}{12} q l^2$.

Das absolute positive Maximum erreicht M über den neben den Endstützen liegenden Stützen, das absolute negative Maximum im ersten Felde. Das erstere ist das grössere. Bei zwei Feldern ist das grösste Moment eben so gross, als bei einem auf zwei Stützen liegenden Stabe, nämlich $\frac{1}{8} q l^2$. Bei sehr vielen Stützen wird das grösste Moment nur $0{,}845 \cdot \frac{1}{8} q l^2$, also bei gleichen Dimensionen die Tragkraft $\frac{1}{0{,}845} = 1{,}183$mal grösser, als bei einem auf zwei Stützen liegenden Stabe. Das grösste negative Moment ist bei sehr vielen Feldern nur 0,737 vom grössten positiven Momente.

Taf. VI Fig. 4, 6, 10 ist M für 2, 3, 4 Felder graphisch dargestellt.

§. 150. Formänderung. Die Lage der Tangente über einer Stütze ist nach 139 (§. 134) bestimmt durch $6 E W \tau_m = l[(1 + \Delta_{m-1}) \mathfrak{M} + 2(1 + \Delta_m) \mathfrak{M} - 3 \mathfrak{M}]$, d. i.

201. $$6 E W \tau_m = (2 \Delta_m + \Delta_{m-1}) \mathfrak{M} l.$$

Da innerhalb der ersten Hälfte $\Delta_{m-1} > 2 \Delta_m$ ist und Δ_m, Δ_{m-1} verschiedene Vorzeichen haben, so hat τ_m dasselbe Vorzeichen wie Δ_{m-1}, ist also abwechselnd positiv und negativ. Da Δ_m, Δ_{m-1} nach der Mitte hin immer kleiner werden, so ist dies auch mit τ_m der Fall. Die Tangente über den Stützen ist also abwechselnd nach rechts und

Digitized by Google

links geneigt und nähert sich nach der Mitte hin der horizontalen Lage immer mehr.

Die Abweichung bei gleichmässiger Belastung wird nach 155 (§. 136)

$$202.\quad \eta = -\frac{q\,x\,(l-x)}{72\,E\,W}\left[(2\,\Delta_{m-1}+\Delta_m)\,l^2-(3+\Delta_{m-1}-\Delta_m)\,l\,x+3\,x^2\right].$$

Das Maximum erreicht η im ersten Felde für $n = 2$ bei $x = 0{,}422\,l$, für $n = 3$ bei $x = 0{,}446\,l$, für $n = \infty$ bei $x = 0{,}442\,l$. Nach der Mitte zu nähert sich dieses x dem $0{,}5\,l$ immer mehr und mehr. Das Maximum von η wird im ersten Felde bei 2 Feldern $= 2{,}078$, bei 3 Feldern $= 2{,}649$, bei unendlich vielen Feldern $= 2{,}514$, wenn man die Senkung $\frac{q\,l^4}{384\,E\,W}$ bei horizontaler Einspannung $= 1$ setzt. Nach der Mitte zu nähert sich $\max\eta$ diesem Werthe immer mehr, so dass die grösste Senkung im ersten Felde stattfindet.

Die Abweichung in der Mitte der Felder, welche von der grössten Abweichung nur wenig verschieden ist, ist ($x = \frac{1}{2}\,l$):

$$203.\quad \eta' = \frac{q\,l^4}{384\,E\,W}\left[1-2\,(\Delta_{m-1}+\Delta_m)\right],$$

wonach η' abwechselnd grösser und kleiner ist, als $\frac{q\,l^4}{384\,E\,W}$ und sich diesem Werthe nach der Mitte zu immer mehr nähert. In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von η' zusammengestellt.

n	η'_1	η'_2	η'_3	η'_4	η'_5	η'_6
1	5,000					
2	2,000	2,000				
3	2,600	0,200	2,600			
4	2,429	0,714	0,714	2,429		
5	2,474	0,579	1,211	0,579	2,474	
6	2,462	0,615	1,077	1,077	0,615	2,462
∞	2,464	0,608	1,105	0,972	1,008	0,998
	$\cdot\frac{q\,l^4}{384\,E\,W}$					

Taf. VII ist in Fig. 7, 9, 13, 15 die elastische Linie für 2, 3, 4 und unendlich viele Felder dargestellt.

XV. Kapitel.

Prismatischer Stab mit ungleichen Feldern bei gleich hohen Stützen.

A. Gleichmässige Belastung.

§. 151. Allgemeines. Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass die beiden äusseren Felder gleich lang und dass alle übrigen Felder oder

Digitized by Google

die innern Felder gleich lang seien. Ausserdem setzen wir zunächst eine constante gleichmässige Belastung aller Felder voraus.

Wir bezeichnen mit

l die Länge der innern Felder,

l_1 die Länge der äusseren Felder,

ε das Verhältniss $\frac{l_1}{l}$,

α das Verhältniss $\frac{l}{l_1} = \frac{1}{\varepsilon}$.

Alsdann ist $\mathfrak{R}_1'' = \mathfrak{R}_n' = \frac{1}{4} q l_1^2 = \frac{1}{4} \varepsilon^2 q l^2$, $\mathfrak{R}_2' = \mathfrak{R}_2'' = \mathfrak{R}_3' = \ldots = \frac{1}{4} q l^2$. Die Normalgleichungen werden daher

$$204. \quad \begin{cases} 2(1+\varepsilon) M_1 + M_2 = \frac{1}{4}(1+\varepsilon^3) q l^2, \\ M_1 + 4 M_2 + M_3 = \frac{1}{2} q l^2, \\ M_2 + 4 M_3 + M_4 = \frac{1}{2} q l^2, \\ \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

Wir setzen wiederum, wie in §. 146.

$$205. \quad M_m = (1 + \Delta_m) \cdot \tfrac{1}{12} q l^2.$$

Alsdann werden die Normalgleichungen

$$206. \quad \begin{cases} 2(1+\varepsilon)\Delta_1 + \Delta_2 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2), \\ \Delta_1 + 4\Delta_2 + \Delta_3 = 0, \\ \Delta_2 + 4\Delta_3 + \Delta_4 = 0, \\ \quad \ldots\ldots \\ \Delta_{n-3} + 4\Delta_{n-2} + \Delta_{n-1} = 0, \\ \Delta_{n-2} + 2(1+\varepsilon)\Delta_{n-1} = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2). \end{cases}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen, mit der ersten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addiren sie sodann, so ergiebt sich

$$2(1-\varepsilon)\Delta_1 + [c_{n-2} + 2(1+\varepsilon) c_{n-1}]\Delta_{n-1} = (c_{n-1} - 1)\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2).$$

Nun aber ist der Symmetrie wegen $\Delta_{n-1} = \Delta_1$. Ausserdem ist $c_{n-2} = 4 c_{n-1} - c_n$; mithin wird

$$\Delta_1 [2(1-\varepsilon)(1 - c_{n-1}) - c_n] = (c_{n-1} - 1)\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2),$$

also

$$207. \quad \Delta_1 = \frac{(c_{n-1} - 1)\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)}{2(1-\varepsilon)(1 - c_{n-1}) - c_n}.$$

Um Δ_m zu erhalten, multipliciren wir die $m-1$ ersten Gleichungen, mit der letzten beginnend, mit den Clapeyron'schen Zahlen und addiren sie sodann. Es ergiebt sich $\Delta_1 [c_{m-2} + 2(1+\varepsilon) c_{m-1}] - \Delta_m = c_{m-1}\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)$ oder $\Delta_1 [2(1-\varepsilon) c_{m-1} + c_m] - \Delta_m = c_{m-1}\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)$, also

$$208. \quad \Delta_m = -c_{m-1}\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2) - [2(1-\varepsilon) c_{m-1} + c_m]\Delta_1.$$

Schneller jedoch erhält man die Δ_m nach Berechnung von Δ_1 successive aus den Gleichungen 206.

Ueber das Verhältniss zweier auf einander folgender Δ_m gilt dasselbe, wie bei gleichen Feldern (§. 146). Es lässt sich daher auch hier folgern: Die Normalmomente sind abwechselnd grösser und kleiner, als $\mathfrak{M}$ oder $\frac{1}{12} q l^2$ und nähern sich diesem Werthe nach der Mitte hin immer mehr und mehr.

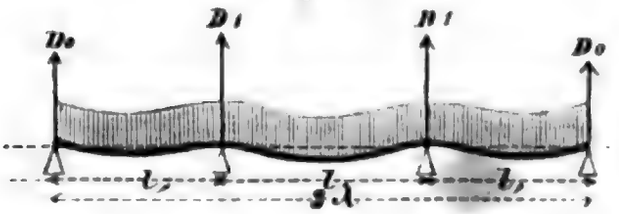
Bei wenig Feldern, wie 3, 4 und 5, bestimmt man die Normalmomente am besten durch direkte Auflösung der Normalgleichungen, wobei zu beachten ist, dass die Normalmomente für gleich weit von beiden Enden abstehende Stützen gleich gross sind.

Die Bestimmung der übrigen Grössen erfolgt in der früher angegebenen Weise. Es ergiebt sich auch hier das Resultat, dass sich die Werthe von Q, D, M und η nach der Mitte hin denen für horizontale Einspannung immer mehr und mehr nähern.

Beispielsweise ergiebt sich für fünf Felder und für $\varepsilon = 0{,}7$ $\Delta_1 = \frac{(56-1)\,.\,0.7\,.\,(3\,.\,0.49-2)}{2(1-0{,}7)(1-56)+209} = \frac{-20{,}405}{+176} = -0{,}11594$. Weiter wird nun nach 206 $\Delta_2 = \varepsilon(3\varepsilon^2-2) - 2(1+\varepsilon)\Delta_1 = 0{,}7\,(3\,.\,0.49-2) + 2\,.\,(1+0{,}7)\,.\,0{,}11894 = +0{,}02319$; $\Delta_3 = -\Delta_1 - 4\Delta_2 = +0{,}11594 - 4\,.\,0{,}02319 = +0{,}02319$; $\Delta_4 = -\Delta_2 - 4\Delta_3 = -0{,}02319 - 4\,.\,0{,}02319 = -0{,}11594$. Demnach ist $M_1 = M_4 = 0{,}8841\,.\,\frac{1}{12}\,q\,l^2$, $M_2 = M_3 = 1{,}0232\,.\,\frac{1}{12}\,q\,l^2$.

§. 152. Stab mit drei Feldern (Fig. 40). Hier haben wir es nur mit zwei Normalgleichungen, und weil offenbar $M_1 = M_2$ ist, sogar nur mit einer Normalgleichung zu thun, nämlich $2M_1(l_1+l) + M_1 l = \mathfrak{N}_1 l^3 + \mathfrak{N}_2 l^3$. Da $\mathfrak{N}_1 = \frac{1}{4}\,q\,l_1^3$, $\mathfrak{N}_2 = \frac{1}{4}\,q\,l^3$ ist, so ergiebt sich

Fig. 40.



$$209.\quad M_1 = \frac{q\,(l_1^3 + l^3)}{4\,(2\,l_1 + 3\,l)} = \frac{1+\alpha^3}{4\,(2+3\,\alpha)}\,q\,l_1^2.$$

Da in der Regel die Gesammtlänge $2\,l_1 + l$ gegeben ist, so empfiehlt es sich, diese Länge oder den dritten Theil derselben einzuführen. Bezeichnen wir den letzteren mit λ, so wird

$$210.\quad \lambda = \frac{2+\alpha}{3}\,l_1 = \frac{2+\alpha}{3\,\alpha}\,l,\quad l_1 = \frac{3}{2+\alpha}\,\lambda,\quad l_1 = \frac{3\,\alpha}{2+\alpha}\,\lambda.$$

mithin

$$211.\quad M_1 = \frac{9\,(1+\alpha^3)}{4\,(2+3\,\alpha)\,(2+\alpha)^2}\,q\,\lambda^2 = k\,q\,\lambda^2.$$

wobei k einen nur von α abhängenden Coefficienten bedeutet, dessen Werth aus der Formel hervorgeht. In folgender Tabelle ist k für verschiedene α zusammengestellt.

α	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
k	0,09862	0,09842	0,10000	0,10297	0,10704	0,11196

Transversalkräfte. Im ersten Felde ist $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1$, $Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2}\,q\,l_1$, oder, wenn wir die Werthe für M_1 und l_1 einsetzen,

$$212.\quad Q_1' = +\frac{3\,(3+6\,\alpha-\alpha^3)}{4\,(2+\alpha)\,(2+3\,\alpha)}\,q\,\lambda,\quad Q_1'' = -\frac{3\,(5+6\,\alpha+\alpha^3)}{4\,(2+\alpha)\,(2+3\,\alpha)}\,q\,\lambda$$

und für eine beliebige Stelle nach 151 (Seite 114)

$$213.\quad Q = Q_1' - (Q_1' - Q_1'')\,\frac{x}{l_1}.$$

Für das zweite Feld wird, da hier $M_{m-1} = M_m$ ist,

Digitized by Google

$$214.\quad Q_2' = +\frac{1}{2}\,q\,l = \frac{3\,\alpha}{2\,(2+\alpha)}\,q\,\lambda,\quad Q_2'' = -Q_2';$$

$$215.\quad Q = Q_2'\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von Q_1', Q_1'', Q_2' und das x im ersten Felde, für welches $Q = 0$ oder M zu einem Maximum wird ($x = x_0$), für verschiedene α zusammengestellt. Im zweiten Felde wird $Q = 0$ für $x = \frac{1}{2}\,l$.

α	0,8	0,859	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
Q_1'	0,4437	0,4310	0,4221	0,4000	0,3775	0,3546	0,3314	
$-Q_1''$	0,6278	0,6183	0,6124	0,6000	0,5903	0,5829	0,5777	$.\,q\,\lambda$
$Q_2' = -Q_2''$	0,4286	0,4507	0,4655	0,5000	0,5323	0,5625	0,5909	
x_0	0,4141	0,4109	0,4080	0,4000	0,3901	0,3782	0,3645	$.\,l_1$

Der grösste absolute Werth von Q ist, wenn $\alpha < 1{,}261$ ist, Q_1'' und wenn $\alpha > 1{,}261$ ist, Q_2'. Da mit wachsendem α Q_1'' abnimmt, während Q_2' wächst, so wird zugleich für $\alpha = 1{,}261$ das absolute Maximum von Q am kleinsten.

Stützendrücke. Zunächst ist der Druck auf eine äussere Stütze $D_0 = Q_1'$. Die Summe aller Stützendrücke, nämlich $2\,(D_0 + D_1)$ ist gleich der ganzen Last $q\,(2\,l_1 + l) = 3\,q\,\lambda$, mithin $D_1 = \frac{3}{2}\,q\,\lambda - D_0 = \frac{3}{2}\,q\,\lambda - Q_1'$, oder auch nach 154 (§. 136) $D_1 = -Q_1'' + Q_2'$. Nach obigem Werthe für Q_1' wird daher

$$216.\quad \left\{\begin{aligned} D_0 &= \frac{3\,(3+6\,\alpha-\alpha^3)}{4\,(2+\alpha)\,(2+3\,\alpha)}\,q\,\lambda,\\ D_1 &= \frac{3\,(5+10\,\alpha+6\,\alpha^2+\alpha^3)}{4\,(2+\alpha)\,(2+3\,\alpha)}\,q\,\lambda. \end{aligned}\right.$$

Nach Berechnung der Transversalkräfte berechnet man natürlich D_1 schneller nach der Formel $D_1 = \frac{3}{2}\,q\,\lambda - Q_1'$, oder $D_1 = -Q_1'' + Q_2'$. In folgender Tabelle sind die Werthe für D_0 und D_1 bei verschiedenen α zusammengestellt.

α	0,8	0,859	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
D_0	0,4437	0,4310	0,4221	0,4000	0,3775	0,3546	0,3314	$.\,q\,\lambda$
D_1	1,0563	1,0690	1,0779	1,1000	1,1225	1,1454	1,1686	$.\,q\,\lambda$

Momente. Im ersten Felde ist $M = -Q'x + \frac{1}{2}\,q\,x^2$ oder, um für einen bestimmten Werth von $\frac{x}{l_1}$ M als Theil von $q\,\lambda^2$ zu erhalten, $M = -Q_1' l_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1^2\left(\frac{x}{l_1}\right)^2$ oder nach Einsetzung des Werthes von l_1

$$217.\quad M = -\frac{3}{2+\alpha}\left[Q'\frac{x}{l_1} = \frac{3}{2\,(2+\alpha)}\left(\frac{x}{l_1}\right)^2 q\,\lambda\right]\lambda.$$

M wird zum analytischen Maximum für dasselbe x, für welches $Q = 0$ wird. Bezeichnen wir dieses Maximum mit M_1' so wird

Digitized by

$$218.\quad M_1' = -\frac{Q_1^2}{2q} = -\frac{9(3+6\alpha-\alpha^3)}{16(2+\alpha)^2(2+3\alpha)^2}\,q\,\lambda^2.$$

Im zweiten Felde wird $M = M_1 - Q_2' x + \frac{1}{2} q x^2 = M_1 - Q_2' l \frac{x}{l} + \frac{1}{2} q l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2$ $= M_1 - \frac{1}{2} q l^2 \frac{x}{l} + \frac{1}{2} q l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2$, d. i. nach Einsetzung des Werthes von M_1 und l

$$219.\quad M = \left[k - \frac{9\alpha^2}{2(2+\alpha)^2}\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)\right] q\,\lambda^2.$$

M wird zum Maximum für $x = \frac{1}{2} l$; bezeichnen wir dasselbe mit M_2', so ist

$$220.\quad M_2' = -\left[\frac{9\alpha^2}{8(2+\alpha)^2} - k\right] q\,\lambda^2 = -\frac{9(2\alpha^3+\alpha^2-2)}{8(2+\alpha)^2(2+3\alpha)}\,q\,\lambda^2.$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von M_1', M_2' nebst den Werthen von M_1 für verschiedene α zusammengestellt; ebenso auch die Werthe von x, für welche $M = 0$ wird, wobei das betreffende x im ersten Felde mit x_1, im zweiten mit x_2 bezeichnet ist.

α	0,8	0,859	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
M_1'	− 0,0984	− 0,0929	− 0,0891	− 0,0800	− 0,0713	− 0,0629	− 0,0549	
M_1	+ 0,0986	+ 0,0983	+ 0,0984	+ 0,1000	+ 0,1030	+ 0,1072	+ 0,1120	$\cdot q\,\lambda^2$
M_2'	+ 0,0068	− 0,0003	− 0,0099	− 0,0250	− 0,0387	− 0,0512	− 0,0626	
x_1	0,8282	0,8218	0,8161	0,8000	0,7802	0,7565	0,7291	$\cdot l_1$
x_2	—	0,4094	0,3487	0,2491	0,2387	0,2157	0,2006	$\cdot l$

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich, dass stets M_1 das absolut grösste Moment ist. Dasselbe wird am kleinsten für das durch $\frac{dM_1}{d\alpha} = 0$ bestimmte Verhältniss der Felderlängen, d. i. für $3\alpha^2(2+3\alpha)(2+\alpha)^3 = (1+\alpha^3)(20+32\alpha+15\alpha^2)$ oder

$$221.\quad \begin{cases} 15\alpha^5 + 23\alpha^4 - 4\alpha^3 + 3\alpha^2 + 32\alpha + 20 = 0, \\ \alpha = 0{,}8590 \end{cases}$$

Das mittlere Feld muss also etwas kleiner sein, als die äusseren. Annähernd ist $l_1 : l = 7 : 6$. Für dieses Verhältniss würden sich, wenn für die Festigkeit die Formel $KW = Ma$ massgebend ist, bei gegebener Gesammtlänge und bei gegebener Belastung die kleinsten Querschnittsdimensionen ergeben, so dass dieses Verhältniss das zweckmässigste ist. Bei gleichem Querschnitte würde hier die Tragkraft $\frac{12500}{9828} = 1{,}272$mal so gross werden, als bei drei getrennten gleich langen Stäben.

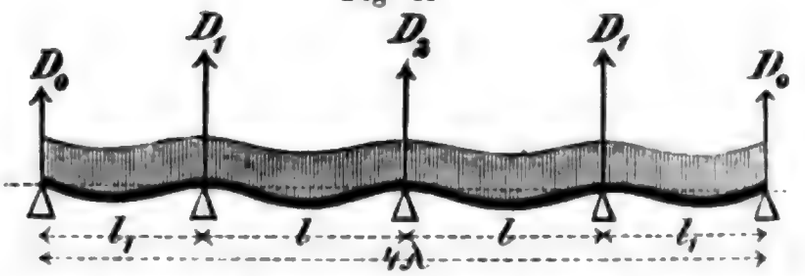
Auf Taf. VI ist in Fig. 6 Q und M (stark) für gleich lange Felder ($\alpha = 1$) und in Fig. 7 Q und M für das zweckmässigste Verhältniss $\alpha = 0{,}858$ dargestellt. Auf Taf. VII ist in Fig. 9 und 10 für diese beiden Verhältnisse die elastische Linie dargestellt.

§. 153. Stab mit vier Feldern. (Fig. 41). Die Normalgleichungen werden mit Rücksicht auf den Umstand, dass in Folge der Symmetrie $M_3 = M_1$ ist,

Digitized by Google

$$2\,M_1(l_1+l)+M_2 l=\tfrac{1}{4}\,q\,(l_1^3+l^3),$$
$$2\,M_1 l+4\,M_2 l=\tfrac{1}{2}\,q\,l^2.$$

Fig. 41.



Die dritte Normalgleichung würde mit der ersten übereinstimmen. Die Auflösung giebt

$$222.\quad M_1=\frac{q\,(2\,l_1^3+l^3)}{4\,(4\,l_1+3\,l)},\qquad M_2=\frac{q\,(l^3+2\,l^2 l_1-l_1^3)}{4\,(4\,l_1+3\,l)}.$$

Wir setzen wiederum $l=\alpha\,l_1$ und bezeichnen den vierten Theil der Gesammtlänge mit λ. Alsdann ist

$$223.\quad \lambda=\frac{1+\alpha}{2}\,l_1=\frac{1+\alpha}{2\,\alpha}\,l,\quad l_1=\frac{2}{1+\alpha}\,\lambda,\quad l=\frac{2\,\alpha}{1+\alpha}\,\lambda.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$224.\quad k_1=\frac{\alpha^3+2}{(3\,\alpha+4)\,(\alpha+1)^3},\quad k_2=\frac{\alpha^3+2\,\alpha^2-1}{(3\,\alpha+4)\,(\alpha+1)^3},$$

so wird

$$224\,a.\quad M_1=k_1\,q\,\lambda^2,\quad M_2=k_2\,q\,\lambda^2.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von k_1 und k_2 für verschiedene α zusammengestellt:

$\alpha=$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
k_1	0,11283	0,10714	0,10447	0,10135	0,10043
k_2	0,05577	0,07143	0,08549	0,10076	0,10955

Transversalkräfte. Im ersten Felde ist $Q_1'=-\frac{M_1}{l_1}+\frac{1}{2}\,q\,l_1$, $Q_1''=-\frac{M_1}{l_1}-\frac{1}{2}\,q\,l_1$, d. i., wenn man $l_1=\frac{2}{1+\alpha}\,\lambda$, $M_1=k_1\,q\,\lambda$ setzt,

$$225.\quad Q_1'=+\frac{1}{2}\,q\,\lambda\left[\frac{2}{1+\alpha}-(1+\alpha)\,k_1\right],\quad Q_1''=-\frac{1}{2}\,q\,\lambda\left[\frac{2}{1+\alpha}+(1+\alpha)\,k_1\right].$$

Im zweiten Felde ist $Q_2'=\frac{M_1-M_2}{l}+\frac{1}{2}\,q\,l$, $Q_2''=\frac{M_1-M_2}{l}-\frac{1}{2}\,q\,l$, d. i.

$$226.\quad \begin{cases} Q_2'=+\frac{1}{2}\,q\,\lambda\left[\frac{2\,\alpha}{1+\alpha}+\frac{1+\alpha}{\alpha}\,(k_1-k_2)\right], \\ Q_2''=-\frac{1}{2}\,q\,\lambda\left[\frac{2\,\alpha}{1+\alpha}-\frac{1+\alpha}{\alpha}\,(k_1-k_2)\right]. \end{cases}$$

Für einen beliebigen Querschnitt ist im ersten und zweiten Felde bezüglich

$$227.\quad Q=Q_1'-(Q_1'-Q_1'')\,\frac{x}{l_1},\quad Q=Q_2'-(Q_2'-Q_2'')\,\frac{x}{l}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von Q_1', Q_1'', Q_2', Q_2'', so wie die mit x_1, x_2 bezeichneten Werthe von x, für welche Q im I. und II. Felde Null wird, zusammengestellt.

Digitized by Google

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$Q_1' = +$	0,4161	0,3929	0,3665	0,3431	0,3193	$\cdot q\lambda$
$Q_1'' = -$	0,6365	0,6071	0,5859	0,5660	0,5503	
$Q_2' = +$	0,5339	0,5357	0,5419	0,5467	0,5572	
$Q_2'' = -$	0,4135	0,4643	0,5057	0,5442	0,5733	
$x_1 =$	0,3953	0,3929	0,3849	0,3773	0,3672	$\cdot l_1$
$x_2 =$	0,5635	0,5357	0,5173	0,5011	0,4930	$\cdot l$

Der grösste absolute Werth von Q ist, wenn $\alpha < 1{,}249$ ist, Q_1'' und wenn $\alpha > 1{,}249$ ist, Q_2''. Für diesen Werth von α wird das absolute Maximum von Q am kleinsten.

Stützendrücke. Nach §. 136 ist $D_0 = Q_1'$, $D_1 = -Q_1'' + Q_2'$ und $D_2 = -Q_2'' + Q_3'$ oder, weil $Q_3' = -Q_2''$ ist, $D_2 = -2Q_2''$. Setzt man obige Ausdrücke für Q ein und substituirt sodann für k_1, k_2 die Ausdrücke 224, so ergiebt sich

$$228.\quad \begin{cases} D_0 = \dfrac{6 + 6\alpha - \alpha^3}{2(1+\alpha)(4+3\alpha)}\, q\lambda, \\ D_1 = \dfrac{3 + 10\alpha + 12\alpha^2 + 6\alpha^3 + \alpha^4}{2\alpha(1+\alpha)(4+3\alpha)}\, q\lambda, \\ D_2 = \dfrac{-3 + 16\alpha^2 + 6\alpha^3}{2\alpha(1+\alpha)(4+3\alpha)}\, q\lambda. \end{cases}$$

In folgender Tabelle sind die Werthe der Stützendrücke zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
D_0	0,4161	0,3929	0,3665	0,3431	0,3193	$\cdot q\lambda$
D_1	1,1704	1,1428	1,1278	1,1127	1,1075	
D_2	0,8270	0,9286	1,0114	1,0884	1,1466	

Momente. Im ersten Felde ist $M = -Q_1' x + \frac{1}{2} q x^2 = -Q_1' l_1 \frac{x}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1^2 \left(\frac{x}{l_1}\right)^2$ oder

$$229.\quad M = -\frac{2}{1+\alpha}\left[Q_1' \frac{x}{l_1} - \frac{1}{1+\alpha} q\lambda \left(\frac{x}{l_1}\right)^2\right]\lambda$$

und im zweiten Felde $M = M_1 - Q_2' x + \frac{1}{2} q x^2 = M_1 - Q_2' l \frac{x}{l} + \frac{1}{2} q l^2 \left(\frac{x}{l}\right)^2$ oder

$$230.\quad M = M_1 - \frac{2\alpha}{1+\alpha}\left[Q_2' \frac{x}{l} - \frac{\alpha}{1+\alpha} q\lambda \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]\lambda.$$

M wird zum Maximum für dasselbe x, für welches $Q = 0$ wird. Bezeichnen wir die Maxima im I. und II. Felde mit M_1', M_2', so ist

$$231.\quad M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q},\quad M_2 = M_1 - \frac{Q_2'^2}{2q}.$$

In der folgenden Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von M_1', M_2' nebst den Normalmomenten M_1, M_2, so wie die mit x_1'', x_2', x_2'' bezeichneten Werthe von x, für welche $M = 0$ wird, zusammengestellt:

Digitized by Google

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1.225	1,3	
$M_1' = -$	0,08657	0,07718	0,06716	0,05886	0,05687	0,05098	$\cdot q \lambda^2$
$M_1 = +$	0,11283	0,10714	0,10447	0,10135	0,10110	0,10043	
$M_2' = -$	0,02969	0,03635	0,04236	0,04809	0,05055	0,05486	
$M_2 = +$	0,05577	0,07143	0,08549	0,10076	0,10110	0,10955	
x_1''	0,7906	0,7857	0,7698	0,7549	0,7500	0,7342	$\cdot l_1$
x_2'	0,3063	0,2700	0,2438	0,2197	0,2113	0,2001	$\cdot l$
x_2''	0,8208	0,8045	0,7942	0,7902	0,7887	0,7833	$\cdot l$

Das absolute Maximum von M ist stets eines der Normalmomente M_1 und M_2. Bei wachsendem α nimmt M_1 ab, während M_2 wächst. Das Maximum von M wird daher am kleinsten, wenn $M_1 = M_2$ ist, d. i. für $\alpha^3 + 2 = \alpha^3 + 2\alpha - 1$ oder $2\alpha^3 = 3$, also

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1{,}2248 = \text{circa } \frac{11}{9}.$$

Bei gegebener Gesammtlänge ist dieses Verhältniss der Längen der Felder das zweckmässigste. Das entsprechende grösste Moment ist

$$M_1 = M_2 = (5 - 2\sqrt{6})\, q \lambda^2 = 0{,}1010\, q \lambda^2.$$

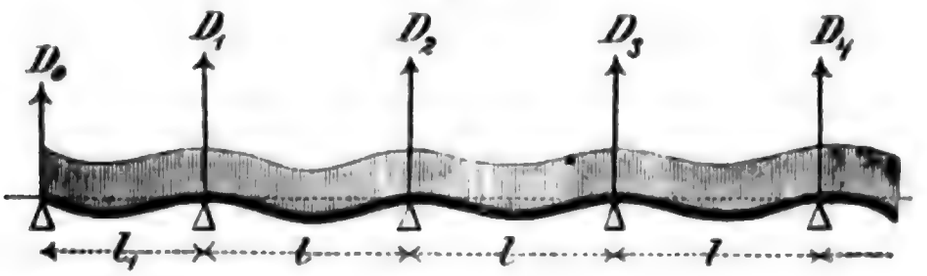
Die Tragkraft ist in diesem Falle bei gleichem Querschnitte 1,237mal grösser, als bei vier getrennten gleich langen Stäben.

Q und M sind Taf. VI Fig. 10 für $\alpha = 1$ und Fig. 11 für $\alpha = 1{,}2248$ graphisch dargestellt. Die elastische Linie ist in Taf. VII Fig. 13 für $\alpha = 1$, Fig. 14 für $\alpha = 1{,}2248$ dargestellt.

§. 154. Stab mit unendlich vielen Feldern. Bei unendlich vielen Feldern (Fig. 42) ergiebt sich das Verhältniss zweier aufeinander folgender Δ nach 192 (§. 146)

$$232. \quad \frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m} = -k = -(2 - \sqrt{3}) = -0{,}267949.$$

Fig. 42.



Demnach wird

$$233. \quad \Delta_2 = -k\Delta_1, \quad \Delta_2 = +k^2\Delta_1, \quad \Delta_3 = -k^3\Delta_1, \ldots$$
$$\ldots \Delta_m = (-k)^{m-1}\Delta_1.$$

Setzen wir in der ersten der Gleichungen 206 $\Delta_2 = -k\Delta_1$, so wird $2(1+\varepsilon)\Delta_1 - k\Delta_1 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)$, mithin nach Einsetzung des Werthes von k

$$234. \quad \Delta_1 = \frac{\varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)}{2\varepsilon + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 2\varepsilon)\,\varepsilon\,(3\varepsilon^2 - 2)}{3 - 4\varepsilon^2},$$

Digitized by Google

Setzen wir, wie in den beiden vorigen Paragraphen, $l = \alpha l_1$, so ist $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ also auch

$$234\,a. \quad \Delta_1 = \frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{\varepsilon^2(2+\varepsilon\sqrt{3})} = \frac{(\alpha\sqrt{3}-2)(3-2\alpha^2)}{\alpha^2(3\alpha^2-4)}.$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von Δ für verschiedene α zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$\varepsilon =$	1,1111	1,0000	0,9091	0,8333	0,7692
Δ_1	+ 0,4787	+ 0,2680	+ 0,1227	+ 0,0206	− 0,0529
Δ_2	− 0,1283	− 0,0718	− 0,0329	− 0,0055	+ 0,0142
Δ_3	+ 0,0344	+ 0,0192	+ 0,0088	+ 0,0015	− 0,0038
Δ_4	− 0,0092	− 0,0052	− 0,0024	− 0,0004	+ 0,0010
Δ_5	+ 0,0025	+ 0,0014	+ 0,0006	+ 0,0001	− 0,0003
Δ_6	− 0,0007	− 0,0004	− 0,0002	− 0,0000	+ 0,0001

Transversalkräfte. Im I Felde ist $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2} q l_1$, $Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2} q l_1$, oder weil $l_1 = \frac{1}{\alpha} l$ ist,

$$235. \quad \begin{cases} Q_1' = -\alpha \frac{M_1}{l} + \frac{1}{2\alpha} q l = +\frac{1}{2} q l \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{6}(1+\Delta_1)\right], \\ Q_1'' = -\alpha \frac{M_1}{l} + \frac{1}{2\alpha} q l = -\frac{1}{2} q l \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{6}(1+\Delta_1)\right]. \end{cases}$$

In einem beliebigen anderen Felde wird

$$236. \quad \begin{cases} Q'_m = \frac{M_{m-1} - M_m}{l} + \frac{1}{2} q l = +\frac{1}{2} q l \left[\frac{1}{6}(\Delta_{m-1} - \Delta_m) + 1\right], \\ Q''_m = \frac{M_{m-1} - M_m}{l} - \frac{1}{2} q l = -\frac{1}{2} q l \left[-\frac{1}{6}(\Delta_{m-1} - \Delta_m) + 1\right]. \end{cases}$$

In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von Q', Q'' zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$Q_1' = +$	0,445	0,394	0,352	0,315	0,282	$\cdot q l$
$Q_1'' = -$	0,667	0,606	0,558	0,519	0,487	
$Q_2' = +$	0,542	0,528	0,513	0,502	0,494	$\cdot q l$
$Q_2'' = -$	0,458	0,472	0,487	0,498	0,506	
$Q_3' = +$	0,486	0,492	0,497	0,499	0,502	$\cdot q l$
$Q_3'' = -$	0,514	0,508	0,504	0,501	0,499	
$Q_4' = +$	0,504	0,502	0,501	0,500	0,500	$\cdot q l$
$Q_4'' = -$	0,496	0,498	0,499	0,500	0,500	

Digitized by Google

Das absolute Maximum von M ist, wenn $\alpha < 1{,}251$ ist, Q_1'', wenn $\alpha > 1{,}253$ ist, Q_2''. Für diesen Werth von α wird das absolute Maximum von Q am kleinsten und zwar $= 0{,}502\ q\,l$.

Stützendrücke. Nach 154 (§. 136) ist $D_m = Q''_m + Q'_{m+1}$, d. i. nach 236

$$D_m = q\,l\,[1 - \tfrac{1}{12}\,(\Delta_{m-1} - 2\,\Delta_m + \Delta_{m+1})],$$

oder, weil $\Delta_{m-1} + \Delta_{m+1} = -4\,\Delta_m$ ist,

$$237.\quad D_m = q\,l\left(1 + \frac{1}{2}\Delta_m\right).$$

Für die Drücke auf die Stützen 0 und 1 gilt diese Formel nicht. Für diese ergiebt sich

$$D_0 = Q_1',\quad D_1 = -Q_1'' + Q_2'.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
D_0	0,445	0,394	0,352	0,315	0,282	
D_1	1,209	1,134	1,071	1,021	0,982	
D_2	0,936	0,964	0,984	0,997	1,007	$\cdot\, q\,l$
D_3	1,017	1,010	1,004	1,001	0,998	
D_4	0,995	0,997	0,999	1,000	1,001	

Momente. Im ersten Felde ist $M = -Q_1'\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2 = -Q_1'\,l_1\,\frac{x}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1^2\left(\frac{x}{l_1}\right)^2$ oder

$$238.\quad M = -\frac{1}{\alpha}\left[Q_1'\,\frac{x}{l_1} - \frac{1}{2\,\alpha}\,q\,l\left(\frac{x}{l_1}\right)^2\right] l$$

und in einem der übrigen Felder

$$239.\quad M_m = M_{m-1} - Q'_m\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2.$$

Das Maximum von M ist im ersten Felde $M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2\,q}$ und in einem der übrigen Felder $M'_m = M_{m-1} - \frac{Q'^2_m}{2\,q}$. Die hiernach berechneten Werthe dieser Maxima sind nebst den Normalmomenten in folgender Tabelle zusammengestellt:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$M_1' = -$	0,0989	0,0777	0,0618	0,0495	0,0397	
$M_1 = +$	0,1232	0,1057	0,0936	0,0851	0,0756	
$M_2' = -$	0,0238	0,0339	0,0380	0,0411	0,0466	
$M_2 = +$	0,0726	0,0774	0,0806	0,0829	0,0845	
$M_3' = -$	0,0456	0,0439	0,0427	0,0418	0,0412	
$M_3 = +$	0,0862	0,0849	0,0841	0,0835	0,0830	$\cdot\, q\,l$
$M_4' = -$	0,0406	0,0411	0,0414	0,0416	0,0418	
$M_4 = +$	0,0826	0,0829	0,0831	0,0833	0,0834	
$M'\infty = -$	0,0417	0,0417	0,0417	0,0417	0,0417	
$M''\infty = +$	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	0,0833	

Digitized by Google

§. 155. Zweckmässigstes Verhältniss der Längen der Felder. Wir haben gesehen, dass bei vier und unendlich vielen Feldern das absolute Maximum von M entweder M_1 oder M_2 ist und zwar M_1 für kleinere α, M_2 für grössere α. Mit zunehmendem α nimmt M_1 ab, während M_2 wächst, vorausgesetzt, dass die Gesammtlänge des Stabes dieselbe bleibt. Dasselbe wird auch stattfinden, wenn n zwischen 4 und ∞ liegt.

Hiernach muss offenbar das grössere der beiden Momente M_1, M_2 am kleinsten werden, wenn $M_1 = M_2$ ist. Das Verhältniss, für welche diese Bedingung erfüllt wird, wird demnach bei gegebener Gesammtlänge und gegebener Belastung die kleinsten Dimensionen bedingen, also das zweckmässigste sein. Es wird aber $M_1 = M_2$, wenn $\Delta_1 = \Delta_2$ ist, nach 206 (§. 151) also für $2(1+\varepsilon)\Delta_1 + \Delta_1 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2)$ oder

$$(3+2\varepsilon)\Delta_1 = \varepsilon(3\varepsilon^2 - 2).$$

Setzt man für Δ_1 den Ausdruck 207, so kommt ε ganz in Wegfall. Es lässt sich demnach die Bedingung $\Delta_1 = \Delta_2$ nur erfüllen, wenn man $3\varepsilon^2 - 2 = 0$ macht, denn alsdann wird $\Delta_1 = 0$, mithin nach der ersten der Gleichungen 206 auch $\Delta_2 = 0$. Das zweckmässigste Verhältniss ist demnach bei beliebiger Anzahl der Felder

$$240. \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165 = \text{circa } \frac{9}{11}, \\ \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}2248 = \text{circa } \frac{11}{9}. \end{array} \right.$$

Alsdann wird auch jedes andere $\Delta_m = 0$, mithin allgemein

$$241. \quad M_m = \frac{1}{12} q l^2.$$

Die Tangente an die Axe des Stabes über den Stützen bleibt horizontal, so dass sich alle Felder in demselben Zustande befinden, wie ein an den Enden horizontal eingespannter Stab (§. 122—124).

Nur für drei Felder ist dieses Verhältniss nach §. 152 nicht das zweckmässigste.

B. Belastung durch eine isolirte Last.

§. 156. Belastung durch eine isolirte Last. Wie man bei einer bestimmt gegebenen Lage der isolirten Lasten zu verfahren habe, ist in §. 137 gezeigt worden. Hier wollen wir unter der Voraussetzung, dass nur eine isolirte Last vorhanden sei, die gefährlichste Lage dieser Last ermitteln, d. h. diejenige, für welche das absolute Maximum des Momentes am grössten wird. Wir bezeichnen die Last mit G und ihre Entfernung von der linken und rechten benachbarten Stütze mit ξ, ξ_1. Wir setzen gleichzeitig voraus, dass die Anzahl der Felder unendlich gross sei; sehr nahe werden dann die gefundenen Regeln auch für eine endliche, aber grosse Anzahl von Feldern gelten.

Belastung des ersten Feldes. Da alle Felder, ausser dem ersten, unbelastet sind, so ergiebt sich, wie in §. 144 $M_1 = -k M_2$, wenn $k = 2 - \sqrt{3}$ ist. Daher wird die erste Normalgleichung

$$[2(1+\varepsilon) - k] M_1 = \varepsilon \mathfrak{N}''$$

d. i. $(2\varepsilon + \sqrt{3}) M_1 = \varepsilon \mathfrak{N}''$, also mit Rücksicht auf 143 (§. 134)

$$242. \quad M_1 = \frac{\varepsilon \mathfrak{N}''}{2\varepsilon + \sqrt{3}} = \frac{\varepsilon G \xi (l_1^2 - \xi^2)}{(2\varepsilon + \sqrt{3}) l_1^2}$$

Digitized by Google

Hiernach wird M_1 zum Maximum für

$$243.\quad \xi = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\, l_1 = 0{,}5774\, l_1$$

und zwar wird

$$244.\quad \max M_1 = \frac{2\varepsilon}{3(2\varepsilon\sqrt{3}+3)} G l_1 .$$

Als Stützendruck auf die äussere Stütze ergiebt sich $D_0 = G\frac{\xi_1}{l_1} - \frac{M_1}{l_1}$. Daher ist das Moment M_1' am Angriffspunkte der isolirten Last

$$M_1' = -D_0\,\xi = +\frac{M_1\,\xi}{l_1} - G\frac{\xi\,\xi_1}{l_1} .$$

Die Einsetzung obigen Werthes für M_1 giebt

$$245.\quad M_1' = -G\frac{\xi\,\xi_1[(2\varepsilon+\sqrt{3})\,l_1^2 - \varepsilon\, l_1\,\xi - \varepsilon\,\xi^2]}{(2\varepsilon+\sqrt{3})\,l_1^2} .$$

Setzt man hierin noch $\xi_1 = l_1 - \xi$, so ergiebt sich, dass M_1' zum Maximum wird für

$$246.\quad 3\varepsilon\,\xi^2 - 2(2\varepsilon+\sqrt{3})\,l_1\,\xi + (\varepsilon+\sqrt{3})\,l_1^2 = 0.$$

Für $\varepsilon = 0{,}7\ \ 0{,}8\ \ 0{,}9\ \ 1{,}0$ wird $\frac{\xi}{l_1} = 0{,}441\ \ 0{,}437\ \ 0{,}433\ \ 0{,}429$. Berechnet man nun M_1' nach 245, und M_1 nach 244, so ergiebt sich, dass $M_1' > M_1$ ist, sodass M_1' das absolute Maximum von M ist.

Belastung des zweiten Feldes. Wie in §. 144 ergiebt sich, da alle Felder ausser dem II. unbelastet sind, $M_3 = -k M_2$. Daher werden die beiden ersten Normalgleichungen

$$2(1+\varepsilon)\,M_1 + M_2 = \mathfrak{N}',$$
$$M_1 + (4-k)\,M_2 = \mathfrak{N}''.$$

Hieraus ergiebt sich

$$247.\quad \begin{cases} M_1 = \dfrac{(2+\sqrt{3})\,\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{2(1+\varepsilon)(2+\sqrt{3}) - 1}, \\ M_2 = \dfrac{-\mathfrak{N}' + 2(1+\varepsilon)\,\mathfrak{N}''}{2(1+\varepsilon)(2+\sqrt{3}) - 1}. \end{cases}$$

Es wird nun $Q_2' = \frac{M_2 - M_1}{l} - G\frac{\xi_1}{l}$, daher das Moment am Angriffspunkte der isolirten Last

$$M_2' = M_1 + Q_2'\,\xi = M_1\left(1 - \frac{\xi}{l}\right) + M_2\frac{\xi}{l} - G\,\xi\left(1 - \frac{\xi}{l}\right).$$

Setzt man obige Ausdrücke für M_1, M_2 ein und sodann für $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$ die Ausdrücke 143 (§. 134), so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$248.\quad [2(1+\varepsilon)(2+\sqrt{3}) - 1]\,M_1'$$
$$= 2(2+\sqrt{3})\,\varepsilon + [6(1-\varepsilon) + (3-2\varepsilon)\sqrt{3}]\,\frac{\xi}{l}$$
$$- 4(3+\sqrt{3})\left(\frac{\xi}{l}\right)^2 + (6+2\varepsilon+\sqrt{3})\left(\frac{\xi}{l}\right)^3.$$

Hiernach wird M_1' zum Maximum für

$$249.\quad 4(6+2\varepsilon+\sqrt{3})\left(\frac{\xi}{l}\right)^3 - 12(3+\sqrt{3})\left(\frac{\xi}{l}\right)^2$$
$$+ 2[6(1-\varepsilon) + (3-2\varepsilon)\sqrt{3}]\,\frac{\xi}{l} + 2(2+\sqrt{3})\,\varepsilon = 0.$$

Digitized by Google

Für $\varepsilon = 0{,}7\ \ 0{,}8\ \ 0{,}9\ \ 1{,}0$ ergiebt sich $\frac{\xi}{l} = 0{,}508\ \ 0{,}503\ \ 0{,}499\ \ 0{,}494$.

Berechnet man die Werthe von M_1, M_2 für die leicht zu bestimmenden Werthe von ξ, für welche sie zum Maximum werden, und sodann M_1' ebenfalls für den Werth von ξ, für welchen es zum Maximum wird, so ergiebt sich auch hier, dass das Maximum von M_1' grösser ist, als die Maxima von M_1 und M_2.

Dasselbe ergiebt sich auch für die übrigen Felder. Wir behandeln jedoch nur noch die

Belastung eines mittleren Feldes. Ist das m^{te} Feld belastet, wobei $m = \infty$, so werden die Normalgleichungen für das belastete und die anstossenden Felder $M_{m-2} + 4\,M_{m-1} + M_m = \mathfrak{N}'$, $M_{m-1} + 4\,M_m + M_{m+1} = \mathfrak{N}''$. Nun aber ist $M_{m-1} = -4\,k\,M_{m-2}$, $M_m = -k\,M_{m+1}$, daher

$$\left.\begin{aligned}(4-k)\,M_{m-1} + M_m &= \mathfrak{N}',\\ M_{m-1} + (4-k)\,M_m &= \mathfrak{N}''.\end{aligned}\right\}$$

Wie im II Felde wird mit Rücksicht auf 143 (§. 134.)

$$M_{m-1} = \frac{(2+\sqrt{3})\,\mathfrak{N}' - \mathfrak{N}''}{2\,(3+2\sqrt{3})} = \frac{1}{6}\left[\sqrt{3}\,\mathfrak{N}' - (2\sqrt{3}-3)\,\mathfrak{N}''\right]$$

oder

$$250.\quad M_{m-1} = \frac{G\,\xi\,\xi_1}{2\,l^2}\left[l - (\sqrt{3}-1)\,\xi\right].$$

Zum Maximum wird hiernach M_{m-1} für

$$251.\quad \xi = \frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\,l = 0{,}3804\,l$$

und zwar ist

$$252.\quad \max M_{m-1} = \frac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{36}\,G\,l = 0{,}08503\,G\,l.$$

Ferner wird das Moment am Angriffspunkte der Last wie im II Felde

$$M'_m = M_{m-1}\frac{\xi_1}{l} + M_m\frac{\xi}{l} - G\frac{\xi\,\xi_1}{l}.$$

Der Ausdruck für M_m ergiebt sich, wenn man im Ausdrucke für M_{m-1} ξ mit ξ_1 vertauscht. Setzt man alsdann die Ausdrücke für M_{m-1} und M_m ein, so ergiebt sich

$$253.\quad M'_m = -\frac{G\,\xi\,\xi_1}{2\,l^3}\left[l^2 + 2\,(\sqrt{3}-1)\,l\,(l-\xi)\right].$$

Hiernach wird M'_m zum Maximum für $\xi = \frac{1}{2}\,l$ und zwar ist

$$254.\quad \max M'_m = -\frac{1+\sqrt{3}}{16}\,Gl = -0{,}1708\,G\,l.$$

In folgender Tabelle sind die Maxima der Momente an dem Angriffspunkte der Last in den einzelnen Feldern zusammengestellt.

$\varepsilon =$	0,7	0,8	0,9	1,0	
$M_1' =$	0,2115	0,2089	0,2067	0,2647	$. G l_1$
$=$	0,1481	0,1671	0,1860	0,2047	$. Gl$
$M_2' =$	0,1676	0,1696	0,1713	0,1729	$. Gl$
$M_3' =$	0,1706	0,1707	0,1708	0,1709	$. Gl$
$M'\infty =$	0,1708	0,1708	0,1708	0,1708	$. Gl$

Digitized by Google

Die grössten Momente an den Stützen ergeben sich ungefähr nur halb so gross.

Hieraus folgt: Das Maximum erreicht das Moment stets am Angriffspunkte der isolirten Last und zwar wenn $\varepsilon \gtrsim 0{,}82$ ist, im ersten Felde, wenn $\varepsilon < 0{,}82$ ist, in einem mittleren Felde ($m = \infty$).

Für $\varepsilon = 0{,}82$ wird das absolute Maximum von M am kleinsten, so dass dieses Verhältniss das zweckmässigste ist. Für dasselbe wird

$$\max M = -0{,}1708\ Gl.$$

Anwendung bei Eisenbahnschienen u. s. w. Eine weitere Ausdehnung dieser Theorie würde zu viel Raum beanspruchen.

XVI. Kapitel.

Prismatischer continuirlicher Stab mit ungleich hohen Stützen.

§. 157. Allgemeines. Wir behalten ganz die im XIII. Kapitel gewählten Bezeichnungen bei, bezeichnen aber ausserdem mit $s_0, s_1, s_2, \ldots$ die Entfernungen der einzelnen Stützen von einer über denselben liegenden Horizontalen. Nach 121 (§. 128) wird alsdann

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_m &= +\frac{l_m}{6\,E\,W}(M_{m-1} + 2\,M_m - \mathfrak{M}'_m - 2\,\mathfrak{M}''_m) + \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m}, \\ \tau_m &= -\frac{l_m}{6\,E\,W}(2\,M_{m-1} + M_m - 2\,\mathfrak{M}'_{m+1} - \mathfrak{M}''_{m+1}) - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe von τ_m giebt

255. $$M_{m-1}\,l_m + 2\,M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}\,l_{m+1} = \mathfrak{M}''_m\,l_m + \mathfrak{M}'_{m+1}\,l_{m+1} - 6\,E\,W\left(\frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}\right).$$

Hieraus geht hervor, dass sich die Normalmomente und mit ihnen alle übrigen Grössen aus zwei Theilen zusammensetzen werden, von denen der erste Theil ebenso gross ist, als wenn eine gleiche Höhenlage der Stützen vorhanden wäre, der andere aber der vorhandenen Höhenlage der Stützen bei unbelastetem Stabe entspricht. Da wir den ersten Theil bereits in den vorigen Kapiteln ermittelt haben, so haben wir jetzt nur noch nöthig, den zweiten Theil zu ermitteln. Für den unbelasteten Zustand aber wird

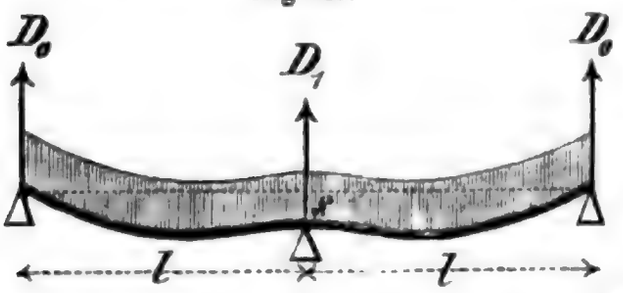
256. $$M_{m-1}\,l_m + 2\,M_m(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}\,l_{m+1} = -6\,E\,W\left(\frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{s_{m+1} - s_m}{l_{m+1}}\right).$$

Die Auflösung der einzelnen nach diesem Schema gebildeten Normalgleichungen ist dieselbe, wie im XIII. Kapitel.

Digitized by Google

§. 158. Stab mit zwei Feldern. Die beiden äusseren Stützen mögen gleich hoch liegen, die mittlere Stütze aber um s unter der durch die äusseren Stützen gehenden Horizontalen (Fig. 43). Die einzige Normalgleichung ist alsdann $4 M_1 l^2 = -12 E W s$, mithin

Fig. 43.



$$257.\quad M_1 = -3\frac{EWs}{l^2}.$$

Es ist nun $M_1 = -D_0 l$, also $D_0 = -\frac{M_1}{l}$ und $2D_0 + D_1 = 0$, also $D_1 = -2D_0$, d. i.

$$258.\quad D_0 = +3\frac{EWs}{l^3},\quad D_1 = -6\frac{EWs}{l^3}.$$

Endlich ist $Q = D_0$, $M = -D_0 x$.

Ist der Stab gleichmässig belastet und haben die Stützen gleiche Höhe, so ist nach §. 149 $M_1 = \frac{1}{8} q l^2$, nach §. 148 $D_0 = \frac{3}{8} ql$, $D_1 = \frac{10}{8} ql$. Mithin ist bei gleichmässiger Belastung und gesenkter Mittelstütze

$$259.\quad M_1 = \frac{1}{8} q l^2 - 3\frac{EWs}{l^2},$$

$$260.\quad D_0 = \frac{3}{8} ql + 3\frac{EWs}{l^3},\quad D_1 = \frac{10}{8} ql - 6\frac{EW}{l^3}.$$

Ferner wird nun $Q = D_0 - qx$, $M = -D_0 x + \frac{1}{2} q x^2$, d. i.

$$261.\quad Q = 3\frac{EWs}{l^2} + \frac{1}{8} q (3l - 8x).$$

$$262.\quad M = -3\frac{EWs}{l^2} x - \frac{1}{8} qx (3l - 4x).$$

M wird zum Maximum für $x = l$ oder für $x = \frac{D_0}{q}$. Bezeichnen wir das letztere Maximum mit M', so ist $M' = -\frac{D_0^2}{2q}$, d. i.

$$263.\quad M' = -\frac{1}{2q}\left(\frac{3}{8} ql + 3\frac{EWs}{l^3}\right)^2.$$

Wenn s wächst, so nimmt M_1 ab, dagegen der absolute Werth von M' zu. Das absolut grösste M wird daher am kleinsten werden, wenn $M_1 = M'$ ist. Diese Bedingung giebt für die vortheilhafteste Senkung der Mittelstütze die Gleichung

$$\frac{1}{8} q l^2 - 3\frac{EWs}{l} = \frac{1}{2q}\left(\frac{3}{8} ql + 3\frac{EWs}{l^3}\right)^2,$$

$$s^2 + \frac{11}{12}\frac{ql^4}{EW} s - \frac{7}{576}\frac{q^2 l^8}{E^2 W^2}$$

und hieraus

$$264.\quad s = \frac{8\sqrt{2} - 11}{24}\frac{ql^4}{EW} = 0{,}01307\frac{ql^4}{EW}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes von s giebt

Digitized by Google

$$265.\quad M_1 = M' = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\, q\, l^2 = 0{,}08579\, q\, l^2,$$

während ohne Senkung das grösste Moment $M_1 = 0{,}125\, q\, l^2$ ist, so dass bei gesenkter Mittelstütze und bei gleichen Dimensionen die Tragkraft 1,457mal so gross ist. Ferner wird für diese Senkung

$$266.\quad \begin{cases} D_0 = (\sqrt{2}-1)\, q\, l = 0{,}4142\, q\, l, \\ D_1 = \dfrac{33-16\sqrt{2}}{8}\, q\, l = 1{,}2966\, q\, l; \end{cases}$$

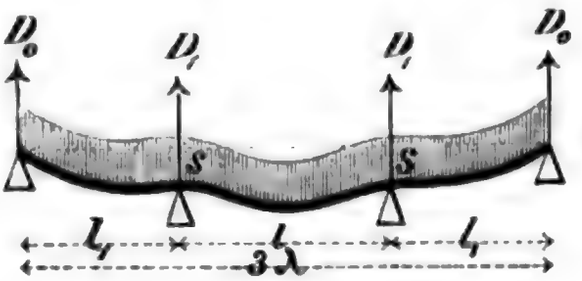
$$267.\quad Q' = D_0 = 0{,}4142\, q\, l, \quad Q'' = D_0 - q\, l = 0{,}5858\, q\, l,$$

während ohne Senkung $D_0 = Q' = 0{,}375\, q\, l$, $D_1 = 1{,}375\, q\, l$, $Q'' = 0{,}625\, q\, l$ ist, so dass durch die Senkung D_1, Q'' verkleinert wird.

Taf. VI. Fig. 5 giebt die graphische Darstellung von Q, M, Taf. VII. Fig. 8 die Darstellung der elastischen Linie.

§. 159. Stab mit drei Feldern. Die beiden äusseren Stützen mögen in gleicher Höhe und jede der beiden mittleren Stützen um s unter der durch die äusseren Stützen gehenden Horizontalen liegen (Fig. 44). Die Länge der äusseren Felder sei $= l_1$, die des inneren $= l$, die ganze Länge 3λ und $l = \alpha\, l_1$. Da hier $M_1 = M_2$ ist, so ist nur eine Normalgleichung nöthig. Diese ist

Fig. 44.



$$2\, M_1 (l_1 + l) + M_1\, l = -6\, E\, W\, \frac{s}{l_1}.$$

$$268.\quad M_1 = -\frac{6\, E\, W\, s}{l_1 (2\, l_1 + 3\, l)} = -\frac{2\,(2+\alpha)^2}{3\,(2+3\,\alpha)}\,\frac{E\, W\, s}{\lambda^2}.$$

Bei gleichmässiger Belastung und gleicher Höhenlage der Stützen ist M_1 durch die Formel 121 (§. 152) bestimmt. Daher ist bei gleichmässiger Belastung und gesenkten Mittelstützen

$$269.\quad M_1 = \frac{q\,(l_1^3 + l^3)}{4\,(2\, l_1 + 3\, l)} - \frac{6\, E\, W\, s}{l_1 (2\, l_1 + 3\, l)}$$
$$= \frac{9\,(1+\alpha^3)}{4\,(2+3\,\alpha)\,(2+\alpha)^2}\, q\, \lambda^2 - \frac{2\,(2+\alpha)^2}{3\,(2+3\,\alpha)}\,\frac{E\, W\, s}{\lambda^2}.$$

Es wird nun ferner

$$Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\, q\, l_1, \quad Q_1'' = -\frac{M_1}{l_1} - \frac{1}{2}\, q\, l_1;$$

$$Q_2' = +\frac{1}{2}\, q\, l, \quad Q_2'' = -Q_2'.$$

Im ersten Felde wird $M = -Q_1' x - \frac{1}{2} q x^2$, $\max M = M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$ und im zweiten Felde $M = M_1 - Q_2' x + \frac{1}{2} q x^2 = M_1 - \frac{1}{2} q x (l - x)$, $\max M = M_2' = M_1 - \frac{Q_2'^2}{2q} = M_1 - \frac{1}{8} q l^2$. Das absolute Maximum von M ist entweder M_1, M_1' oder M_2'. Durch Senkung der Mittelstütze wird

Digitized by Google

M_1 verkleinert, somit aber Q_1', also auch M_1' und M_2' vergrössert. Das absolut grösste Moment wird dennoch am kleinsten werden, wenn entweder $M_1 = M_1'$ oder $M_1 = M_2'$ ist. Wir wollen die entsprechenden Senkungen mit s_1, s_2 bezeichnen. Alsdann ist

$$s = s_1: \quad M_1 = -M_1' - \frac{Q_1'^2}{2q}, \text{ d. i. } M_1 = \frac{1}{2q}\left(-\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2} q l_1\right)^2,$$

$$s = s_2: \quad M_1 = -M_2' = -M_1 + \frac{1}{8} q l^2 \text{ oder } 2 M_1 = \frac{1}{8} q l^2.$$

Setzen wir den Ausdruck für M_1 ein und ordnen nach Potenzen von s, so ergiebt sich

$$270. \quad \begin{cases} s_1^2 + \dfrac{27(11 + 18\alpha - \alpha^3)}{4(2+\alpha)^4} \dfrac{q\lambda^4}{EW} s_1 \\ \quad - \dfrac{729(7 - 12\alpha - 36\alpha^2 + 22\alpha^3 + 36\alpha^4 - \alpha^6)}{64(2+\alpha)^8} \dfrac{q^2\lambda^8}{E^2W^2} = 0 \\ s_2 = \dfrac{27(4 - 2\alpha^2 + \alpha^3)}{32(2+\alpha)^4} \dfrac{q\lambda^4}{EW}. \end{cases}$$

Berechnet man hiernach s_1, s_2 für verschiedene α, sowie auch die zugehörigen Werthe von M_1', M_1, M_2', so findet man, dass für solche α, welche < 1.163 sind, für $s = s_2$ $M_1' > M_1$ oder $M_1' > M_2'$ ist, während für grössere α für $s = s_1$ $M_2' > M_1'$ oder $M_2' > M_1$ ist. Damit nun das grösste Moment möglichst klein werde, muss demnach, wenn $\alpha < 1{,}163$ ist, $s = s_1$, und wenn $\alpha > 1{,}163$ ist, $s = s_2$ sein. In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe von s, sowie die entsprechenden Werthe von M_1', M_1, M_2' zusammengestellt. Zugleich ist durch die Zahlen m das Verhältniss des grössten Momentes bei gleich hohen Stützen zum grössten Momente bei gesenkten Mittelstützen angegeben.

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,163	1,2	1,3	
$s =$	0,0055	0,0118	0,0214	0,0243	0,0229	0,0200	$\cdot \frac{q\lambda^4}{EW}$
$M_1' = -$	0,09186	0,08580	0,07710	0,07607	0,07387	0,06427	$\cdot q\lambda^2$
$M_1 = +$	0,09186	0,08580	0,07710	0,07607	0,07910	0,08730	
$M_2' = -$	0,01649	0,03924	0,05817	0,07607	0,07910	0,08730	
$m =$	1,071	1,166	1,336	1,387	1,353	1,283	

Bis zu $\alpha = 1{,}163$ ist $M_2' < M_1'$ und $< M_1$; M_1', M_1 nehmen mit wachsendem α ab. Von $\alpha = 1{,}163$ an aber ist $M_1' < M_1$ und $< M_2'$; M_1, M_2' nehmen mit wachsendem α zu. Demnach muss für $\alpha = 1{,}163$ das grösste Moment am kleinsten sein, so dass

$$271. \quad \alpha = 1{,}163 = \text{circa } \frac{7}{6}$$

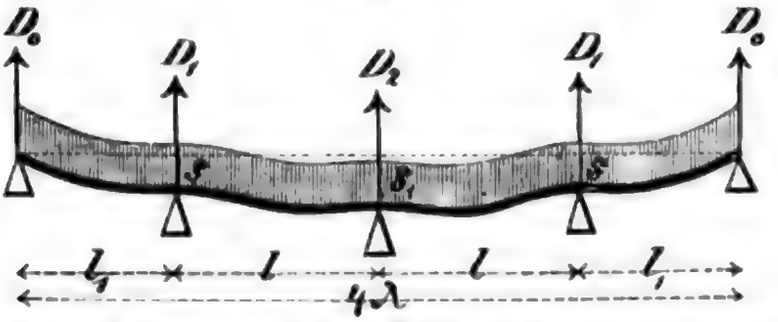
das zweckmässigste Verhältniss der Längen der Felder ist. Für dasselbe werden alle drei Maximalmomente gleich gross. Bei gleichen Dimensionen ist dann die Tragkraft $\frac{9828}{7607} = 1{,}292$ mal grösser, als bei gleich hohen Stützen und dem zweckmässigsten Verhältnisse der Felderlängen, und $\frac{12500}{7607} = 1{,}643$ mal grösser, als bei drei gleich langen einzelnen Stäben.

Digitized by Google

Für das Verhältniss $\alpha = 1{,}163$ ist Taf. VI Fig. 8 Q und M und Taf. VII Fig. 11 die elastische Linie dargestellt.

§. 160. Stab mit vier Feldern. In gleicher Weise ist der Stab mit vier Feldern zu behandeln, nur wird hier die allgemeine Untersuchung insofern etwas schwieriger, als, Symmetrie vorausgesetzt, drei verschiedene Höhenlagen der Stützen in Frage kommen (Fig. 45). Die allgemeine Untersuchung wollen wir nicht führen, sondern die zweckmässigste Senkung und das zweckmässigste Verhältniss der Felder direkt zu bestimmen suchen.

Fig. 45.



Wie bei dem Stabe mit drei Feldern lässt sich leicht nachweisen, dass das grösste Moment am kleinsten wird, wenn die beiden Normalmomente M_1, M_2 und die Maximalmomente M_1', M_2' im I. und II. Felde gleich sind. Nehmen wir an, dass die den Endstützen am nächsten liegenden Stützen um s, die Mittelstütze aber um s_1 unter der Horizontalen liegen, welche durch die äusseren Stützen geht, so sind die Normalgleichungen, wenn man darin sofort $M_1 = M_2$ setzt,

$$2\,M_1\,(l_1 + l) + M_1\,l = \frac{1}{4}\,q\,(l_1^3 + l^3) - 6\,E\,W\left(\frac{s}{l_1} - \frac{s_1 - s}{l}\right),$$

$$2\,M_1\,l + 4\,M_1\,l = \frac{1}{2}\,q\,l^3 - 6\,E\,W\left(\frac{s_1 - s}{l} - \frac{s - s_1}{l}\right)$$

oder

$$\text{a.}\quad \begin{cases} M_1\,(2\,l_1 + 3\,l)\,l\,l_1 = \frac{1}{4}\,q\,(l_1^3 + l^3)\,l\,l_1 - 6\,E\,W\,[s\,(l_1 + l) - s_1\,l_1], \\ 6\,M_1\,l^2 = \frac{1}{2}\,q\,l^4 - 12\,E\,W\,(s_1 - s). \end{cases}$$

Ferner ist $M_1 = -Q_1'\,l_1 + \frac{1}{2}\,q\,l_1^2$, also $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1$, $M_1' = -\frac{Q_1^2}{2\,q}$; $M_2 = M_2 - Q_2'\,l + \frac{1}{2}\,q\,l^2$, also $Q_2' = \frac{1}{2}\,q\,l$, $M_2' = M_1 - \frac{Q_2'^2}{2\,q}$. Es soll nun $M_1 = M_1'$ und $M_1 = -M_2'$ sein, also

$$M_1 = \frac{Q_1'^2}{2\,q}, \qquad M_1 = -M_1 + \frac{Q_2'^2}{2\,q}.$$

d. i., wenn man die Ausdrücke für Q_1' und Q_2' einsetzt,

$$\text{b.}\quad \begin{cases} 4\,M_1^2 - 12\,M_1\,q\,l_1^2 + q^2 l_1^4 = 0, \\ 16\,M_1 = q\,l^2. \end{cases}$$

Durch die letzte Gleichung ist M_1 direkt bestimmt, nämlich

$$272.\quad M_1 = \tfrac{1}{16}\,q\,l^2.$$

Setzt man diesen Werth für M_1 in die übrigen der Gleichungen a, b, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$\text{c.}\quad \begin{cases} q\,l\,l_1\,(4\,l_1^3 - 2\,l^2 l_1 + l^3) = 96\,E\,W\,[s\,(l_1 + l) - s_1\,l_1], \\ q\,l^4 = 96\,E\,W\,(s_1 - s), \\ l^4 - 48\,l^2 l_1^2 + 64\,l_1^4 = 0. \end{cases}$$

Setzt man in der letzten Gleichung $l = \alpha\,l_1$, so wird

$$\alpha^4 - 48\,\alpha^2 + 64 = 0.$$

$$273.\quad \alpha = \sqrt{8\,(3 - \sqrt{8})} = 4 - 2\sqrt{2} = 1{,}1715 = \text{circa } \frac{7}{6}.$$

Setzt man die Gesammtlänge $= 4\,\lambda$, so wird wie in §. 153 $l_1 = \frac{2\lambda}{1+\alpha} = 0{,}9210\,\lambda$, $l_2 = \frac{2\,\alpha\,\lambda}{1+\alpha} = 1{,}0790\,\lambda$. Die beiden ersten der Gleichungen c gehen hierdurch über in

$$\begin{cases} E\,W\,(2{,}1716\,s - s_1) = 0{,}025137\,q\,\lambda^4. \\ E\,W\,(s_1 - s) = 0{,}014120\,q\,\lambda^4 \end{cases}$$

und hieraus

$$274.\quad s = 0{,}033507\,\frac{q\,\lambda^4}{E\,W},\quad s_1 = 0{,}047627\,\frac{q\,\lambda^4}{E\,W}.$$

Es wird nun

$$275.\quad -M_1' = +M_1 = -M_2' = +M_2 = \frac{1}{16}\,q\,l^2 = 0{,}07276\,q\,\lambda^2.$$

Hiernach wird die Tragkraft bei gleichem Querschnitte $\frac{1010}{728} = 1{,}387$mal so gross, als bei gleich hohen Stützen und beim günstigsten Verhältniss der Felder und $\frac{1250}{728} = 1{,}717$mal so gross, als bei 4 getrennten gleich langen Stäben.

Es wird nun ferner $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1 = +0{,}3633\,q\,\lambda$; $Q_1'' = Q_1' - q\,l_1 = -0{,}5577\,q\,\lambda$; $Q_2' = \frac{1}{2}\,q\,l = +0{,}5395\,q\,\lambda$; $Q_2'' = Q_2' - q\,l = -0{,}5395\,q\,\lambda$. Ferner wird $D_0 = Q_1' = 0{,}3633\,q\,\lambda$; $D_1 = -Q_1'' + Q_2' = 1{,}0972\,q\,\lambda$; $D_2 = -2\,Q_2'' = 1{,}0790\,q\,\lambda$.

§. 161. Stab mit beliebig vielen Feldern. Eine ganz analoge Untersuchung lässt sich leicht für eine beliebige Anzahl von Feldern anstellen. Wir bestimmen also wiederum die Senkung der Stützen und das zweckmässigste Verhältniss der Längen der Felder durch die Bedingung, dass die sämmtlichen Normalmomente und die Maximalmomente in den einzelnen Feldern einander gleich seien.

Zunächst ist $M_1' = -\frac{Q_1^2}{2\,q}$ und $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1$, also, da $-M_1' = M_1$ sein soll, $2\,M_1\,q = \left(-\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2}\,q\,l_1\right)^2$ oder

$$\text{a.}\quad 4\,M_1^2 - 12\,M_1\,q\,l_1^2 + q^2 l_1^4.$$

Ferner ist für ein beliebiges mittleres Feld $M_m' = M_{m-1} - \frac{Q_m'^2}{2\,q}$ und $Q_m' = \frac{M_{m-1} - M_m}{l_m} + \frac{1}{2}\,q\,l_m$, oder, da $M_{m-1} = M_m$ soll, $Q_m' = \frac{1}{2}\,q\,l_m$, mithin $M_m' = -M_{m-1} + \frac{1}{8}\,q\,l_m^2$ oder

$$\text{b.}\quad M_m' = -M_1 + \tfrac{1}{8}\,q\,l_m^2.$$

Sollen nun sämmtliche M_m' einander gleich sein, so ist dies nur

Digitized by Google

möglich, wenn sämmtliche l_m gleich sind, d. h. wenn alle Mittelfelder gleich lang sind. Wir bezeichnen die Länge jedes Mittelfeldes mit l. Alsdann wird nach b: $M_1 = -M_1 + \frac{1}{8} q l^2$, also

$$275. \quad M_1 = \frac{1}{16} q l^2.$$

Die Gleichung a geht dadurch über in

$$l^4 - 48 l^2 l_1^2 + 64 l_1^4 = 0,$$

also

$$276. \quad \begin{cases} l = 2(2 - \sqrt{2}) l_1 = 1{,}1716 l_1, \\ l_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} l = 0{,}8535 l. \end{cases}$$

Die Normalgleichungen werden nun, wenn wir die Tiefen der Stützen unter der Horizontalen, welche durch die äusseren Stützen geht, mit s_1, s_2, s_3, ... bezeichnen,

$$M_1 (2 l_1 + 3 l) = \frac{1}{4} q (l_1^3 + l^3) - 6 E W \left(\frac{s_1}{l_1} - \frac{s_2 - s_1}{l} \right),$$

$$6 M_1 l^2 = \tfrac{1}{2} q l^4 - 6 E W (s_1 - 2 s_2 + s_3)$$

$$6 M_1 l^2 = \tfrac{1}{2} q l_4 - 6 E W (s_2 - 2 s_3 + s_4).$$

. . . . .

Setzen wir hierin $M_1 = \frac{1}{16} q l^2$, $l_1 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}) l$, so wird

a.
$$\begin{cases} 48 E W [-(5 - 2\sqrt{2}) s_1 + s_2] = -\frac{1}{16}(10 + 3\sqrt{2}) q l^4, \\ 48 E W (s_1 - 2 s_2 + s_3) = -q l^4, \\ 48 E W (s_2 - 2 s_3 + s_4) = -q l^4, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ 48 E W (s_{n-1} - 2 s_{n-2} + s_{n-3}) = -q l^4, \\ 48 E W [-(5 - 2\sqrt{2}) s_{n-1} + s_{n-2}] = -\frac{1}{16}(10 + 3\sqrt{2}) q l^4. \end{cases}$$

Die Addition aller Gleichungen giebt, wenn man beachtet, dass $s_1 = s_{n-1}$ ist, den Werth von s_1. Die übrigen s ergeben sich sodann successive aus den einzelnen Gleichungen, nämlich

b
$$277. \quad \begin{cases} s_1 = (0{,}008891\, n - 0{,}010845) \frac{q l^4}{E W}, \\ s_2 = (0{,}019307\, n - 0{,}042096) \frac{q l^4}{E W}, \\ s_3 = (0{,}029723\, n - 0{,}094180) \frac{q l^4}{E W}, \\ s_4 = (0{,}040139\, n - 0{,}167097) \frac{q l^4}{E W}. \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Bezeichnen wir das arithmetische Mittel der Längen sämmtlicher Felder mit λ, so ist $n \lambda = 2 l_1 + (n - 2) l = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} + n - 2 \right) l$

$= \left(n - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right) l = (n - 0{,}2929) l$, also

$$l = \frac{n \lambda}{n - 0{,}2929.}$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

Digitized by Google

n	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	M_1
2	0,01307					0,08579
3	0,02430	0,02430				0,07607
4	0,03351	0,04763	0,03351			0,07276
5	0,04281	0,06931	0,06931	0,04281		0,07052
6	0,05192	0,09010	0,10281	0,09010	0,05192	0,06908
			$\cdot \frac{2\lambda^4}{EW}$			$\cdot q\lambda^2$

Verbindet man die Stützen $m-1$ und $m+1$ welche neben der Stütze m liegen, durch eine Gerade, so ist die Entfernung der Stütze m von dieser Geraden offenbar $s_m - \frac{1}{2}(s_{m-1} + s_{m+1}) = -\frac{1}{2}(s_{m-1} - 2s_m + s_{m+1})$. Nach den Gleichungen a ist diese Entfernung constant, nämlich $= \frac{1}{96}\frac{ql^4}{EW}$. Hieraus lässt sich leicht der Schluss ziehen: Sämmtliche Stützen, mit Ausnahme der Endstützen, sollen in einem Kreise mit dem Radius $\frac{48EW}{l^2}$ liegen.

XVII. Kapitel.

Continuirlicher Stab mit veränderlichem Querschnitte.

§. 162. Allgemeines. Die Untersuchung des continuirlichen Stabes mit variabelem Querschnitte kann in derselben Weise erfolgen, wie die des prismatischen continuirlichen Stabes. Nur sind für die Neigung der Axe des Stabes über einer Stütze nicht die Formeln 121 (S. 107), sondern die allgemeineren Formeln 131 (S. 110) in Anwendung zu bringen. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so wird hiernach

$$\tau_m = \varkappa_m \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \frac{l_m}{6EW}(\beta_m M_{m-1} + 2\alpha_m M_m - \beta_m \mathfrak{M}_m' - 2\alpha_m \mathfrak{M}_m''),$$

$$\tau_m = \varkappa_m \frac{s_{m+1} - s_m}{l_m} + \frac{l_{m+1}}{6EW}(2\gamma_{m+1} M_m + \beta_{m+1} M_{m+1} - 2\gamma_{m+1}\mathfrak{M}'_{m+1} - \beta_{m+1}\mathfrak{M}''_{m+1}).$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke für τ_m giebt

278. $$\beta_m l_m M_{m-1} + 2(\alpha_m l_m + \gamma_{m+1} l_{m+1}) M_m + \beta_{m+1} l_{m+1} M_{m+1} = \beta_m l_m \mathfrak{M}'_m + 2\alpha_m l_m \mathfrak{M}''_m + 2\gamma_{m+1} l_{m+1}\mathfrak{M}'_{m+1} + \beta_{m+1} l_{m+1}\mathfrak{M}''_{m+1} + \varkappa_m \frac{s_m - s_{m-1}}{l_m} - \varkappa_{m-1}\frac{s_{m+1} + s_m}{l_{m+1}}.$$

Hierin bedeuten, wie früher, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ die Momente am linken und

Digitized by Google

rechten Ende des betreffenden Feldes für den Fall, dass die Enden dieses Feldes horizontal eingespannt wären. Nach §. 129 wird

$$279.\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= +\tfrac{1}{12}\frac{9\,B\,J-8\,C\,H}{4\,A\,C-3\,B^2}\,q\,l^2,\\ \mathfrak{M}'' &= -\frac{1}{12}\frac{9\,(2\,A-B)\,J-4\,(3\,B-2\,C)\,H}{4\,A\,C-3\,B^2}\,q\,l^2+X_1, \end{aligned}\right.$$

wenn q die mittlere Last pro Längeneinheit, X_1 das Moment der Last für das rechte Ende bedeutet. Die Coefficienten A, B, C, H, J, α, β, γ, $\varkappa$ haben für irgend ein Feld, um es hier nochmals zu wiederholen, die folgende Bedeutung, worin X das Moment der zwischen $x = o$ und dem fraglichen Querschnitte liegenden Last für diesen Querschnitt, $\mathfrak{W}$ das mittlere Trägheitsmoment bezeichnet,

$$280.\quad \left\{\begin{aligned} A &= \frac{\mathfrak{W}}{l}\int_0^l\frac{dx}{W},\quad B=\frac{2\,\mathfrak{W}}{l^2}\int_0^l\frac{x\,dx}{W},\quad C=\frac{3\,\mathfrak{W}}{l^3}\int_0^l\frac{x^2\,dx}{W};\\ H &= \frac{6\,\mathfrak{W}}{q\,l^3}\int_0^l\frac{X\,dx}{W},\quad J=\frac{8\,\mathfrak{W}}{q\,l^3}\int_0^l\frac{X\,x\,dx}{W};\\ \alpha &= C,\quad \beta=3\,B-2\,C,\quad \gamma=3\,A-3\,B+C,\\ \varkappa &= 4\,A\,C-3\,B^2. \end{aligned}\right.$$

Bezeichnet man die Werthe von A, B, C, . . ., wenn man nicht das linke, sondern das rechte Ende als Anfang der x wählt, mit A′, B′, C′, . . . , so ist

$$A'=\frac{\mathfrak{W}}{l}\int_0^l\frac{d\,(l-x)}{W}=A,\quad B'=\frac{2\,\mathfrak{W}}{l^2}\int_0^l\frac{(l-x)\,d\,(l-x)}{W}=2\,A-B,$$

$$C'=\frac{3\,\mathfrak{W}}{l^3}\int_0^l\frac{(l-x)^2\,d\,(l-x)}{W}=3\,A-3\,B+C.$$

$\alpha'=C'=3\,A-B+C$, $\beta'=3\,B'-2\,C'=3\,B-2\,C$,
$\gamma'=3\,A'-3\,B'+C'=C$, d. i.

$$281.\quad \alpha'=\gamma,\quad \beta'=\beta,\quad \gamma'=\alpha.$$

Bei stetig veränderlichem Querschnitte sind A, B, C, H, J, X nach der Simpson'schen Regel, bei sprungweiser Aenderung aber nach 127 (§. 129) zu berechnen.

Die Gleichung 278 ist für alle Combinationen von je zwei benachbarten Feldern anzuwenden und die so entstandenen Normalgleichungen sind in derselben Weise aufzulösen, wie bei constantem Querschnitte. Auch die Regeln zur Bestimmung der übrigen Grössen bleiben dieselben.

§. 163. Stab mit zwei Feldern. Die beiden Felder mögen gleiche Länge, die drei Stützen gleiche Höhe haben und der Stab und die Belastung mögen in Beziehung auf die Mittelstütze symmetrisch sein. Die Gleichung 278 geht dann, wenn wir $M_{m-1}=M_{m+1}=0$, $M_m=M_1$ setzen, über in

$$2\,(\alpha_1+\gamma_2)\,M_1=\beta_1\,\mathfrak{M}_1'+2\,\alpha_1\,\mathfrak{M}_1''+2\,\gamma_2\,\mathfrak{M}_2'+\beta_2\,\mathfrak{M}_2''.$$

Nun aber ist der Symmetrie wegen $\beta_2=\beta_1'$, $\gamma_2=\gamma_1'$, d. i. nach

Digitized by Google

281 $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha_1$. Ausserdem ist $\mathfrak{M}_2' = \mathfrak{M}_1''$, $\mathfrak{M}_2'' = \mathfrak{M}_1'$, mithin, wenn wir jetzt den Index 1 weglassen,

$$2\,\alpha\,M_1 = \beta\,\mathfrak{M}' + 2\,\alpha\,\mathfrak{M}''.$$

$$282.\quad M_1 = \frac{\beta}{2\,\alpha}\,\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = \left(\frac{3\,B}{2\,C} - 1\right)\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''.$$

Beispiel. Das Trägheitsmoment des Querschnittes verändere sich in der Taf. V. Fig. 9 angegebenen Weise. Alsdann ist zunächst das mittlere Trägheitsmoment

$$\mathfrak{W} = 0{,}15\,.\,2{,}1 + 0{,}50\,.\,3{,}3 + 0{,}19\,.\,2{,}1 + 0{,}09\,.\,3{,}6 + 0{,}07\,.\,5{,}1 = 3{,}045.$$

Hiernach ergeben sich für $\frac{w}{\mathfrak{W}}$ die auf der rechten Seite der Figur angegebenen Werthe. Es wird nun nach 127 (§. 129)

$$A = \frac{0{,}15}{0{,}7} + \frac{0{,}50}{1{,}1} + \frac{0{,}19}{0{,}7} + \frac{0{,}09}{1{,}2} + \frac{0{,}07}{1{,}7} = 1{,}0565,$$

$$B = \frac{0{,}15^3}{0{,}7} + \frac{0{,}65^3 - 0{,}15^3}{1{,}1} + \frac{0{,}84^3 - 0{,}65^3}{0{,}7} + \frac{0{,}93^3 - 0{,}84^3}{1{,}2} + \frac{1^3 - 0{,}93^3}{1{,}7} = 1{,}0122,$$

$$C = \frac{0{,}15^3}{0{,}7} + \frac{0{,}65^3 - 0{,}15^3}{1{,}1} + \frac{0{,}84^3 - 0{,}65^3}{0{,}7} + \frac{0{,}93^3 - 0{,}84^3}{1{,}2} + \frac{1^3 - 0{,}93^3}{1{,}7} = 0{,}9973,$$

und bei gleichmässiger Belastung $H = C$ und

$$J = \frac{0{,}15^4}{0{,}7} + \frac{0{,}65^4 - 0{,}15^4}{1{,}1} + \frac{0{,}84^4 - 0{,}65^4}{0{,}7} + \frac{0{,}93^4 - 0{,}84^4}{1{,}2} + \frac{1^4 - 0{,}93^4}{1{,}7} = 0{,}9755.$$

Daher wird nach 279:

$$\mathfrak{M}' = -\frac{1}{12}\,\frac{9\,.\,1{,}0122\,.\,0{,}9755 - 8\,.\,0{,}9973^2}{4\,.\,1{,}0565\,.\,0{,}9973 - 3\,.\,1{,}0122^2}\cdot q\,l^2 = 0{,}8149\,\frac{q\,l^2}{12},$$

$$\mathfrak{M}'' = -\frac{1}{12}\,\frac{9\,(2\,.\,1{,}0565 - 1{,}0122)\,.\,0{,}9755 - 4\,(3\,.\,1{,}0122 - 2\,.\,0{,}9973)\,.\,0{,}9973}{4\,.\,1{,}0565\,.\,0{,}9973 - 3\,.\,1{,}0122}\,q\,l^2 + \frac{1}{2}\,q\,l^2$$

$$= -\,4{,}8275\,\frac{q\,l^2}{12} + \frac{1}{2}\,q\,l^2 = 1{,}1725\,\frac{q\,l^2}{12}.$$

Demnach wird nun nach 282:

$$M_1 = \left[\left(\frac{3\,.\,1{,}0122}{2\,.\,0{,}9973} - 1\right)0{,}8149 + 1{,}1725\right]\frac{q\,l^2}{12} = 1{,}5982\,\frac{q\,l^2}{12} = 0{,}1332\,q\,l^2,$$

während bei constantem Querschnitte $M_1 = 0{,}125\,q\,l^2$ ist, so dass eine Abweichung von nur 6,6 Procent stattfindet. Es wird nun $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2}\,q\,l = +0{,}3668\,q\,l$, $Q_1'' = Q_1' - q\,l = -0{,}6332\,q\,l$; $D_0 = Q_1' = 0{,}3668\,q\,l$, $D_1 = -2\,Q_1' = 1{,}2664\,q\,l$, während bei constantem Querschnitte $Q_1' = +0{,}375\,q\,l$, $Q_1'' = -0{,}625\,q\,l$, $D_0 = 0{,}375\,q\,l$, $D_1 = 1{,}250\,q\,l$ ist. Ferner wird $M = -Q_1'\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2$, $\max M = -\frac{Q_1'^2}{2\,q} = -\frac{0{,}3668^2}{2}\,q\,l^2 = 0{,}06727\,q\,l^2$, während bei constantem Querschnitte $\max M = 0{,}07031\,q\,l^2$ ist.

§. 164. Stab mit drei und vier Feldern. Wir setzen eine symmetrische Anordnung des Stabes und der Belastung, sowie gleich hohe Stützen voraus.

Bei drei Feldern wird die Normalgleichung

$$283.\quad (2\,\alpha_1\,l_1 + \beta_2\,l_2 + 2\,\gamma_2\,l_2)\,M_1 = \beta_1\,l_1\,\mathfrak{M}_1' + 2\,\alpha_1\,l_1\,\mathfrak{M}_1'' + (2\,\gamma_2 + \beta_2)\,l_2\,\mathfrak{M}_2',$$

wodurch M_1 bestimmt ist.

Bei vier Feldern werden die beiden Normalgleichungen

$$284.\quad \begin{cases} 2\,(\alpha_1\,l_1 + \gamma_2\,l_2)\,M_1 + \beta_2\,l_2\,M_2 \\ \qquad = \beta_1\,l_1\,\mathfrak{M}_1' + 2\,\alpha_1\,l_1\,\mathfrak{M}_1'' + 2\,\gamma_2\,l_2\,\mathfrak{M}_2' + \beta_2\,l_2\,\mathfrak{M}_2'' \\ \beta_2\,l_2\,M_1 + 2\,\alpha_2\,l_2\,M_2 = \beta_2\,l_2\,\mathfrak{M}_2' + 2\,\alpha_2\,l_2\,\mathfrak{M}_2''. \end{cases}$$

Digitized by Google

Allgemein wollen wir die Untersuchung nicht weiter führen, sondern nur den wichtigsten Fall, den Stab von constanter Festigkeit, behandeln.

§. 165. Stab von constanter Festigkeit. Wir setzen einen Stab von constanter Höhe voraus, so dass die deformirte Axe aus einzelnen, entgegengesetzt gekrümmten, kreisförmigen Stäben mit gleichem Radius (r) besteht. Ausserdem setzen wir eine gleichmässige Belastung voraus. Nach 138 (§. 132) ergiebt sich für den Winkel τ_m ein Ausdruck aus dem mten Felde und ein Ausdruck aus dem $(m+1)$sten Felde. Die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke giebt zwischen den drei Normalmomenten M_{m-1}, M_m, M_{m+1} folgende Beziehung:

285.
$$\begin{cases} \dfrac{r(s_m - s_{m-1})}{2\,l_m} - \dfrac{r(s_{m-1} - s_m)}{2\,l_{m+1}} = \\ -l_m\left[+1-2\left(1+2\dfrac{M_{m-1}-M_m}{q\,l^2_m}\right)\sqrt{1-\dfrac{4(M_{m-1}+M_m)}{q\,l^2_m}+\dfrac{4(M_{m-1}-M_m)^2}{q^2 l^4_m}}\right] \\ +l_{m+1}\left[-1+2\left(1+2\dfrac{M_m-M_{m+1}}{q\,l^2_{m+1}}\right)\sqrt{1-\dfrac{4(M_m+M_{m+1})}{q\,l^2_{m+1}}+\dfrac{4(M_m-M_{m+1})^2}{q^2 l^4_{m+1}}}\right]. \end{cases}$$

Es ist leicht zu ersehen, dass die nach diesem Schema für je drei benachbarte Stützen aufgestellten Normalgleichungen im Allgemeinen nicht leicht aufzulösen sind. Wir wollen uns daher auch nur auf diejenigen Fälle beschränken, in welchen nur ein Normalmoment zu bestimmen ist, was nur bei zwei und drei Feldern eintritt. Es lassen sich auch noch diejenigen Fälle, in welchen zwei Normalmomente zu bestimmen sind, nämlich bei vier und fünf Feldern, ohne grosse Schwierigkeit lösen.

§. 166. Stab mit zwei Feldern. Wenn die Stützen gleiche Höhe haben, so ergibt sich als Normalgleichung, da die Momente an den äusseren Stützen Null sind,

$$1-2\left(1-\frac{2\,M_1}{q\,l^2}\right)\sqrt{\left(1-\frac{4\,M_1}{q\,l^2}+\frac{4\,M_1^2}{q^2 l^4}\right)}=0$$

oder

$$2\left(1-\frac{2\,M_1}{q\,l^2}\right)^2=1,$$

$$286.\quad M_1=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\,q\,l^2=0{,}1464\,q\,l^2,$$

während bei constantem Querschnitte $M_1 = 0{,}125\,q\,l^2$, also um 17,1 Procent kleiner ist. Es wird nun $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2}\,q\,l$, $Q_1'' = Q_1' - q\,l$, $D_0 = Q_1'$, $D_1 = 2\,Q_1''$, d. i.

$$287.\quad Q_1'=\frac{\sqrt{2}}{4}\,q\,l=+0{,}3536\,q\,l,\quad Q_1''=\frac{4-\sqrt{2}}{4}=-0{,}6464\,q\,l;$$

$$288.\quad D_0=0{,}3536\,q\,l,\quad D_1=1{,}2929\,q\,l,$$

während bei constantem Querschnitte $Q_1' = 0{,}375\,q\,l$, $Q_1'' = 0{,}625\,q\,l$, $D_0 = 0{,}375\,q\,l$, $D_1 = 1{,}250\,q\,l$ ist. Ferner wird $M = -Q_1'\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2$, d. i.

$$M=-(0{,}3536-0{,}5\,x)\,q\,x.$$

Digitized by Google

Für $x = 0{,}7072\,l$ wird $M = 0$; für $x = 0{,}3536\,l$ wird M zum Maximum und zwar ist max $M = \frac{Q_1'^2}{2q}$, d. i.

$$289.\quad \max M = \frac{1}{16}\,q\,l^2 = 0{,}0625\,q\,l^2,$$

während bei constantem Querschnitte $\max M = 0{,}07031\,q\,l^2$ ist.

Hat die Mittelstütze eine Senkung s, so ergiebt sich leicht

$$290.\quad M_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2}}\right) q\,l^2.$$

Es wird nun $Q_1' = -\frac{M_1}{l} + \frac{1}{2}\,q\,l = +\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2}\right)}\,q\,l$, $\max M = M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2q}$, d. i.

$$291.\quad M_1' = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2}\right) q\,l^2.$$

Demnach wird durch die Senkung M_1 vermindert, M_1' vergrössert, wie bei constantem Querschnitte. Die absoluten Werthe beider Momente werden gleich für

$$\left(\frac{r\,s}{l^2}\right)^2 - 92\,\frac{r\,s}{l} + 68 = 0,$$

$$292.\quad \frac{r\,s}{l} = 46 - 32\sqrt{2} = 0{,}74515.$$

Alsdann wird

$$293.\quad M_1 = M_1' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\,q\,l^2 = 0{,}08579\,q\,l^2.$$

d. i. genau so gross, wie bei constantem Querschnitte (§. 158).

Es bezeichne V das Volumen des Stabes in einem Felde, $\mathfrak{V}$ das Volumen eines prismatischen Stabes von gleicher Festigkeit bei derselben Länge, F_0 den grössten Querschnitt innerhalb des Feldes, F_1 den Querschnitt an der Mittelstütze, $\mathfrak{F}$ den Querschnitt des prismatischen Stabes, ξ das x, für welches $M = 0$ wird. Alsdann ergiebt sich leicht:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{F}\,l,\quad V = \frac{2}{3}\,F_0\,(2\,\xi - l) + \frac{1}{6}\,F_1\,(2\,l - \xi).$$

Bei constanter Höhe ist nach §. 86 der Querschnitt dem Momente proportional, also $F_0 : \mathfrak{F} = M_1' : \frac{1}{8}\,q\,l^2$, $F_1 : \mathfrak{F} = M_1 : \frac{1}{8}\,q\,l^2$ oder $F_0 = \frac{8\,M_1'}{q\,l^2}\,\mathfrak{F}$, $F_1 = \frac{8\,M_1}{q\,l^2}\,\mathfrak{F}$, d. i.

$$F_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2}\right)\mathfrak{F},\quad F_1 = 4\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2}}\right)\mathfrak{F}.$$

Ferner ist $M = -Q_1'\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2$, also ist $\xi = \frac{2\,Q_1'}{2\,q} = l\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2}}$. Setzen wir zur Abkürzung $\frac{1}{2} + \frac{r\,s}{4\,l^2} = a$, so wird $F_0 = a\,\mathfrak{F}$, $F_1 = 4\,(1 - \sqrt{a})\,\mathfrak{F}$, $\xi = l\sqrt{a}$, folglich

Digitized by Google

$$V = \frac{2}{3}\left[a\,(2\sqrt{a}-1) + (1-\sqrt{a})\,(2-\sqrt{a})\right]\mathfrak{G}\,l$$
$$= \frac{2}{3}\,[2-(3-2a)\sqrt{a}]\,\mathfrak{B}$$
$$= \frac{2}{3}\left[2-\left(2-\frac{r\,s}{2\,l^2}\right)\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{r\,s}{4\,l^2}}\right]\mathfrak{B}.$$

Für $s = 0$ wird $V = \frac{4}{3}\,(1-\sqrt{\frac{1}{2}})\,\mathfrak{B} = 0{,}3907\,\mathfrak{B}$, also ist die Ersparniss gegenüber dem prismatischen Stabe sehr gross. Die zweckmässigste Senkung ist diejenige, für welche V zum Minimum wird, also für

$$0 = \frac{dV}{ds} = -\frac{2\,\mathfrak{B}\,s}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{r\,s}{4\,l^2}}}$$

d. i. für

$$s = 0.$$

Eine Senkung der Mittelstütze bietet also keinen Vortheil, wohl aber einen Nachtheil.

Taf. VI. Fig. 4 (punktirt) stellt Q und M, Taf. VII. Fig. 7 (schwache Linie) die elastische Linie für $s = 0$ dar.

§. 167. Stab mit drei Feldern. Bei symmetrischer Anordnung und gleich hohen Stützen ergiebt sich als Normalgleichung

$$l_1\left[1-2\left(1-2\,\frac{M_1}{q\,l_1^2}\right)^2\right] = l_2\left[-1+2\sqrt{1-8\,\frac{M_1}{q\,l_2^2}}\right].$$

Schafft man die Wurzel hinweg und ordnet nach Potenzen von M_1, so ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung $\frac{M_1}{q\,l_1^2} = z$ und wie früher $\frac{l_2}{l_1} = \alpha$ setzt, folgende Gleichung vierten Grades:

294. $64\,z^4 - 128\,z^3 + 16\,(5-\alpha\,z^2) + 16\,(1+\alpha)\,z - (1+\alpha)\,(3\,\alpha-1) = 0.$

Hiernach ergiebt sich

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
$z =$	0,0903	0,1069	0,1225	0,1384	0,1546

Es ist nun $M_1 = z\,q\,l_1^2$. Im ersten Felde wird $Q_1' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{1}{2}\,q\,l_1$, $M = -Q_1'\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2$, $\max M = M_1' = -\frac{Q_1'^2}{2\,q}$; M wird $= 0$ für $x = \xi_1 = \frac{2\,Q_1'}{q}$ und zum Maximum für $x = \frac{1}{2}\,\xi_1$. Im zweiten Felde wird $Q_2' = \frac{1}{2}\,q\,l_1$, $M = M_1 - \frac{1}{2}\,q\,l_2\,x + \frac{1}{2}\,q\,x^2$, $\max M = M_2' = M_1 - \frac{1}{8}\,q\,l_2^2$; wird $M = 0$ für $x = \xi_2$, so ist $\xi_2^2 - l_2\,\xi_2 + \frac{2\,M_1}{q} = 0$; zum Maximum wird M für $x = \frac{1}{2}\,l_2$. Die hiernach berechneten Werthe von M_1', M_1, M_2', sowie von ξ_1, ξ_2 sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Bei den Momenten ist der Coefficient von $q\,\lambda^2$ angegeben, wenn λ die mittlere Länge der Felder bedeutet, so dass $l_1 = \frac{3\,\lambda}{2+\alpha}$, $l_2 = \frac{3\,\alpha\,\lambda}{2+\alpha}$ ist.

Digitized by Google

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	
$M_1' = -$	0,0898	0,0773	0,0652	0,0575	0,0493	
$M_1 = +$	0,0966	0,1068	0,1147	0,1216	0,1278	$. q \lambda^2$
$M_2' = -$	0,0117	0,0182	0,0269	0,0366	0,0468	
$\xi_1 =$	0,8194	0,7864	0,7500	0,7232	0,6907	$. l_1$
$\xi_2 =$	0,3356	0,3092	0,2820	0,2597	0,2412	$. l_2$

Bezeichnen wir das Volumen des Stabes mit V, das Volumen dreier einzelner prismatischer Stäbe von gleicher Gesammtlänge und gleicher Tragkraft mit $\mathfrak{V}$, die Querschnitte, welche den Momenten M_1', M_2, M_2' entsprechen, mit F_1', F_1, F_2', den Querschnitt des prismatischen Stabes, entsprechend dem Momente $\frac{1}{8} q \lambda^2$, mit $\mathfrak{F}$, so ergiebt sich leicht $\mathfrak{V} = 3 \mathfrak{F} \lambda$ und

$$V = \frac{3}{4} F_1'(2 \xi_1 - l_1) + \frac{1}{3} F_1 (2 l_1 + l_2 - \xi_1) - \frac{2}{3} F_2'(4 \xi_2 - l)$$

$$= \frac{8}{9} \mathfrak{V} \left[4 \frac{M_1'}{q \lambda^2} \frac{2 \xi_1 - l_1}{\lambda} + \frac{M_1}{q \lambda^2} \left(3 - \frac{\xi_1}{\lambda} \right) - 2 \frac{M_2'}{q \lambda^2} \frac{4 \xi_2 - l}{\lambda} \right],$$

wonach folgende Tabelle berechnet ist:

$\alpha =$	0,9	1,0	1,1	1,2	1,232	1,3	
$V =$	0,3822	0,3610	0,3413	0·3393	0,3392	0,3398	$. \mathfrak{V}$

Das vortheilhafteste Verhältniss der Längen der Felder ist hiernach $\alpha = 1{,}232 =$ circa $1\frac{6}{13}$. Hier muss also das innere Feld länger sein, als die äusseren, während bei constantem Querschnitte das innere Feld kürzer sein muss (§. 159).

Die übrigen Grössen sind nun leicht zu bestimmen. Für $\alpha = 1{,}232$ ergiebt sich $M_1' = -0{,}0548\, q \lambda^2$, $M_1 = +0{,}1258\, q \lambda^2$, $M_2' = -0{,}0399\, q \lambda_2$, $Q_1' = +0{,}331\, q \lambda$, $Q_1'' = -0{,}597\, q \lambda$, $Q_2' = -0{,}572\, q \lambda$, während bei constantem Querschnitte für dasselbe Verhältniss $M_1' = -0{,}0603\, q \lambda^2$, $M_1 = +0{,}1086\, q \lambda^2$, $M_1' = 0{,}0590\, q \lambda^2$, $Q_1' = +0{,}347\, q \lambda$, $Q_1'' = 0{,}581\, q \lambda$, $Q_2' = -0{,}572\, q \lambda$ wird.

Sind die Mittelstützen um s gesenkt, so ergiebt sich als Normalgleichung, wenn wir zur Abkürzung $\frac{r s}{2 l_1^2} = \beta$ setzen,

295. $$64 z^4 - 128 z^3 + 16 (5 - \alpha - \beta) z + 16 (1 + \alpha + \beta) z - (1 + \alpha + \beta)(3 \alpha - 1 + \beta) = 0.$$

Einen beachtenswerthen Vortheil bietet aber auch hier die Senkung nicht.

Taf. VI. Fig. 9 stellt Q und M, Taf. VII. Fig. 12 die elastische Linie für das Verhältniss $\alpha = 1{,}232$ dar.

Die in diesen und den vorigen Kapiteln entwickelten Regeln für continuirliche Träger finden ihre hauptsächlichste Anwendung im Brückenbaue. Eine direkte Anwendung aber lässt sich dabei nicht machen, weil wir nur eine totale gleichmässige Belastung vorausgesetzt haben, während die Beanspruchung der Brücken durch eine partielle Belastung grösser ausfallen kann. Die Behandlung dieses Falles gehört aber mehr in den Brückenbau, als in die allgemeine Elasticitätslehre und würde den Umfang dieses Werkes zu sehr vergrössern.

Digitized by Google

V. Abschnitt.

Belastung durch Kräfte, unter welchen Axialkräfte sind.

§. 168. Einleitung. Wenn unter den äusseren Kräften solche sind, welche parallel zur Axe des Körpers wirken und welche wir äussere Axialkräfte nennen, deren Abstand von der Axe gegen die Querschnittsdimensionen nicht sehr gross ist, so darf man im Allgemeinen bei Aufstellung der Biegungsmomente die Formänderung des Körpers nicht mehr vernachlässigen, wie wir dies bei der Untersuchung der Wirkung von äusseren Transversalkräften im vorigen Abschnitte und bei Aufstellung der Werthe für P, Q, M in §. 60 gethan haben. Denn die Aenderungen der Hebelsarme der äusseren Axialkräfte in Folge der Formänderung sind alsdann gegen die ohnehin kleinen Hebelsarme vor der Formänderung nicht mehr sehr klein. Hierdurch wird die Rechnung allerdings weniger einfach, als im vorigen Abschnitte.

Wir setzen stets voraus, dass nur auf jede Endfläche des Stabes eine äussere Axialkraft wirke, da dies der fast einzig wichtige Fall ist. Das Eigengewicht des Körpers, wenigstens die axial wirkende Componente desselben, vernachlässigen wir. Die auf beide Endflächen wirkenden Axialkräfte müssen alsdann gleich und entgegengesetzt gerichtet sein. Für jeden Querschnitt ist sodann die Axialkraft P (siehe §. 60) gleich dieser äusseren Axialkraft und wir werden daher die letztere ebenfalls mit P bezeichnen.

Wir setzen ferner voraus, dass die eine Hauptaxe eines jeden Querschnittes, und zwar die Axe der w, mit den äusseren Transversalkräften in einer Ebene liege, welche wir als Ebene der xy annehmen. Die anfängliche Axe des Stabes nehmen wir als Axe der x an. Es bezeichnen nun (vergl. Fig. 13, S. 47):

η, ζ die Abweichung eines Punktes C der Axe des Stabes mit der Abscisse x von den Ebenen der xz und xy;

η_0, ζ_0 die Abweichungen des Endes A des Stabes;

f, g die Entfernung des Angriffspunktes der einen äusseren Axialkraft P von den Axen der v und w der entsprechenden Endfläche;

$\mathfrak{M}$ das Moment der auf den einen Körpertheil AC wirkenden äusseren Transversalkräfte für die Axe der w des Querschnittes C;

M, M_1 die Biegungsmomente für die Axen der w und v dieses Querschnittes.

Digitized by Google

Alsdann ist

$$1. \quad \begin{cases} M = \mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0 - \eta), \\ M_1 = \mp P(g + \zeta_0 - \zeta). \end{cases}$$

Hier ist M, M_1 positiv genommen, wenn die Drehung des Körpertheiles AC nach denjenigen Seiten der Ebenen der xz und xy erfolgt, für welche f, g und η, ζ als positiv gelten. Das obere oder untere Vorzeichen von P ist zu wählen, je nachdem P ziehend oder drückend, d. h. nach dem Aeusseren oder nach dem Innern des Körpers zu wirkt.

Wenn die Biegung in der Ebene der xy vor sich geht, so ist die Gleichung 47 (§. 80) für η massgebend. Es lässt sich aber, wie in §. 82, durch Aufstellung zweier Gleichgewichtsbedingungen für die Drehung um die Axen der w und v leicht zeigen, dass diese Gleichung bei Vertauschung von M, W, η mit M_1, W_1, ζ auch für ζ massgebend ist. Demnach ist, wenn wir in 47 (§. 80) die Glieder mit $\frac{d\eta}{dx}$ vernachlässigen:

$$2. \quad \begin{cases} \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\,W}\left(1 + \frac{P}{E\,F}\right), \\ \frac{d^2\zeta}{dx^2} = \frac{M_1}{E\,W_1}\left(1 + \frac{P}{E\,F}\right). \end{cases}$$

Wir wählen hier die genauere Gleichung, weil sich diese bei constantem Querschnitte ebenso leicht behandeln lässt, wie die Näherungsgleichung 41 (§. 79). Jedoch wird man in der Regel das zweite Glied in der Parenthese vernachlässigen können, da dasselbe die durch P erzeugte relative Längenänderung, welche gegen 1 sehr klein ist, darstellt.

Den Fall, in welchem nur äussere Axialkräfte vorhanden sind, welche drückend wirken, nennt man Knick-Elasticität und Knick-Festigkeit und die Trennung des Körpers das Zerknicken.

XVIII. Kapitel.

Belastung durch centrisch wirkende Axialkräfte.

§. 169. Formänderung im Allgemeinen. Wir behandeln in diesem Kapitel den Fall, dass nur äussere Axialkräfte vorhanden sind, welche in den Schwerpunkten der Endflächen angreifen. In diesem Falle kann eine Biegung nur eintreten, wenn die Kräfte drückend wirken; bei ziehenden Kräften würden wir es nur mit reiner Normalelasticität zu thun haben. Hier wird nach 1:

$$3. \quad M = P(\eta_0 - \eta), \qquad M_1 = P(\zeta_0 - \zeta).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$4\,a. \quad k^2 = \frac{P}{E\,W}\left(1 - \frac{P}{E\,F}\right), \qquad k_1^2 = \frac{P}{E\,W_1}\left(1 - \frac{P}{E\,F}\right)$$

oder sehr nahe

$$4\,b. \quad k^2 = \frac{P}{E\,W}, \qquad k_1^2 = \frac{P}{E\,W_1},$$

Digitized by Google

so wird nach 2:

$$5. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = k^2(\eta_0 - \eta), \qquad \frac{d^2\zeta}{dx^2} = k_1{}^2(\zeta_0 - \zeta).$$

Es zeigt sich hier eine merkwürdige Eigenthümlichkeit. Sind die Gleichungen 5 für eine bestimmte Form der elastischen Linie erfüllt, so sind sie auch noch erfüllt, wenn man sämmtliche η proportional und sämmtliche ζ proportional wachsen lässt, wenn man also z. B. $m\eta$ für η, $n\zeta$ für ζ setzt. Die Grösse der Durchbiegung ist demnach unbestimmt.

Da die beiden Gleichungen 5 dieselbe Form haben, so werden wir vorläufig voraussetzen, dass die Formänderung in der Ebene der xy vor sich gehe, so dass nur die erste dieser beiden Gleichungen in Anwendung kommt.

§. 170. Formänderung eines prismatischen Stabes. Nach dem vorigen §. wird

$$6. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = k^2(\eta_0 - \eta),$$

worin in unserem Falle k constant ist. Das Integral dieser Differenzialgleichung ist bekanntlich

$$7. \quad \eta = \eta_0 + A \sin kx + B \cos kx,$$

worin A und B Constante bedeuten. Die deformirte Axe bildet hiernach eine Wellenlinie, da sich derselbe Werth von η wiederholt, wenn kx um einen vollen Winkel oder um 2π wächst. Ist λ die Wellenlänge, so ist demnach $k\lambda = 2\pi$ oder

$$8. \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{EW}{P}}.$$

Für die Bäuche oder für die Punkte, für welche η zum Maximum oder Minimum wird, ist $\frac{d\eta}{dx} = 0$, d. i. $0 = A\cos kx - B\sin kx$, also

$$\tan kx = \frac{A}{B}.$$

Setzt man die sich hieraus für sin kx und cos kx ergebenden Werthe in 7 ein und bezeichnet die grösste oder kleinste Abweichung mit η, so ergiebt sich

$$9. \quad \eta = \eta_0 \pm \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Durch 8 ist die Wellenlänge λ bei gegebener Belastung bestimmt. Wird der Stab in einzelnen Punkten, welche gleich weit von einander abstehen, festgehalten, so ist hierdurch die Wellenlänge λ gegeben und alsdann ist durch 8 die Last P bestimmt, für welche Gleichgewicht stattfindet, nämlich

$$\frac{P}{EW}\left(1 - \frac{P}{EF}\right) = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}.$$

Setzen wir $\frac{1}{1 + \frac{P}{EF}}$ für $1 - \frac{P}{EF}$, was sehr nahe richtig ist, so ergiebt sich durch Reduction auf P

Digitized by Google

$$10.\quad P = \frac{4\,E\,W\,\pi^2}{\lambda^2 - 4\,\pi^2 \frac{W}{F}}$$

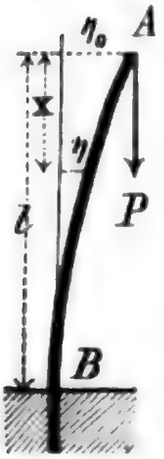
oder sehr nahe und in allen praktischen Fällen hinreichend genau

$$11.\quad P = \frac{4\,\pi^2 E\,W}{\lambda^2}.$$

Ist P kleiner, so kann überhaupt keine Biegung eintreten. Ist P genau so gross, so kann eine Biegung eintreten, welche aber nach dem vorigen §. jede beliebige Grösse annehmen kann. Der Stab kann sich also auch so stark durchbiegen, dass er zerbricht. Ist P grösser, als 11 giebt, so kann kein Gleichgewicht eintreten; die Durchbiegung nimmt so lange zu, bis der Stab bricht. Die Gleichung 11 bestimmt demnach die Tragkraft des Stabes.

§. 171. Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist.

Fig. 46.



Als Anfang der x wählen wir das freie Ende A (Fig. 46). Für $x = 0$ muss alsdann $\eta = \eta_0$ werden, also nach 7 $\eta_0 = \eta_0 + B$, d. i. $B = 0$, also $\eta = \eta_0 + A \sin kx$. Für $x = l$ muss $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden, d. i.

$$\cos kl = 0.$$

Hiernach muss kl ein ungerades Vielfaches des rechten Winkels oder von $\frac{1}{2}\pi$ sein, kl muss also einen der Werthe $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ... haben. Allgemein ist, wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet,

$$12.\quad k\lambda = \frac{2n+1}{2}\pi.$$

Da bei der Wellenlänge λ nach 8 $kl = 2\pi$ ist, so ist

$$13.\quad \lambda = \frac{4l}{2n+1}.$$

Für $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ wird $\lambda = 4l$, $\frac{4}{3}l$, $\frac{4}{5}l$, $\frac{4}{7}l$, $\frac{1}{2}l$, ... Die elastische Linie hat $n+1$ Wendepunkte und $n+1$ Bäuche.

Für $x = l$ wird $\eta = 0$, mithin $0 = \eta_0 + A \sin kl = \eta_0 \pm A$, weil $\cos kl = 0$, also $\sin kl = \pm 1$ ist; mithin ist $A = \mp \eta_0$, also

$$14.\quad \eta = \eta_0(1 \mp \sin kx),$$

wobei — für gerade, + für ungerade n gilt. Hiernach wird nach 9 $\mathfrak{y} = 0$ und $= 2\,\eta_0$. Auf Taf. VIII sind in Fig. 1 die Fälle $n = 0, 1, 2, 3, 4$ dargestellt.

Wenn kein Punkt des Stabes festgehalten wird, so nimmt er die einfache in Fig. 1 a dargestellte Biegung ($n = 0$) an. Für diesen Fall ist $\lambda = 4l$, mithin nach 11 die Tragkraft:

$$15.\quad P = \frac{\pi^2 E\,W}{4\,l^2} = 2{,}467\,\frac{E\,W}{l^2}.$$

§. 172. Stab, welcher an beiden Enden frei ist.

Als An-

Digitized by Google

fang der x wählen wir das eine Ende A. Hier ist $\eta_0 = 0$. Für $x = 0$ wird $\eta = 0$, also nach 7 $B = 0$, $\eta = A \sin kx$. Nach 9 wird $\nu = \pm A$, wir können daher auch

$$16. \quad \eta = \pm \nu \sin kx$$

setzen. Da auch für $x = l$ $\eta = 0$ wird, so wird

$$\sin kl = 0,$$

wonach kl ein beliebiges Vielfaches des gestreckten Winkels oder von π sein muss; es muss also kl einen der Werthe π, 2π, 3π, . . . haben. Allgemein ist, wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet,

$$17. \quad kl = n\pi.$$

Da bei der Wellenlänge λ nach 8 $k\lambda = 2\pi$ ist, so ist

$$18. \quad \lambda = \frac{2l}{n}.$$

Für $n = 1, 2, 3, 4$ . . wird $\lambda = 2l, l, \frac{2}{3}l, \frac{1}{2}l, \ldots$ Die Curve hat $n+1$ Wendepunkte und n Bäuche. Auf Taf. VIII sind in Fig. 2 die Fälle $n = 1, 2, 3$ dargestellt.

Wenn kein Punkt des Stabes festgehalten wird, so nimmt der Stab die in Fig. 2 a Taf. VIII dargestellte einfache Biegung ($n = 1$) an. Für diese ist $\lambda = 2l$, mithin nach 11 die Tragkraft

$$19. \quad P = \frac{\pi^2 E W}{l^2} = 9{,}870 \frac{E W}{l^2}.$$

§. 173. Stab mit eingespannten Enden. Wenn auf ein Stabende, welches wir als Anfang der x annehmen, ein Kräftepaar mit dem Momente M_0 wirkt und der Angriffspunkt der Kraft P im Schwerpunkte der Endfläche liegt, so ist $M = M_0 - P\eta$, wie auch die Kräfte des Paares gerichtet sein mögen. Dieser Ausdruck stimmt mit 3 (§. 169) überein, wenn man $\eta_0 = \frac{M_0}{P}$ setzt.

Ist der Stab an diesem Ende eingespannt, so wird das Moment M_0 durch die Reactionen der Masse erzeugt, welche das Stabende umgiebt. Dass diese Kräfte ein Paar bilden müssen, folgt daraus, dass ihre Summen für das Gleichgewicht des Stabes Null sein müssen.

Nach 7 (§. 170) wird

$$\eta = \frac{M_0}{P} + A \sin kx + B \cos kx.$$

Für $x = 0$ muss $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden, daher $A = 0$. Für $x = 0$ muss auch $\eta = 0$ werden, daher $B = -\frac{M_0}{P}$, also

$$\eta = \frac{M_0}{P}(1 - \cos kx).$$

Für $x = l$ muss $\eta = 0$ und $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden, mithin

$$\cos kl = 1, \quad \sin kl = 0.$$

Also muss kl einen der Werthe 2π, 4π, 6π, . . . oder allgemein den Werth

$$20. \quad kl = 2n\pi$$

haben, wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Die Wellenlänge λ ist

Digitized by Google

$$21.\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{l}{n},$$

also $\lambda = l, \frac{1}{2} l, \frac{1}{3} l, \ldots$ Die elastische Linie hat $2n$ Wendepunkte und $2n+1$ Bäuche. Die grösste Abweichung η tritt für $\cos kx = -1$ ein, daher ist $\eta = \frac{2M_0}{P}$, daher auch

$$22.\quad \eta = \tfrac{1}{2}\eta(1 - \cos kx).$$

Auf Taf. VIII sind in Fig. 3 die Fälle $n = 1, 2$ dargestellt.

Setzt man für die einfache Durchbiegung ($n = 1$) in 20 für k seinen Werth ein, so ergiebt sich

$$23.\quad P = \frac{4\pi^2 E W}{l^2} = 39{,}478\,\frac{E W}{l^2}.$$

Demnach verhalten sich die Tragkräfte, wenn ein Ende eingespannt ist, wenn beide Enden frei und wenn beide Enden eingespannt sind, wie **1 : 4 : 16.**

§. 174. Parabolisch begrenzter Stab. Um die Behandlung des Falles eines variabelen Querschnittes zu zeigen, nehmen wir an, dass die Längschnitte des Stabes Parabeln seien und dass der an den Enden freie Stab in Beziehung auf den Querschnitt in der Mitte symmetrisch sei. (Taf. VIII Fig. 4). Ausserdem sei aber die Aenderung der Querschnitte nur sehr gering. Nehmen wir die Mitte des Stabes als Anfang der x an und bezeichnen wir den Querschnitt in der Mitte und an den Enden bezüglich mit W_0, W_1, so können wir annähernd setzen:

$$W = W_0(1 - c x^2)$$

wobei

$$c = 4\,\frac{W_0 - W_1}{W_0 l^2},$$

da hiernach in der That für $x = 0$ $W = W_0$ und für $x = \frac{1}{2} l$ $W = W_1$ wird. Setzen wir noch zur Abkürzung

$$k_0^2 = \frac{P}{E W_0},$$

so wird nach 5 (§. 169), da hier $\eta_0 = 0$ ist,

$$a.\quad \frac{d^2\eta}{dx^2}(1 - c x^2) + k_0^2 \eta = 0.$$

Wir setzen

$$\eta = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$\frac{d\eta}{dx} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = 1.2A_2 + 2.3A_3 x + 3.4A_4 x^2 + 4.5A_5 x^3 + \ldots$$

Dies in die Gleichung a eingesetzt, giebt

$$0 = 2A_2 + k_0^2 A + (2.3A_3 + k_0^2 A_1)x + (3.4A_4 - 1.2cA_2 + k_0^2 A_2)x^2 + (4.5A_5 - 2.3cA_3 + k_0^2 A_3)x^3 + \ldots$$

Hieraus ergeben sich leicht die Coefficienten A_2, A_3, .. wenn man die Coefficienten jeder einzelnen Potenz von $x = 0$ setzt, wobei aber A, A_1

Digitized by Google

unbestimmt bleiben. Setzt man diese Ausdrücke in obige Reihe für η ein, so bestimmen sich A, A_1 durch die Bedingung, dass sowohl für $x = +\frac{1}{2}l$, als für $x = -\frac{1}{2}l$ $\eta = 0$ werden muss. Es ergiebt sich, dass beide Bedingungen nur erfüllt werden können, wenn entweder $A = 0$, oder $A_1 = 0$ ist. Bei der einfachen Durchbiegung, welche hier allein wichtig ist, muss η für gleiche positive und negative x gleichen Werth haben, was nur möglich ist, wenn $A_1 = A_3 = A_5 = .. = 0$ ist. Für diesen Fall wird

$$24.\quad \eta = A\left[1 - \frac{k_0^2 x^2}{2} + \frac{k_0^4 x^4}{2.3.4}\left(1 - 1.2\,\frac{c}{k_0^2}\right) - \frac{k_0^6 x^6}{2.3.4.5.6}\left(1 - 1.2\,\frac{c}{k_0^2}\right)\left(1 - 3.4\,\frac{c}{k_0^2}\right) + . - \ldots\right].$$

Da $\frac{c}{k_0^2}$ nur klein ist, so ist annähernd $\left(1 - a\frac{c}{k^2}\right)\left(1 - b\frac{c}{k^2}\right)\ldots = 1 - (a + b + \ldots)\frac{c}{k^2}$. Dies auf die Coefficienten der Reihe für η im vorigen Ausdrucke angewendet, giebt

$$\eta = A\left[1 - \frac{k_0^2 x^2}{2} + \frac{k_0^4 x^4}{2.3.4} - . + \ldots\right] - A\,c\,k_0^2 x^4\left[\frac{1.2}{2.3.4} - \frac{1.2 + 3.4}{2.3.4.5.6}k^2x^2 + \frac{1.2 + 3.4 + 5.6}{2.3.4.5.6.7.8}k^4x^4 - . + \ldots\right]$$

oder

$$25.\quad \eta = A\cos k_0 x - \frac{1}{12}A\,c\,k_0^2 x^4\left(1 - \frac{7}{30}k_0^2x^2 + \frac{11}{840}k_0^4x^4 - . + \ldots\right).$$

Für $x = \frac{1}{2}l$ muss $\eta = 0$ werden, daher

$$26.\quad \cos\tfrac{1}{2}k_0 l = \frac{1}{192}\,c\,k_0^2 l^4\left(1 - \frac{7}{120}k_0^2 l^2 + \frac{11}{13440}k_0^4 l^4 - . + \ldots\right),$$

durch welche Gleichung bei gegebenem c $k_0 l$ bestimmt ist. In endlicher Form lässt sich natürlich $k_0 l$ nicht darstellen. Reducirt man auf $c\,l^2$ und berechnet $c\,l^2$ für verschiedene $k_0 l$, so ergiebt sich, dass für kleine c sehr nahe ist

$$c\,l^2 = 28{,}92 - 2{,}93\,(k_0 l)^2.$$

Setzt man für c und k_0 die obigen Ausdrücke ein und reducirt auf P, so ergiebt sich als Näherungsformel für die Tragkraft

$$27.\quad P = \frac{E\,(8{,}50\,W_0 + 1{,}37\,W_1)}{l^2}.$$

Für $W_0 = W_1$ ergiebt sich hiernach für P derselbe Werth, als nach 19.

§. 175. Körper von constanter Festigkeit. Wir wollen noch untersuchen, welche Form man dem an beiden Enden freien Stabe geben müsse, damit er in allen Querschnitten gleich leicht breche oder damit die grösste Spannung für alle Querschnitte constant sei. Hier ist $M = -P\eta$, also die grösste Spannung nach §. 84 $K = -\frac{M\,a}{W} = \frac{P\,\eta\,a}{W}$, woraus

$$28.\quad \eta = \frac{K\,W}{P\,a} = \frac{K\,z}{P},$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{K}{P}\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{a\,\eta}{W}\cdot\frac{d^2z}{dx^2},$$

Digitized by Google

wenn wir zur Abkürzung $\frac{W}{a} = z$ setzen. Nach 5 aber ist $\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{P\eta}{EW}$. Dies in die vorige Gleichung eingesetzt, giebt

$$29. \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{P}{Ea}.$$

Wir können $\frac{1}{a}$ als eine Funktion von $\frac{W}{a}$ oder von z ansehen. Alsdann giebt die Integration dieser Differenzialgleichung

$$30. \quad x = \sqrt{\frac{E}{P}} \int \frac{dz}{\sqrt{A - 2\int \frac{dz}{a}}}.$$

Wir wollen dies auf einige Fälle anwenden, wobei wir das eine Ende als Anfang der x wählen.

a. Die Höhe sei constant, wobei wir unter Höhe die Dimension in Richtung der Durchbiegung verstehen. Alsdann ist auch a constant, also nach 25, wenn wir darin $z = \frac{W}{a}$ setzen,

$$\frac{d^2W}{dx^2} = -\frac{P}{E}.$$

Die zweimalige Integration giebt mit Beachtung des Umstandes, dass für $x = 0$ und $x = l$ $M = 0$, also auch $W = 0$ wird,

$$31. \quad W = \frac{P x (l - x)}{2E} = 4 W_0 \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

wenn man den mittleren Querschnitt durch den Index 0 bezeichnet. Bei proportionalen Querschnitten wird $W : W_0 = b : b_0$, also

$$32. \quad b = 4 b_0 \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

wonach der Aufriss von zwei Parabeln begrenzt wird (Taf. VIII. Fig. 5). Für den mittleren Querschnitt wird nach 31 $8 E W_0 = P l^2$ oder

$$33. \quad P = \frac{8 E W_0}{l^2},$$

was auch mit 23 (vor. §.) für $W_1 = 0$ nahe übereinstimmt.

b. Die Breite b sei constant. Bei proportionalen Querschnitten ist $W : W_0 = h^3 : h_0^3$, $a : a_0 = h : h_0$, daher

$$z = \frac{W}{a} = \frac{W_0}{a_0 h_0^2} h^2, \quad \frac{1}{a} = \frac{h_0}{a_0}\frac{1}{h}.$$

Dies in 26 eingesetzt, giebt

$$x = \int \frac{h\,dh}{\sqrt{C - Bh}},$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{A P a_0 h_0^4}{4 E W_0^2} = C, \quad \frac{P h_0^3}{E W_0} = B$$

setzen. Setzen wir $\sqrt{C - Bh} = y$, $h = \frac{C - y^2}{B}$, $dh = -\frac{2y\,dy}{B}$, so wird

Digitized by Google

$$x = -\frac{2}{B^2}\int (C - y^2)\,dy$$

$$= -\frac{2}{B^2}\left(C - \tfrac{1}{3}y^2\right)y + C_1$$

$$= -\frac{2}{3B^2}(2C + Bh)\sqrt{C - Bh} + C_1.$$

Da sich für jedes h zwei verschiedene x ergeben müssen, welche von $\frac{1}{2}l$ gleich viel abweichen, so ist die Wurzel für $x \lesseqgtr \frac{1}{2}l$ positiv, für $x \gtrless \frac{1}{2}l$ negativ und $C_1 = \frac{1}{2}l$ zu nehmen. Für $x = 0$ muss $h = 0$ werden, woraus $C = \sqrt[3]{\frac{9}{64}B^4l^2}$ folgt. Daher wird, wenn man auch den Werth für B einsetzt,

$$x = \tfrac{1}{2}l\left[1 + \left(1 + \frac{h}{h_0}\sqrt[3]{\frac{8\,E\,W_0}{9\,P\,l^2}}\right)\sqrt{1 - \frac{h}{h_0}\sqrt[3]{\frac{64\,E\,W_0}{9\,P\,l^2}}}\right].$$

Für $x = \frac{1}{2}l$ muss $h = h_0$ werden; hierdurch ergiebt sich

$$34.\quad P = \frac{64}{9}\frac{E\,W_0}{l^2}.$$

Setzt man diesen Werth für P in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$35.\quad x = \tfrac{1}{2}l\left[1 + \left(1 + \frac{h}{2h_0}\right)\sqrt{1 - \frac{h}{h_0}}\right],$$

wonach der Körper auf Taf. VIII in Fig. 6 dargestellt ist.

c. Die Querschnitte seien ähnlich. In ganz ähnlicher Weise, wie im vorigen Falle ergiebt sich, wenn wir $B = \frac{P\,h_0^4}{3\,E\,W_0}$ setzen,

$$x = \int \frac{h^2\,dh}{\sqrt{C - Bh^2}}$$

$$= -\frac{h}{2B}\sqrt{C - Bh^2} + \frac{C}{2B\sqrt{B}}\operatorname{Arcsin}\left(h\sqrt{\frac{B}{C}}\right) + C_1.$$

Für $x = 0$ muss $h = 0$ werden, daher $C_1 = 0$. Für $h = 0$ wird aber auch $\operatorname{Arcsin}\left(h\sqrt{\frac{B}{C}}\right) = \pi$, mithin, da für $h = 0$ auch $x = l$ werden muss,

$$C = \frac{2\,l\,B\sqrt{B}}{\pi}.$$

Ist $h = \sqrt{\frac{C}{B}}$, so wird $x = \frac{l}{\pi}\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{l}{2}$, daher ist $\sqrt{\frac{C}{B}}$ die Höhe h_0 in der Mitte des Stabes. Dies eingesetzt giebt

$$36.\quad x = \frac{l}{\pi}\left[\operatorname{Arcsin}\frac{h}{h_0} - \frac{h}{h_0}\sqrt{1 - \frac{h^2}{h_0^2}}\right].$$

Am bequemsten geschieht die Berechnung durch Einführung eines Hülfswinkels. Setzt man nämlich $\sin\varphi = \frac{h}{h_0}$, so wird $\sqrt{1 - \frac{h^2}{h_0^2}} = \cos\varphi$, $\operatorname{Arcsin}\frac{h}{h_0} = \varphi$, mithin

Digitized by Google

$$37.\quad x = \frac{l}{\pi}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = l\,\frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{2\pi},$$

wonach der Körper auf Taf. VIII in Fig. 7 dargestellt ist.

Nach dem Obigen wird $h_0^2 = \frac{C}{B} - \frac{2l\sqrt{B}}{\pi}$, oder wenn man den Werth für B einsetzt,

$$38.\quad P = \frac{3\pi^2 E W_0}{4 l^2} = 7{,}402\,\frac{E W_0}{l^2}.$$

Bezeichnet man das Volumen in diesen drei Fällen bezüglich mit V_1, V_2, V_3, den mittleren Querschnitt mit F_1, F_2, F_3 und das Volumen eines prismatischen Körpers von gleicher Tragkraft mit V, so ergiebt sich leicht

$$V_1 = \frac{2}{3}F_1 l, \quad V_2 = \frac{4}{5}F_2 l, \quad V_3 = \frac{3}{4}F_3 l.$$

$$V_1 = \frac{\pi^2}{12}V, \quad V_2 = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{\pi^3}{3}}V, \quad V_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}V$$

oder

$$V_1 = 0{,}823\,V, \quad V_2 = 0{,}892\,V, \quad V_3 = 0{,}866\,V.$$

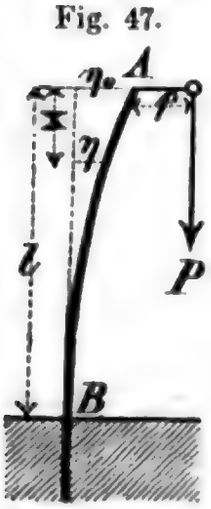
§. 176. Doppelte Durchbiegung. Nach §. 168 wird bei einer Durchbiegung in zwei Ebenen die Durchbiegung in jeder Ebene oder besser die Projection der deformirten Axe auf jede dieser Ebenen den entwickelten Gesetzen folgen. Hierbei kann die Projection auf die eine Ebene eine andere sein, d. h. eine andere Anzahl und Lage der Knoten- oder Wendepunkte haben, als die Projection auf die andere Ebene. Für die einfache Durchbiegung in beiden Ebenen ergiebt sich die kleinste Tragkraft für die Durchbiegung, welche senkrecht zu derjenigen Hauptaxe des Querschnittes stattfindet, für welche das Trägheitsmoment ein Minimum ist. In dieser Richtung wird daher der Stab am leichtesten durchbiegen.

XIX. Kapitel.

Belastung durch excentrisch wirkende Axialkräfte.

§. 177. Gedrückter Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist. Wir wollen in diesem Kapitel nur einen constanten Querschnitt voraussetzen. Als Anfang der x wählen wir das freie Ende A (Fig. 47) des Stabes. Nach 1 (§. 168) wird das Biegungsmoment

Fig. 47.



$$39.\quad M = P(f + \eta_0 - \eta), \quad M_1 = P(g + \xi_0 - \xi).$$

Für die Durchbiegung in der Ebene der x y wird daher nach 2 (§. 168)

$$40.\quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{P}{E W}(a + \eta_0 - \eta) = k^2(a + \eta_0 - \eta),$$

wenn k denselben Werth hat, wie im vorigen Kapitel. Die Integration giebt

$$\eta = a + \eta_0 + A\sin kx + B\cos kx.$$

Die Bedingung, dass für $x = 0$ $\eta = \eta_0$ wird, giebt

$B = -a$. Die Bedingung, dass für $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ wird, giebt $A = B \tan kl = -a \tan kl$. Endlich giebt die Bedingung, dass für $x = l$ $\eta = 0$ wird, $\eta_0 = -a - A \sin kl - B \cos kl$, d. i.

$$41. \quad \eta_0 = a \frac{1 - \cos kl}{\cos kl}.$$

Dies eingesetzt, giebt

$$42. \quad \eta = a \frac{1 - \cos k(l - x)}{\cos kl}.$$

Auch hier bildet die deformirte Axe eine Wellenlinie mit derselben Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$, wie im vorigen Kapitel. Setzt man in 37 für k seinen Werth und reducirt auf P, so ergiebt sich

$$43. \quad P = \frac{EW}{l^2} \operatorname{Arccos}^2 \frac{f}{f + \eta_0},$$

wonach sich für dasselbe η_0 verschiedene P ergeben. So wird z. B. für $\eta_0 = a$ $P = \frac{EW}{l^2} \operatorname{Arccos}^2 \frac{1}{2} = 1{,}10 \frac{EW}{l^2}$, $27{,}42 \frac{EW}{l^2}$, $53{,}73 \frac{EW}{l^2}$ u. s. f. Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi l}{\operatorname{Arccos} \frac{a}{a + \eta_0}}.$$

Für $\eta_0 = a$ würde sich z. B. $\lambda = 6{,}14\,l$, $1{,}20\,l$, $0{,}86\,l$ u. s. f. ergeben.

§. 178. Beanspruchung. Substituirt man die Werthe für η_0, η in den Ausdruck für M, so ergiebt sich

$$44. \quad M = P f \frac{\cos k(l - x)}{\cos kl},$$

wonach M zum Maximum für $x = l$ wird und zwar ist

$$45. \quad \max M = \frac{P f}{\cos kl}.$$

Die Schubspannungen sind hier gegen die Normalspannungen äusserst klein, weil nach §. 60 hier die Transversalkraft Q äusserst klein ist. Demnach sind hier die Festigkeitsbedingungen 71 (§. 84) anzuwenden. Hiernach wird, wenn die Biegung in der Ebene der xy stattfindet oder wenn $g = 0$ ist,

$$46. \quad \begin{cases} K = P \left(\frac{f a}{W \cos kl} - \frac{1}{F} \right), \\ \mathfrak{K} = P \left(\frac{f a}{W \cos kl} + \frac{1}{F} \right), \end{cases}$$

wobei diejenige Gleichung maassgebend ist, welche das kleinste P giebt.

Wenn g nicht $= 0$ ist, so dass also die Biegung nicht in der Ebene der xy stattfinden kann, so ist die Normalspannung N im Punkte vw des Querschnittes in Folge der Axialkraft und der beiden Biegungsmomente bezüglich $-\frac{P}{F}$, $\frac{M v}{W}$, $\frac{M_1 w}{W_1}$, also in Wirklichkeit $N = -\frac{P}{F} + \frac{M v}{W} + \frac{M_1 w}{W_1}$.

Digitized by Google

Am grössten wird hiernach N für einen Punkt des Umfanges, für welchen wir $v = \nu$, $w = \omega$ setzen wollen. Die Festigkeitsbedingungen sind alsdann

$$47. \quad \begin{cases} K = P\left(\dfrac{f\nu}{W\cos kl} + \dfrac{g\omega}{W_1\cos k_1 l} - \dfrac{1}{F}\right), \\ \mathfrak{K} = P\left(\dfrac{f\nu}{W\cos kl} + \dfrac{g\omega}{W_1\cos k_1 l} + \dfrac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Es lässt sich wie im §. 67 leicht nachweisen, dass die neutrale Axe mit der Axe der w einen Winkel φ bildet, für welchen

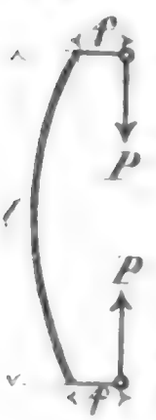
$$\tan\varphi = \frac{W g \cos kl}{W_1 f \cos k_1 l}$$

ist. Da nach §. 67 die Spannung in einer Parallelen zur neutralen Axe constant ist und die Spannung proportional der Entfernung von der neutralen Axe zunimmt, so wird die grösste Spannung in dem Punkte eintreten, in welchem eine Parallele zur neutralen Axe den Umfang des Querschnittes berührt. Beim Rechtecke ist dieser Punkt stets eine Ecke.

Diese Festigkeitsformeln haben den Nachtheil, dass sie sich nach Substitution der Werthe von k, k_1 weder auf die Tragkraft P, noch auf die Querschnittsdimensionen reduciren lassen, so dass man zur Auflösung eine der bekannten Näherungsmethoden anwenden muss.

Näherungsformeln. Bei kurzen Stäben oder wenn f, g gegen die Querschnittsdimensionen gross ist, kann man bei Bestimmung der Momente die Durchbiegung vernachlässigen, also $M = Pf$, $M_1 = Pg$ setzen, was auf dasselbe hinausläuft, als wenn man $kl = 0$, $k_1 l = 0$ also $\cos kl = \cos k_1 l = 1$ setzt. Die Festigkeitsbedingungen werden alsdann einfacher

Fig. 48.



$$48. \quad \begin{cases} K = P\left(\dfrac{f\nu}{W} + \dfrac{g\omega}{W_1} - \dfrac{1}{F}\right), \\ \mathfrak{K} = P\left(\dfrac{f\nu}{W} + \dfrac{g\omega}{W_1} + \dfrac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Die hier entwickelten Formeln lassen sich auch bei einfacher Durchbiegung auf den Fall eines an beiden Enden freien Stabes (Fig. 48) anwenden, indem man $\frac{1}{2}l$ für l setzt.

Beispiel: Beim Rechteck mit den Seiten b, h wird, wenn b, h bezüglich die Richtung der v, w haben. $W = \frac{1}{12} b h^2$. $W_1 = \frac{1}{12} b^2 h$. $F = b h$. $\nu = \frac{1}{2} h$, $\omega = \frac{1}{2} b$, mithin nach den Näherungsformeln

$$K, \mathfrak{K} = \frac{P}{F}\left(b\frac{f}{h} + b\frac{g}{b} \mp 1\right).$$

Für $g = 0$, $f = \frac{1}{2} h$, wenn also P in der Mitte der Seite b wirkt, wird $P = \frac{1}{2} K F$ oder $P = \frac{1}{4} \mathfrak{K} F$, also die Tragkraft nur bezüglich $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ der Zug- oder Druckfestigkeit. Wenn $f = \frac{1}{2} h$, $g = \frac{1}{2} b$ ist, wenn also P in einer Ecke wirkt, so wird sogar $P = \frac{1}{5} K F$ oder $P = \frac{1}{7} \mathfrak{K} F$.

Beim Kreise mit dem Durchmesser d ist $W = \frac{\pi}{64} d^4$, $F = \frac{\pi}{4} d^2$, also, wenn wir hier $g = 0$ setzen,

$$K, \mathfrak{K} = \frac{P}{F}\left(8\frac{f}{d} \mp 1\right).$$

Für $f = \frac{1}{2} d$ wird $P = \frac{1}{3} K F$ oder $P = \frac{1}{5} \mathfrak{K} F$. In Wirklichkeit ist der Durchbiegung wegen P noch kleiner, so dass die Excentricität der Kraft einen nicht unbedeutenden Einfluss auf die Beanspruchung ausübt.

§. 179. Empirische Formeln für die Knickfestigkeit.

Die entwickelten Formeln für die Knickfestigkeit sind natürlich nur dann anwendbar, wenn man die Lage des Angriffspunktes der Kraft genau kennt. In der Praxis ist dies aber nicht immer der Fall, weil sich die Lage des Angriffspunktes bei der Durchbiegung ändert, wobei seine Lage durch die meist nicht in Rechnung zu bringenden Verdrückungen der Stabenden und der anstossenden Theile, gegen welche sich der Stab stemmt, richtet. Man hat daher meist lieber empirische Formeln angewendet. Eine solche lässt sich in folgender Weise aufstellen.

Bei sehr langen Stäben ist die Excentricität f gegen die Abweichung η_0 nur klein, also in 43 (§. 177) $\frac{f}{f + \eta_0}$ so klein, dass wir für einen an beiden Enden freien Stab $P = \frac{4 E W}{l^2} \operatorname{Arccos}^2 0 = \frac{E W \pi^2}{l^2}$ oder allgemein bei n facher Sicherheit $P = \frac{1}{n} A \frac{E W}{l^2} = A \mathfrak{K} F \cdot \frac{E W}{l^2 \mathfrak{C} F}$ setzen können, worin $\mathfrak{C}$ den Festigkeitscoefficient, $\mathfrak{K}$ den Sicherheitscoefficient für Druck bedeutet und A ein von der Befestigung der Enden abhängender Coefficient ist. Bei sehr kurzen Stäben dagegen ist, vorausgesetzt, dass der Druck auf die Endfläche gleichmässig vertheilt wird. $P = \mathfrak{K} F$. Beide Formeln enthält aber der Ausdruck

$$49. \quad P = \mathfrak{K} F \frac{A E W}{\mathfrak{C} F l^2 + A E W},$$

da sich hiernach P dem Werthe $\mathfrak{K} F$ um so mehr nähert, je kleiner l ist, und dem Werthe $A \frac{E W}{l^2}$ um so mehr, je grösser l ist. A ist hierbei durch Versuche zu bestimmen. Hiernach erscheint P als ein gewisser Theil der Druckfestigkeit $\mathfrak{K} F$, der um so kleiner ist, je grösser die Länge l gegen die Querschnittsdimensionen ist.

Solche Versuche sind besonders, obwohl in noch ungenügendem Maasse, von Hodgkinson angestellt. Nach diesen Versuchen ist sehr nahe $A = 20$, wenn ebene Endflächen vorhanden sind. Die von Hodgkinson angegebenen empirischen Formeln sind nicht ganz rationell gebildet und weniger allgemein. Die Versuchsresultate stimmen aber mit der Formel 49 gut überein.

Das Verhältniss $\frac{E}{\mathfrak{C}}$ ist für Holz $= 230$, für Schmiedeeisen $= 560$ und für Gusseisen $= 130$ zu setzen.

Hiernach wird z. B. für eine quadratische hölzerne Säule mit der Dicke h, da $F = h^2$, $W = \frac{1}{12} h^4$ ist,

Digitized by Google

$$P = \mathfrak{R} F \frac{383\,h^2}{l^2 + 383\,h^2},$$

wonach sich für einige Verhältnisse von $\frac{l}{h}$ ergiebt:

$l =$	0	10	20	30	40	50	100	. h.
$P =$	1,000	0,793	0,489	0,299	0,193	0,133	0,037	. $\mathfrak{R}$ F.

§. 180. Gezogener Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist. Als Anfang der x wählen wir wieder das freie Ende A (Fig. 49). Nach 1 (§. 168) wird das Biegungsmoment

Fig. 49.

$$50.\quad M = -P(f + \eta_0 - \eta), \quad M_1 = P(g + \zeta_0 - \zeta).$$

Für die Durchbiegung in der Ebene der xy wird daher nach 2 (§. 168)

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -k^2(a + \eta_0 - \eta).$$

Die Integration giebt:

$$\eta = f + \eta_0 + A\,e^{kx} + B\,e^{-kx},$$

wenn l die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Für $x = 0$ wird $\eta = \eta_0$, daher $0 = f + A + B$. Für $x = l$ wird $\eta = 0$, also $0 = f + \eta_0 + A\,e^{kl} + B\,e^{-kl}$ und $\frac{d\eta}{dx} = 0$, mithin $0 = A\,e^{kl} - B\,e^{-kl}$. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$A = -\frac{f\,e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}}, \quad B = -\frac{f\,e^{kl}}{e^{kl} + e^{-kl}},$$

$$51.\quad \eta_0 = -f\frac{e^{kl} + e^{-kl} - 2}{e^{kl} + e^{-kl}},$$

daher wird

$$52.\quad \eta = -f\frac{e^{k(l-x)} + e^{-k(l-x)} - 2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Bei wachsendem P nähert sich e^{kl} der Grenze ∞, e^{-kl} der Grenze 0, daher η_0 der Grenze $-f$, so dass stets $\eta_0 < -f$ ist. Die Gleichung 51 gestattet eine Reduction auf P. Multiplicirt man nämlich mit $e^{kl} + e^{-kl}$ und sodann noch mit e^{kl}, so ergiebt sich

$$e^{2kl} - \frac{2f}{f + \eta_0} e^{kl} + 1 = 0,$$

$$e^{kl} = \frac{f + \sqrt{-\eta_0(2f + \eta_0)}}{f + \eta_0}.$$

Für die Wurzel ist das Zeichen + zu wählen, da sich sonst für $f = 0$ $e^{kl} = -1$ ergeben würde, während sich $kl = 0$, also $e^{kl} = +1$ ergeben muss. Reducirt man auf kl und setzt für k seinen Werth, so ergiebt sich

$$53.\quad P = \frac{E\,W}{l^2}\left(\text{lognat}\frac{f + \sqrt{-\eta_0(2a - \eta_0)}}{a + \eta_0}\right)^2.$$

Verwandelt man die Exponentialgrössen in 51 in Reihen, so ergiebt sich, wenn man für k seinen Werth setzt,

$$54.\quad \eta_0 = -\frac{P\,l^2 f}{2\,E\,W}\left[1 - \frac{5}{12}\frac{P\,l^2}{E\,W} + \frac{61}{360}\left(\frac{P\,l^2}{E\,W}\right)^2 - \,.\,+\,\cdots\right].$$

Digitized by Google

Wenn P senkrecht zur Axe des Stabes wirkte, so würde die Abweichung $\mathfrak{y}$ nach 4 (§. 94) $\mathfrak{y} = \frac{P l^3}{3 E W}$, mithin ist annähernd für kleine P $\eta_0 : \mathfrak{y} = 3 f : 2 l$.

§. 181. Beanspruchung. Substituirt man die Ausdrücke für η_0 und η in den Ausdruck 50 für M, so ergiebt sich

$$55. \quad M = -P f \frac{e^{k(1-x)} + e^{-k(1-x)}}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Ein analytisches Maximum hat M für x, welche zwischen 0 und l liegen, nicht. In Wirklichkeit wird M am grössten für $x = 0$, so dass $\max M = -P f$ ist. Daher ist die Festigkeitsbedingung

$$56. \quad \begin{cases} K = P\left(\frac{f a}{W} + \frac{1}{F}\right), \\ \mathfrak{K} = P\left(\frac{f a}{W} + \frac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Wenn g nicht $= 0$ ist, so wird die Festigkeitsbedingung nach dem im §. 178 Gesagten:

$$57. \quad \begin{cases} K = P\left(\frac{f \nu}{W} + \frac{g \omega}{W_1} + \frac{1}{F}\right), \\ \mathfrak{K} = P\left(\frac{f \nu}{W} + \frac{g \omega}{W_1} - \frac{1}{F}\right). \end{cases}$$

Als Beispiele können die in §. 178 angeführten Beispiele dienen, wenn man K und $\mathfrak{K}$ vertauscht. Anwendung bei Hängesäulen, Hängestangen u. s. w.

XX. Kapitel.

Gleichzeitige Belastung durch Axial- und Transversalkräfte.

§. 182. Formänderung im Allgemeinen. Wir wollen hier voraussetzen, dass die äusseren Axial- und Transversalkräfte in einer und derselben Ebene wirken, so dass in §. 168 $g = 0$ zu setzen ist. Ausserdem wollen wir die Rechnung nur für den Fall eines constanten Querschnittes durchführen. Die Differenzialgleichung der deformirten Axe ist alsdann

$$58. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E W}\left(1 \pm \frac{P}{E F}\right) = \frac{\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0 - \eta)}{E W}\left(1 \pm \frac{P}{E F}\right),$$

worin, um es nochmals zu erwähnen, $\mathfrak{M}$ das von den äusseren Transversalkräften erzeugte Moment bedeutet. Setzen wir zur Abkürzung

$$59. \quad k^2 = \frac{P}{E W}\left(1 \pm \frac{P}{E F}\right),$$

$$60. \quad f(x) = \frac{\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0)}{E W}\left(1 \pm \frac{P}{E F}\right),$$

Digitized by Google

worin k eine Constante und f(x) eine bekannte Funktion von x ist, so wird

$$61. \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} \mp k^2\eta = f(x).$$

Wenn P ziehend wirkt, so gilt das Vorzeichen — und das Integral ist alsdann bekanntlich

$$62. \quad \eta = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx} + \frac{1}{2k}\,e^{kx}\int f(x)\,e^{-kx}\,dx - \frac{1}{2k}\,e^{-kx}\int f(x)\,e^{kx}\,dx.$$

Wenn dagegen P drückend wirkt, so gilt das Vorzeichen + und das Integral ist alsdann

$$63. \quad \eta = A\cos kx + B\sin kx - \frac{\cos kx}{k}\int f(x)\sin kx\,dx + \frac{\sin kx}{k}\int f(x)\cos kx\,dx.$$

Die eine dieser beiden Formeln geht in die andere über, wenn man $k\sqrt{-1}$ für k setzt und sodann die bekannten Formeln zur Umwandlung der Exponentialgrössen und trigonometrischen Funktionen mit imaginären Variabelen, nämlich $e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$ und $\sin iy = -\frac{1}{2}i(e^y - e^{-y})$, $\cos iy = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$, worin $i = \sqrt{-1}$, anwendet.

Ist gleichmässige oder partielle Belastung vorhanden, so kann man einfacher zum Ziele gelangen. Nach 58 und 59 ist nämlich

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{k^2}{P}[\mathfrak{M} + P(f + \eta_0 - \eta)].$$

Die noch zweimalige Differenziation giebt, wenn wir $\frac{d^2\eta}{dx^2} = z$ setzen und beachten, dass nach 3 (§. 61) $\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2} = q$, d. i. gleich der gleichmässigen Last pro Längeneinheit, ist,

$$64. \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{k^2q}{P} \mp k^2z.$$

Wirkt P ziehend, so ist das Integral dieser Differenzialgleichung

$$z = A\,k^2e^{kx} + B\,k^2e^{-kx} - \frac{q}{P}.$$

Wirkt dagegen P drückend, so ist

$$z = A\,k^2\sin kx + B\,k^2\cos kx + \frac{q}{P}.$$

Setzen wir hierin $\frac{k^2}{P}[\mathfrak{M} \mp P(f + \eta_0 - \eta)]$ für z und reduciren auf η, so ergiebt sich, wenn P ziehend wirkt

$$65. \quad \eta = f + \eta_0 + A\,e^{kx} + B\,e^{-kx} - \frac{k^2\mathfrak{M} + q}{k^2P},$$

und wenn P drückend wirkt,

$$66. \quad \eta = f + \eta_0 - A\sin kx - B\cos kx + \frac{k^2\mathfrak{M} - q}{k^2P}.$$

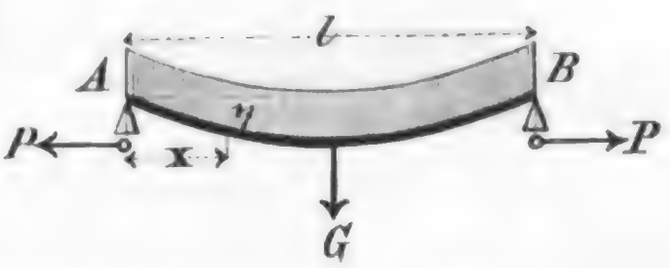
tized by Google

A. Die äussere Axialkraft wirkt ziehend.

§. 183. Der Stab liegt mit beiden Enden auf Stützen und ist in der Mitte und ausserdem gleichmässig belastet.

Fig. 50. Als Anfang der x wählen wir das eine Ende A. Die in der Mitte wirkende Last sei = G, der Stützendruck also $D = \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} q l$ und $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} q x^2 - D x = -\frac{1}{2} G x - \frac{1}{2} q x (l - x)$. Daher wird nach 65 (voriger §.), wenn man $\eta_0 = 0$ setzt,

Fig. 50.



$$\eta = f + A e^{kx} + B e^{-kx} + \frac{G x + q x (l - x)}{2 P} - \frac{E W q}{P^2}.$$

Für $x = 0$ wird $\eta = 0$ und für $x = \frac{1}{2} l$ wird $\frac{d\eta}{dx} = 0$. Bestimmt man durch diese Bedingungen A und B und setzt die erhaltenen Werthe in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$67.\quad \eta = \left(f - \frac{E W q}{P^2}\right)\left(1 - \frac{e^{\frac{1}{2} k (l - 2x)} + e^{-\frac{1}{2} k (l - 2x)}}{e^{\frac{1}{2} kl} + e^{-\frac{1}{2} kl}}\right) - \frac{G}{2 k P} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{\frac{1}{2} kl} + e^{-\frac{1}{2} kl}} + \frac{G x + q x (l - x)}{2 P}.$$

Die Senkung $\mathfrak{y}$ in der Mitte ist hiernach

$$68.\quad \mathfrak{y} = \left(f - \frac{E W q}{P^2}\right) \frac{e^{\frac{1}{2} kl} + e^{-\frac{1}{2} kl} - 2}{e^{\frac{1}{2} kl} + e^{-\frac{1}{2} kl}} - \frac{G}{2 k P} \frac{e^{kl} - 1}{e^{kl} + 1} + \frac{2 G l + q l^2}{8 P}.$$

Als Moment ergiebt sich durch die Gleichung $M = E W \frac{d^2\eta}{dx^2}$:

$$69.\quad M = \left(\frac{q}{k^2} - P f\right) \frac{e^{\frac{1}{2} k (l - 2x)} + e^{-\frac{1}{2} k (l - 2x)}}{e^{\frac{1}{2} kl} + e^{-\frac{1}{2} kl}} - \frac{G}{2 k} \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{e^{\frac{1}{2} kl} + e^{-\frac{1}{2} kl}} - \frac{q}{k^2}.$$

Hiernach wird M zum analytischen Maximum, d. i. $\frac{dM}{dx} = 0$ für

$$70.\quad x = \frac{1}{2 k} \operatorname{lognat} \frac{2 (P f k^2 - q) e^{\frac{1}{2} kl} - G k}{2 (P f k^2 - q) e^{-\frac{1}{2} kl} - G k}.$$

Wenn $G = 0$ ist, so wird hiernach M zum analytischen Maximum für $x = \frac{1}{2 k} \operatorname{lognat} e^{kl} = \frac{1}{2 k} . kl = \frac{1}{2} l$. Zum wirklichen Maximum kann M natürlich auch für $x = 0$ werden. Wenn nicht $G = 0$ ist, so wird M zum analytischen Maximum für einen zwischen 0 und $\frac{1}{2} l$ liegenden Werth von x oder für einen imaginären Werth von x. Zum wirklichen Maximum kann, wenn nicht $G = 0$ ist, auch für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2} l$ werden.

Digitized by Google

Bezeichnen wir die Werthe von M für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$ bezüglich mit M_0 und M_1, so ergiebt sich

$$71. \quad \begin{cases} M_0 = -Pf, \\ M_1 = -\frac{G}{2k} \cdot \frac{e^{kl} - 1}{e^{kl} + 1} + \left(\frac{q}{k^2} - Pf\right) \frac{2}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{q}{k^2}. \end{cases}$$

Für die Fälle, dass kl entweder sehr klein oder sehr gross ist, und welche in der Praxis häufig vorkommen, lassen sich einfachere Näherungsregeln entwickeln.

§. 184. Näherungsformeln für kleine kl. Ist kl d. i. $\sqrt{\frac{Pl^2}{EW}}$ sehr klein, so ergiebt sich durch Verwandlung der Exponentialgrössen der Formel 68 in unendliche Reihen leicht

$$72. \quad \eta = \frac{Gl^3}{48EW}\left(1 - \frac{1}{10}\frac{Pl^2}{EW} + \ldots\right) + \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EW}\left(1 - \frac{61}{600}\frac{Pl^2}{EW} + \ldots\right) - \frac{Pfl^2}{8EW}\left(1 - \frac{5}{12}\frac{Pl^2}{EW} + \ldots\right).$$

Für die Aufstellung der Festigkeitsregeln unterscheiden wir folgende beiden Fälle:

a) Es sei $G = 0$. Alsdann wird M zum Maximum für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}l$ und zwar wird nach 71:

$$73. \quad \begin{cases} M_0 = -Pf, \\ M_1 = -\frac{1}{8}ql^2\left(1 - \frac{5}{48}\frac{Pl^2}{EW} + .-..\right) - Pf\left(1 - \frac{1}{8}\frac{Pl^2}{EW} + .-..\right). \end{cases}$$

Ist f positiv, d. h. liegt der Angriffspunkt von P unter dem Schwerpunkte der Endfläche, so ist der absolute Werth von M_1 grösser, als der von M_0. Wenn aber f negativ ist, so kann auch der absolute Werth von M_0 grösser werden, als der von M_1 und zwar nahezu, wenn $16Pf > ql^2$ ist. Die Festigkeitsgleichungen sind hiernach leicht aufzustellen.

b) Es sei $q = 0$. Das x, für welches M zum Maximum wird, ist nach 70 < 0, wenn $Pfk(e^{\frac{1}{2}kl} - e^{-\frac{1}{2}kl}) < G$ ist, oder, da für kleine kl sehr nahe $e^{\frac{1}{2}kl} - e^{-\frac{1}{2}kl} = kl$ ist, $Pfk^2l < G$, d. i. nach Einsetzung des Werthes von k^2 $P^2fl < GEW$ oder $\frac{Gl}{Pf} > \frac{Pl^2}{EW}$ oder $> k^2l^2$. Da wir kl als sehr klein voraussetzen, so wird diese Bedingung stets erfüllt sein. M wird daher nur für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$ zum Maximum und zwar wird nach 72

$$74. \quad \begin{cases} M_0 = -Pf, \\ M_1 = -\frac{1}{4}Gl\left(1 - \frac{1}{12}\frac{Pl^2}{EW} + .-..\right) - Pf\left(1 - \frac{1}{8}\frac{Pl^2}{EW} + .-..\right). \end{cases}$$

Der absolute Werth von M_0 wird nur grösser, als der von M_1, wenn f negativ und ausserdem nahezu $8Pf > Gl$ ist.

Anwendung bei Ankern, Balken, die einem Zuge ausgesetzt sind, Gitterstäben u. s. w.

tized by Google

§. 185. Näherungsformeln für grosse kl. Ist kl sehr gross, so können wir $e^{-\frac{1}{2}kl}$ und $e^{-kl} = 0$ setzen. Alsdann aber wird nach 68:

$$75.\quad \eta = f + \frac{G}{4P}\left(l - 2\sqrt{\frac{EW}{P}}\right) + \frac{q}{8P}\left(l^2 - 8\,\frac{EW}{P}\right).$$

Für die Festigkeit unterscheiden wir wieder folgende Fälle:

a) Es sei $G = 0$. Alsdann wird M zum Maximum für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}l$ und zwar ist nach 71:

$$76.\quad M_0 = -Pf, \quad M_1 = -\frac{q}{k^2} = -\frac{EWq}{P}.$$

Hiernach wird, M_0 und M_1 absolut genommen, $M_0 > M_1$, wenn $P^2 f > EWq$ ist. Bei kleinem f wird $M_1 > M_0$. In diesem Falle wird die Festigkeitsbedingung, wenn wir nur eine Trennung durch Zerreissen voraussetzen, was wegen des grossen P stets eintreten wird,

$$77.\quad K = \frac{Eqa}{P} + \frac{P}{F},$$

$$78.\quad q = P\,.\,\frac{KF - P}{EFa}.$$

Die Länge des Stabes ist also ganz ohne Einfluss. Bei variabelem P wird q zum Maximum, wenn

$$P = \tfrac{1}{2}KF,$$

d. h. wenn die Axialkraft die Hälfte der Zugfestigkeit ist.

b) Es sei $q = 0$. Nach 70 wird M zum analytischen Maximum annähernd für

$$79.\quad x = \frac{1}{2k}\ \text{lognat}\ \frac{2Pfk - G}{G}\,e^{\frac{1}{2}kl}.$$

Für kleine f wird x imaginär, also M zum Maximum für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}l$ und zwar ist nach 72:

$$80.\quad M_0 = -Pf, \quad M_1 = -\frac{G}{2k} = -\frac{G}{2}\sqrt{\frac{EW}{P}}.$$

Es wird, M_0 und M_1 absolut genommen, $M_0 > M_1$, wenn $4P^3f^2 > EWG^2$. Bei kleinem f wird $M_1 > M_0$ und alsdann wird die Festigkeitsbedingung, wiederum nur eine Trennung durch Zerreissen vorausgesetzt,

$$81.\quad K = \frac{Ga}{2}\sqrt{\frac{E}{PW}} + \frac{P}{F},$$

$$82.\quad G = 2\sqrt{\frac{PW}{P}}\,\frac{KF - P}{Fa}.$$

Bei variabelem P wird G zum Maximum für

$$P = \tfrac{1}{3}KF.$$

Die Länge des Stabes ist auch hier ohne Einfluss.

Anwendung vorzüglich bei Zug- oder Spannstangen, Ankern, Schliessen etc. Setzen wir z. B. eine Spannstange mit kreisförmigem Querschnitte voraus und

Digitized by Google

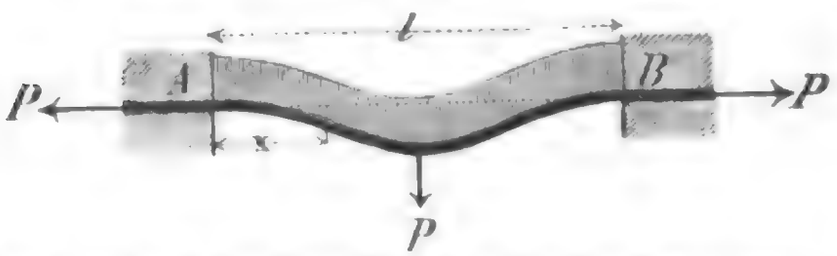
bezeichnen die Dicke mit d, das Eigengewicht der Volumeinheit mit γ, so ist $F = \frac{\pi}{4} d^4$, $W = \frac{\pi}{64} d^4$, $q = F\gamma = \frac{\pi}{4} \gamma d^2$, mithin nach 78:

$$\frac{E \gamma \pi}{8 P} d^3 - K d^2 - \frac{4 P}{\pi} = 0;$$

aus welcher Gleichung sich d durch eine der bekannten Näherungsregeln bestimmen lässt.

§. 186. Stab mit eingespannten Enden, welcher in der Mitte und ausserdem gleichmässig belastet ist. (Fig. 51).

Fig. 51.



Wir denken uns den Stab in einem Querschnitte dicht an der Einspannung durchschnitten und bringen für das abgeschnittene in der Einspannung steckende Stück die auf die Schnittfläche wirkenden Spannungen an. Die horizontale Resultante derselben ist gleich der Axialkraft P; der Abstand der Resultante von der Axe der x sei f. Die Verticalcomponente dieser Spannungen ist $= \frac{1}{2}(g + q\,l)$. Wir können daher die für den vorigen Fall entwickelten Formeln direkt anwenden, wenn wir nur f so bestimmen, dass für $x = 0$ und $x = l$ $\frac{d\eta}{dx} = 0$ wird, eine horizontale Einspannung vorausgesetzt. Nach Gleichung 67 (§. 183) ergiebt sich, wenn wir $\frac{d\eta}{dx} = 0$ für $x = 0$ setzen und auf f reduciren,

$$83. \quad f = \frac{E W q}{P^2} - \frac{G}{2 K P} \frac{e^{\frac{1}{2} kl} - 1}{e^{\frac{1}{2} kl} + 1} - \frac{q l}{2 K P} \frac{e^{kl} + 1}{e^{kl} - 1}.$$

Dies in 68 eingesetzt, giebt nach gehöriger Reduction als Abweichung in der Mitte des Stabes

$$84. \quad \eta = \frac{2 G + q l}{2 K P} \left(\frac{k l}{4} - \frac{e^{\frac{1}{2} kl} - 1}{e^{\frac{1}{2} kl} + 1} \right).$$

Hiernach erzeugt eine in der Mitte wirkende isolirte Last eine doppelt so grosse Senkung, als eine gleich grosse gleichmässige Belastung.

Setzt man den Werth für f in den Ausdruck 69, so ergiebt sich als Moment nach gehöriger Reduction:

$$85. \quad M = \frac{G}{2 k} \frac{e^{\frac{1}{2} k (l-2)} - e^{kx}}{e^{\frac{1}{2} kl} + 1} + \frac{q l}{2 k} \frac{e^{\frac{1}{2} k (l-2x)} + e^{-\frac{1}{2} k (l-2x)}}{e^{\frac{1}{2} kl} - e^{-\frac{1}{2} kl}} - \frac{q}{k^2}.$$

Differenziirt man nach x und setzt den Differenzialquotienten gleich Null, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction, dass M zum Maximum wird für

$$86. \quad x = \frac{1}{2 k} \text{ lognat } \frac{q l e^{kl} - G e^{\frac{1}{2} kl} (e^{\frac{1}{2} kl} - 1)}{q l + G (e^{\frac{1}{2} kl} - 1)}.$$

igitized by Google

Wenn $G = 0$ ist, so wird hiernach $x = \frac{1}{2k} \operatorname{lognat} e^{kl} = \frac{1}{2k} kl = \frac{1}{2} l$.

Wenn $q = 0$ ist, so wird $x = \frac{1}{2k} \operatorname{lognat} (-e^{\frac{1}{2}kl}) = \frac{1}{4} l + \operatorname{lognat} \sqrt{-1}$, d. i. imaginär. Zum wirklichen Maximum wird daher M in jedem dieser beiden Fälle für $x = 0$ und $x = l$. Bezeichnen wir die betreffenden Werthe von M wieder mit M_0, M_1, so wird

$$87. \quad \begin{cases} M_0 = \frac{G}{2k} \frac{e^{\frac{1}{2}kl} - 1}{e^{\frac{1}{2}kl} + 1} - \frac{ql}{2k} \frac{e^{kl} + 1}{e^{kl} - 1} - \frac{q}{k^2}, \\ M_1 = -\frac{G}{2k} \frac{e^{\frac{1}{2}kl} - 1}{e^{\frac{1}{2}kl} + 1} + \frac{ql}{2k} \frac{2}{e^{\frac{1}{2}kl} + e^{-\frac{1}{2}kl}} - \frac{q}{k^2}. \end{cases}$$

Wenn keine gleichmässige Belastung vorhanden ist, so wird hiernach $M_0 = -M_1$.

Wir wollen nun wiederum für die beiden Fälle, dass kl entweder klein oder gross ist, Näherungsformeln ermitteln.

§. 187. Näherungsformeln für kleine kl. Durch Reihenverwandlung des Ausdruckes 84 ergiebt sich als Senkung in der Mitte

$$88. \quad \eta = \frac{(2G + ql) l^3}{384 EW} \left(1 - \frac{Pl^2}{40 EW} + \frac{17 P^2 l^4}{26880 EW} - \ldots\right).$$

Die Reihenverwandlung von 87 giebt als grösste Momente

$$89. \quad \begin{cases} M_0 = +\frac{Gl}{8} \left(1 - \frac{Pl^2}{16 EW} + \ldots\right) + \frac{ql^2}{12} \left(1 - \frac{Pl^2}{60 EW} + \ldots\right), \\ M_1 = -\frac{Gl}{8} \left(1 - \frac{Pl^2}{16 EW} + \ldots\right) - \frac{ql^2}{24} \left(1 - \frac{7 Pl^2}{240 EW} + \ldots\right), \end{cases}$$

wonach sich nun leicht die Festigkeitsbedingungen aufstellen lassen. Im Allgemeinen ist stets $M_0 > -M_1$; nur wenn $q = 0$ ist, so wird $M_0 = -M_1$.

§. 188. Näherungsformeln für grosse kl. Für sehr grosse kl wird sehr nahe $e^{\frac{1}{2}kl} - 1 = e^{\frac{1}{2}kl} + 1$, daher ist nach 84 die Senkung in der Mitte annähernd

$$\eta = \frac{2G + ql}{2KP} \left(\frac{kl}{4} - 1\right),$$

oder nach Einsetzung des Werthes von k

$$90. \quad \eta = \frac{(2G + ql) l}{8P} \left(1 - 4\sqrt{\frac{EW}{Pl^2}}\right).$$

Als grösste Momente ergeben sich nach 87 annähernd

$$91. \quad \begin{cases} M_0 = \frac{G + ql}{2k} - \frac{q}{k^2} = \frac{G + ql}{2} \sqrt{\frac{EW}{P}} - \frac{EWq}{P}, \\ M_1 = -\frac{G}{2k} - \frac{q}{k^2} = -\frac{G}{2} \sqrt{\frac{EW}{P}} - \frac{EWq}{P}. \end{cases}$$

Ist nur eine isolirte Last vorhanden, so wird

Digitized by Google

$$92.\quad M_0 = -M_1 = \frac{G_0'}{2}\sqrt{\frac{EW}{P}}.$$

Eben so gross ergab sich in 80 (§. 185) das grösste Moment für einen an den Enden nur auf Stützen ruhenden Stab, so dass hier durch die Einspannung nichts gewonnen wird.

Wenn eine isolirte Last nicht vorhanden ist, so wird

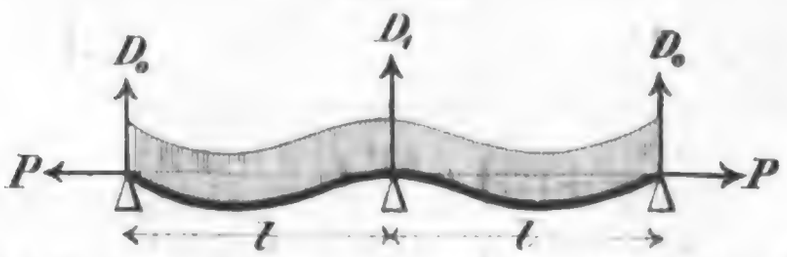
$$93.\quad M_0 = \frac{ql}{2}\sqrt{\frac{EW}{P}} - \frac{EWq}{P},\quad M_1 = -\frac{EWq}{P}.$$

Hiernach wird $M_0 > -M_1$, wenn $Pl^2 > 4EW$ oder $k^2l^2 > 4$, d. i. $kl > 2$ ist. Da wir aber kl als sehr gross voranssetzen, so ist diese Bedingung erfüllt, also $M_0 > -M_1$. Nach 80 (§. 185) ist M_1 ebenso gross, als das grösste Moment, wenn keine Einspannung vorhanden ist (für kleine f). Daher ist das grösste Moment bei eingespannten Enden grösser, als bei nicht eingespannten.

§. 189. Continuirlicher Stab mit zwei gleichen Feldern.

Die in §. 183 entwickelten Formeln behalten auch ihre Giltigkeit, wenn der gleichmässig belastete Stab auf drei gleich weit von einander abstehenden Stützen liegt (Figur 52), nur ist alsdann für G der negative Stützendruck D_1 auf die mittlere Stütze und für l die Entfernung 2 l der äusseren Stützen zu setzen. Der Stützendruck D_1 bestimmt sich dabei durch die Bedingung, dass $\eta = 0$ wird, wenn wir eine gleiche Höhenlage aller drei Stützen voraussetzen. Wenn wir nur den Fall voraussetzen, dass $f = 0$ ist, so ergiebt sich aus 68 (§. 183), wenn wir $f = 0$, $\eta = 0$, $G = -D_1$ und 2 l für l setzen,

Fig. 52.



$$94.\quad D_1 = \frac{q}{k}\,\frac{2\,(e^{kl} + e^{-kl} - 2) - k^2l^2\,(e^{kl} + e^{-kl})}{e^{kl} - e^{-kl} - kl\,(e^{kl} + e^{-kl})}.$$

Für kleine kl ergiebt sich durch Reihenverwandlung

$$95.\quad D_1 = \frac{5}{4}\,ql\left(1 - \frac{Pl^2}{150\,EW} + \ldots\right)$$

und für grosse kl, wenn wir annähernd $e^{-kl} = 0$ setzen, und 2 gegen e^{kl} vernachlässigen,

$$96.\quad D_1 = \frac{q}{k}\,\frac{k^2l^2 - 2}{kl - 1} = \frac{q}{P}\,\frac{Pl^2 - 2EW}{\sqrt{Pl^2} - \sqrt{EW}}.$$

Eine weitere Behandlung ist nach §. 183—184 leicht möglich.

B. Die Axialkraft wirkt drückend.

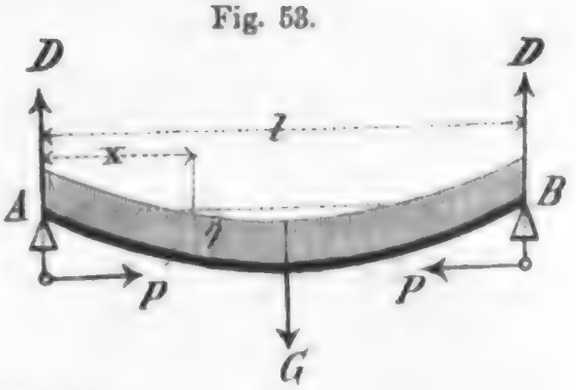
§. 190. Allgemeines. Die unter A entwickelten Formeln gelten natürlich auch für eine drückend wirkende Axialkraft, wenn man — P für P, also $k\sqrt{-1}$ für k setzt. Die Exponentialgrössen mit imaginären

gitized by Google

Variabelen sind alsdann nach §. 182 in trigonometrische Funktionen mit reellen Variabelen zu verwandeln. Die Näherungsregeln für ein kleines kl können hier bei Vertauschung von P mit — P direkt angewendet werden. Die Näherungsformeln für ein grosses kl haben aber hier keine Giltigkeit, da für kleinere P, als dasjenige, welches ein Zerknicken herbeiführt, kl nicht als sehr gross angenommen werden kann.

§. 191. Stab, welcher gleichmässig und ausserdem in der Mitte belastet ist und mit den Enden auf Stützen liegt. (Fig. 53). Setzen wir in dem Ausdrucke 67 (§. 183) ik für k (wobei $i = \sqrt{-1}$) und sodann $e^{iy} + e^{-iy} = 2\cos y$, $e^{iy} - e^{-iy} = 2i\sin y$, so ergiebt sich als Abweichung

Fig. 53.



$$97.\quad \eta = \left(\frac{E\,W\,q}{P^2} - f\right)\left(\frac{\cos k(\tfrac{1}{2}l - x)}{\cos \tfrac{1}{2}kl} - 1\right) + \frac{G}{2\,k\,P}\,\frac{\sin kx}{\cos \tfrac{1}{2}kl} - \frac{G\,x + q\,x\,(l-x)}{2\,P}.$$

Hiernach ist die Senkung η in der Mitte

$$98.\quad \eta = \left(\frac{E\,W\,q}{P^2} - f\right)(\sec \tfrac{1}{2}kl - 1) + \frac{G}{2\,k\,P}\tan \tfrac{1}{2}kl - \frac{(2\,G + q\,l)\,l}{8\,P}.$$

Als Moment ergiebt sich

$$99.\quad M = E\,W\,\frac{d^2\eta}{dx^2} = \left(P\,f - \frac{q}{k^2}\right)\frac{\cos k(\tfrac{1}{2}l - x)}{\cos \tfrac{1}{2}kl} - \frac{G}{2\,k}\,\frac{\sin kx}{\cos \tfrac{1}{2}kl} + \frac{q}{k^2}.$$

Ist $kl = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, so wird $\eta = \infty$, $M = \infty$. Alsdann kann kein Gleichgewicht bestehen, d. h. der Stab zerbricht.

Unter der Voraussetzung, dass $f = 0$ ist, wollen wir folgende specielle Fälle untersuchen.

§. 192. Belastung durch eine isolirte Last. Wenn nur die isolirte Last G vorhanden, also $q = 0$ ist, so wird nach 97 und 99:

$$100.\quad \eta = \frac{G\,l}{2\,P}\left(\frac{\sin kx}{kl\cos \tfrac{1}{2}kl} - \frac{x}{l}\right),$$

$$101.\quad M = -\frac{G}{2\,k}\,\frac{\sin kx}{\cos \tfrac{1}{2}kl}.$$

Wendepunkte finden statt für $M = 0$, d. i. $\sin kx = 0$ oder $kx = n\pi$, wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Da $x < \tfrac{1}{2}l$ sein muss, so finden auf der einen Seite 1, 2, 3, ... im Ganzen also 2, 4, 6, ... Wendepunkte statt, je nachdem kl bezüglich zwischen 0 und 2π, 2π und 4π, 4π und 6π u. s. w. liegt.

M wird zum Maximum für $\cos kx = 0$, also für $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ Ausserdem kann M noch zum Maximum für $x = \tfrac{1}{2}l$ werden, da sich hier

Digitized by Google

das Gesetz von M ändert. Ist $kl < \pi$, so wird schon für $kx = \frac{\pi}{2}$ $x > \frac{1}{2}l$, so dass in diesem Falle M nur für $x = \frac{1}{2}l$ zum Maximum wird. Für $x = \frac{1}{2}l$ aber wird das Moment

$$102. \quad M_0 = -\frac{G}{2k} \tan \tfrac{1}{2} kl.$$

Hiernach wird M_0 negativ, der Stab in der Mitte also nach unten gekrümmt, wenn kl zwischen 0 und π, zwischen 2π und 3π, zwischen 4π und 5π u. s. f. liegt; positiv dagegen, der Stab in der Mitte also nach oben gekrümmt, in allen übrigen Fällen.

Die Ausbiegung η in der Mitte wird nach 98:

$$103. \quad \eta = \frac{Gl}{4P}\left(\frac{\tan \frac{1}{2} kl}{\frac{1}{2} kl} - 1\right).$$

Auf Taf. VIII ist in Fig. 9 die elastische Linie für die vier Fälle a) $kl = 2{,}616$, b) $kl = 3{,}840$, c) $kl = 9{,}250$, d) $kl = 9{,}600$ dargestellt.

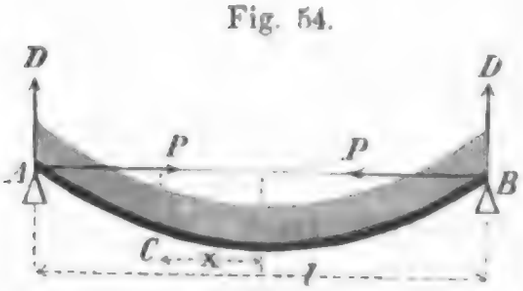
Wenn kl sehr gross ist, jedoch sich nicht in der Nähe derjenigen Werthe befindet, für welche $\cos \frac{1}{2} kl = 0$ wird, so ist in 100 das erste Glied gegen das zweite sehr klein, also nahezu $\eta = -\frac{Gx}{2P}$, die elastische Linie also eine Gerade (Taf. VIII Fig. 9, e).

§. 193. Gleichmässige Belastung. Wenn nur die gleichmässige Belastung vorhanden ist (Fig. 54), so wird nach 97 und 99:

$$104. \quad \eta = \frac{q}{k^2 P}\left[\frac{\cos k(\frac{1}{2}l - x)}{\cos \frac{1}{2} kl} - 1\right] - \frac{qx(l-x)}{2P},$$

$$105. \quad M = \frac{q}{k^2}\left[1 - \frac{\cos k(\frac{1}{2}l - x)}{\cos \frac{1}{2} kl}\right].$$

Fig. 54.



Wendepunkte finden statt für $\cos \frac{1}{2} kl = \cos k(\frac{1}{2}l - x)$, d. i. für $k(\frac{1}{2}l - x) = \frac{1}{2} kl - 2n\pi$ oder $k(\frac{1}{2}l - x) = -\frac{1}{2} kl + 2(n+1)\pi$, wenn n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, d. i. für

$$kx = 2n\pi \text{ und } kx = kl - 2(n+1)\pi,$$

worin n nur positiv zu nehmen ist, da kx nicht negativ und nicht $> kl$ sein kann. Es ergeben sich zwei Wendepunkte (für $x = 0$ und $x = l$), wenn $kl < 2\pi$, 4 Wendepunkte $\left(x = 0,\ x = \frac{2\pi}{k},\ x = l - \frac{2\pi}{k},\ x = l\right)$, wenn $2\pi < kl < 4\pi$ ist u. s. f.

Zum Maximum wird M für $\sin k(\frac{1}{2}l - x) = 0$, d. i. für $k(\frac{1}{2}l - x) = n\pi$ oder $kx = \frac{1}{2} kl - n\pi$, wobei n positiv oder negativ zu nehmen ist. Ist $kl < 2\pi$, so wird M nur für $x = \frac{1}{2}l$ zum Maximum. Für $x = \frac{1}{2}$ wird aber das Moment

$$106. \quad M_0 = -\frac{q}{k^2}(\sec \tfrac{1}{2} kl - 1).$$

M_0 ist negativ, wenn kl zwischen 0 und π, zwischen 3π und 5π, zwischen 7π und 9π liegt u. s. f., positiv in allen übrigen Fällen.

Die Ausbiegung η in der Mitte wird nach 98

Digitized by Google

$$107. \quad \eta = \frac{q}{k^3 P}\left(\sec\tfrac{1}{2}kl - 1 - \tfrac{1}{8}k^2l^2\right).$$

Auf Taf. VIII ist in Fig. 10 die elastische Linie für die Fälle a) $kl = 2{,}616$, b) $kl = 4{,}364$, c) $kl = 9{,}250$, d) $kl = 9{,}494$ dargestellt.

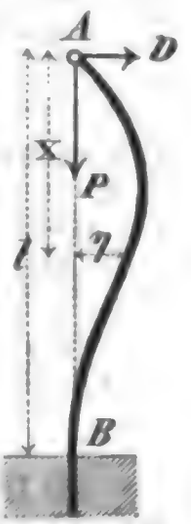
Wenn kl sehr gross ist, jedoch sich nicht in der Nähe der Werthe befindet, für welche $\cos\frac{1}{2}kl = 0$ ist, so ist in 104 das erste Glied sehr klein, also sehr nahe $\eta = -\frac{q\,x\,(l-x)}{2P}$, die elastische Linie also eine Parabel (Taf. VIII Fig. 10, e).

Anwendung bei Berechnung der Riegel von Schleussenthoren u. s. w.

§. 194. Stab, welcher an einem Ende eingespannt ist und dessen anderes nur axial belastetes Ende geführt wird.

(Fig. 55). Das eine Ende B sei eingespannt; das andere Ende A, auf welches nur eine Kraft P in axialer Richtung geübt wird, könne sich zwischen Führungen nur in axialer Richtung bewegen. Da das Ende A in Folge der Kraft P das Bestreben hat, sich in transversaler Richtung zu verrücken, so üben die Führungen auf dieses Ende einen Druck D in transversaler Richtung aus. Wir setzen voraus, dass P im Schwerpunkte der Endfläche A wirke, dass also $f = 0$ sei.

Fig. 55.



Nach 66 (§. 182) wird, da hier das Moment $\mathfrak{M}$ der äusseren Transversalkräfte $= Dx$ zu setzen ist, $\eta = -A\sin kx - B\cos kx + \frac{D}{P}x$. Da für $x = 0$ auch $\eta = 0$ werden muss, so ist $B = 0$, also

$$\eta = -A\sin kx + \frac{D}{P}x.$$

Für $x = l$ wird ebenfalls $\eta = 0$; daher wird $A = \frac{Dl}{P\sin kl}$, mithin

$$108. \quad \eta = \frac{Dl}{P}\left(\frac{x}{l} - \frac{\sin kx}{\sin kl}\right),$$

$$109. \quad \frac{d\eta}{dx} = \frac{D}{P}\left(\frac{kl\cos kx}{\sin kl} - 1\right).$$

Für $x = l$ muss $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden, mithin

$$110. \quad \tan kl = kl.$$

Hieraus ergiebt sich durch Auflösung nach einer der bekannten Näherungsmethoden für transcendente Gleichungen

$kl = 0$,
$kl = 257^0\,27'\,12'' = 4{,}4934$
$kl = 442^0\,37'\,28'' = 7{,}7252$
$kl = 624^0\,45'\,37'' = 10{,}9042$ u. s. w.

Hat P nicht einen der hierdurch bestimmten Werthe, so ist Gleichgewicht nicht möglich. Das Verhältniss $\frac{D}{P}$ bleibt ganz unbestimmt; es wird nur bestimmt, wenn man für ein bestimmtes x einen bestimmten Werth von η annimmt. Daher kann η jede mögliche Grösse annehmen und also auch so gross werden, dass der Stab zerbricht. Durch die Gleichung 110 ist

Digitized by Google

daher die Tragkraft bestimmt. Für den einfachsten Fall (ausser $kl = 0$) ist $kl = 4{,}4934$ oder, wenn wir $k^2 = \frac{P}{EW}$ setzen,

$$111. \quad P = 20{,}191 \frac{EW}{l^2}.$$

Hiernach ist die Tragkraft 8,183mal so gross, als wenn das obere Ende A ganz frei ist (§. 171).

Für die Wendepunkte der deformirten Axe wird $\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$, d. i. $\sin kx = 0$, also

$$112. \quad x = \frac{n\pi}{k}.$$

Hiernach wird für $kl = 4{,}439$ $x = 0{,}708\, n\, l$, also $x = 0$, $x = 0{,}708\, l$; für $kl = 7{,}725$ $x = 0{,}407\, n\, l$, also $x = 0$, $x = 0{,}407\, l$, $x = 0{,}814\, l$ u. s. f.

Für die Maximal- und Minimalpunkte wird nach 111 $kl \cos kx = \sin kl$ oder nach 112 $\tan kl \cos kx = \sin kl$, d. i. $\cos kx = \cos kl$, mithin $kl = kx + 2n\pi$ oder $kl = 2(n+1)\pi - kx$ also

$$113. \quad x = l - \frac{2n\pi}{k} \text{ und } x = \frac{2(n+1)\pi}{k} - l.$$

Z. B. wird für $kl = 4{,}493$ $x = l - 1{,}416\, n\, l$ und $x = 1{,}416\,(n+1)\,l - l$, d. i. $x = 0{,}416\, l$ und $x = l$; für $kl = 7{,}725$ $x = l - 0{,}814\, n\, l$ und $x = 0{,}814\,(n+1)\,l - l$, d. i. $x = 0{,}186\, l$, $x = 0{,}628\, l$ und $x = l$ u. s. f.

Auf Taf. VIII ist in Fig. 8 die elastische Linie für $kl = 4{,}439$, $kl = 7{,}725$, $kl = 10{,}904$ dargestellt.

Anwendung bei eingerammten Pfählen, welche oben festgehalten sind, z. B. bei Brückenjochen, u. s. w.

C. Anhang.

§. 195. Stetige Belastung, welche proportional der Abweichung η ist. Wegen der Aehnlichkeit in der Behandlungsweise behandeln wir hier noch einen Fall, bei welchem nur äussere Transversalkräfte auftreten, welche aber durch die Formänderung bedingt sind. Ein prismatischer Stab ruhe nämlich auf einer elastischen horizontalen Unterlage und sei an einzelnen Punkten durch isolirte Lasten belastet. Die Eindrückung η an einem beliebigen Punkte D (Fig. 56) sei dem hier wirksamen Drucke q pro Längeneinheit proportional, so dass wir

$$q = \varkappa \eta$$

setzen können. Der Druck, welchen der Stab in D von der Unterlage pro Längeneinheit empfängt, ist $-q$, wenn wir, wie früher, abwärts gerichtete Kräfte als positiv ansehen. Nach 46 (Seite 64) ist daher die Differenzialgleichung der deformirten Axe

$$EW \frac{d^4\eta}{dx^4} = -q = -\varkappa\eta,$$

oder

$$114. \quad \frac{d^4\eta}{dx^4} = -4k^4\eta,$$

wenn wir zur Abkürzung $k = \sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4EW}}$ setzen. Das Integral dieser Differenzialgleichung ist

$$115. \quad \eta = A e^{ax} + B e^{bx} + C e^{cx} + D e^{dx}$$

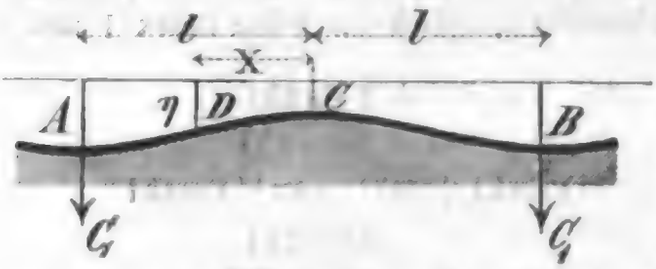
Digitized by Google

wenn a, b, c, d die Wurzeln der biquadratischen Gleichung $x^4 = -4k^4$ bedeuten. Dieselben sind aber, wenn wir zur Abkürzung $\sqrt{-1} = i$ setzen,

$$a = k(1+i), \quad c = -k(1+i) = -a,$$
$$b = k(1-i), \quad d = -k(1-i) = -b.$$

Wir wollen nun beispielsweise voraussetzen, dass alle isolirte Lasten gleich gross und zwar $= G$ seien und einen gleichen Abstand $2l$ haben. Die elastische Linie muss alsdann in Beziehung auf den Punkt C, welcher in der Mitte zwischen zwei Lasten liegt, symmetrisch sein. Wir wählen diesen Punkt C als Anfang der x. Für gleiche positive und negative Werthe von x muss alsdann η denselben Werth erhalten, was nur möglich ist, wenn $A = C$, $B = D$ ist. Daher wird

Fig. 56.



$$\eta = A(e^{ax} + e^{-ax}) + B(e^{bx} + e^{-bx}).$$

Setzen wir für a, b obige Werthe, beachten, dass $e^{x \pm iy} = e^x(\cos y \pm i \sin y)$ ist und setzen $A + B = U$, $i(A - B) = V$, so ergiebt sich

116. $$\eta = U(e^{kx} + e^{-kx})\cos kx + V(e^{kx} + e^{-kx})\sin kx.$$

Für $x = l$ muss $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden, d. i.

a. $$0 = (U+V)(e^{kl} - e^{-kl})\cos kl - (U-V)e^{kl} + (e^{-kl})\sin kl.$$

Ferner ist

$$G = \int_{-l}^{+l} q\,dx = 2\int_0^l q\,dx = 2\varkappa \int_0^l \eta\,dx$$

$$= -\frac{\varkappa}{2k^4}\int_0^l \frac{d^4\eta}{dx^4}\,dx = -\frac{\varkappa}{2k^4}\frac{d^3\eta}{dx^3}\,(\text{für } x = l), \text{ d. i.}$$

b. $$\frac{Gk}{\varkappa} = (U-V)(e^{kl} - e^{-kl})\cos kl + (U+V)(e^{kl} + e^{-kl})\sin kl.$$

Setzen wir zur Abkürzung $(e^{kl} + e^{-kl})\sin kl = s$, $(e^{kl} - e^{-kl})\cos kl = \partial$, so wird nach a. und b:

$$\begin{cases} (U+V)\partial - (U-V)s = 0, \\ (U+V)s + (U-V)\partial = \frac{Gk}{\varkappa}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich leicht

117. $$U = \frac{Gk}{2\varkappa}\frac{s+\partial}{s^2+\partial^2}, \quad V = \frac{Gk}{2\varkappa}\frac{s-\partial}{s^2+\partial^2},$$

wobei nach obigen Werthen von s und ∂ $s^2 + \partial^2 = e^{2kl} + e^{-2kl} - 2\cos 2kl$ wird. Setzt man die Werthe von U und V in den Ausdruck von η ein, so lässt sich der erhaltene Ausdruck leicht auf folgende Form bringen, worin $Al = l - x = \xi$, $Bl = l + x = \zeta$ gesetzt ist: 118:

$$\eta = \frac{Gk}{2\varkappa}\frac{(e^{k\xi} + e^{-k\xi})\sin k\xi + (e^{k\zeta} + e^{-k\zeta})\sin k\zeta + (e^{k\zeta} - e^{-k\zeta})\cos k\xi + (e^{k\xi} - e^{-k\xi})\cos k\zeta}{e^{2kl} + e^{-2kl} - 2\cos 2kl}.$$

Digitized by Google

Als Biegungsmoment M ergiebt sich nach der Formel $M = E W \frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{\varkappa}{k^4}\frac{d^2\eta}{dx^2}$: 119:

$$M = \frac{G}{k}\,\frac{(e^{k\zeta}+e^{-k\zeta})\sin k\xi + (e^{k\xi}+e^{-k\xi})\sin k\zeta - (e^{k\zeta}-e^{-k\zeta})\cos k\xi - (e^{k\xi}-e^{-k\xi})\cos k\zeta}{e^{2kl}+e^{-2kl}-2\cos 2kl}$$

Am grössten wird η, also auch q und ebenso M für $x = l$ oder für $\xi = 0$, $\zeta = 2l$. Am kleinsten wird η und q für $x = 0$ oder für $\xi = \zeta = l$. Bezeichnen wir die betreffenden Werthe bezüglich durch den Index 1 und 0, so ergiebt sich

$$120.\quad q_1 = \frac{Gk}{2}\,\frac{e^{2kl}-e^{-2kl}+2\sin 2kl}{e^{2kl}+e^{-2kl}-2\cos 2kl},$$

$$121.\quad q_0 = Gk\,\frac{(e^{kl}+e^{-kl})\sin kl + (e^{kl}-e^{-kl})\cos kl}{e^{2kl}+e^{-2kl}-2\cos 2kl},$$

$$122.\quad M_1 = -\frac{G}{k}\,\frac{e^{2kl}-e^{-2kl}-2\sin 2kl}{e^{2kl}+e^{-2kl}-2\cos 2kl}.$$

Näherungsformeln. Für kleine Werthe von kl ergiebt sich durch Verwandlung der Ausdrücke 121 und 123 in Reihen:

$$123.\quad q_1 = \frac{G}{2l}\left(1 + \frac{1}{720}\,\frac{\varkappa l^4}{E W} + \ldots\right),$$

$$124.\quad M_1 = \frac{2}{3}Gl\left(1 - \frac{1}{2520}\,\frac{\varkappa l^4}{E W} + \ldots\right),$$

so dass sich mit zunehmendem W q_1, M_1 den Grenzen $\frac{G}{2l}$, $\frac{2}{3}Gl$ nähern. Für grosse Werthe von kl ergiebt sich, wenn man in 118 und 119 Zähler und Nenner mit e^{2kl} dividirt und sodann die Glieder mit den Faktoren e^{-2kl}, e^{-4kl} vernachlässigt,

$$125.\quad q = \tfrac{1}{2}Gk\,e^{-k\xi}(\sin k\xi + \cos k\xi),$$

$$126.\quad M = \frac{G}{k}\,e^{-k\xi}(\sin k\xi - \cos k\xi).$$

Hiernach wird für $\xi = 0$ und $\xi = l$:

$$127.\quad q_1 = \tfrac{1}{2}Gk = \tfrac{1}{2}G\sqrt[4]{\frac{\varkappa}{4EW}},$$

$$128.\quad q_0 = \tfrac{1}{2}Gk\,e^{-kl}(\sin kl + \cos kl),$$

$$129.\quad M_1 = -\frac{G}{k} = G\sqrt[4]{\frac{4EW}{\varkappa}}.$$

Wenn $\sin kl = -\cos kl$, d. i. $kl = \frac{3}{4}\pi = 2{,}356$ ist, so wird $q_0 = 0$. Für $kl = 2{,}356$ wird $q_1 = 1{,}178\,\frac{G}{l}$, $M_1 = -0{,}424\,Gl$. Ist $kl > 2{,}356$, so wird q zum Theil negativ; dann aber gilt unsere Entwickelung, wenn der Stab mit der Unterlage nicht fest verbunden ist, nicht mehr, da sich dann der Stab zum Theil von der Unterlage abhebt, das Gesetz $q = \varkappa\eta$ also nicht allgemein Giltigkeit hat. Wir wollen auf diesen Fall indessen nicht eingehen.

Anwendung beim Langschwellensystem der Eisenbahnen u. s. w.

Digitized by Google

VI. Abschnitt.

Verschiedene Querschnittsformen.

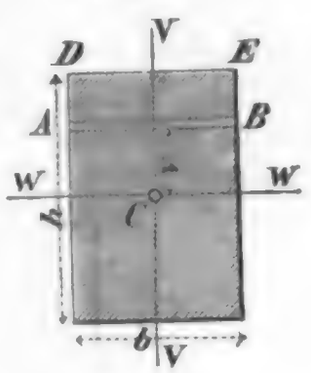
XXI. Kapitel.

Der rechteckige Querschnitt.

§. 196. Spannungen. Da der rechteckige Querschnitt vielfache Anwendung findet, so wollen wir die Rechnung für denselben vollständig durchführen.

Die Hauptaxen des Rechtecks sind den Seiten parallel (Fig. 57). Bezeichnen wir die Breite des Rechtecks, d. i. die auf der Kraftebene senkrechte Seite mit b, und die Höhe, d. i. die der Kraftebene parallele Seite, mit h, so ist $F = b\,h$ und das statische Moment $\mathfrak{Q}$ (siehe §. 69), sowie das Trägheitsmoment W (siehe §. 64):

Fig. 57.



$$\mathfrak{Q} = b \int_{v}^{\frac{h}{2}} v\,dv, \quad W = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} v^2\,dv$$

d. i.

$$1.\quad \mathfrak{Q} = \tfrac{1}{8}\,b\,(h^2 - 4\,v^2),$$

$$2.\quad W = \tfrac{1}{12}\,b\,h^3.$$

Die Normal- und Schubspannungen werden daher nach 23 (Seite 55) und 27 (Seite 58), wenn wir voraussetzen, dass keine Axialkraft vorhanden sei,

$$3.\quad N = \frac{12\,M\,v}{b\,h^3}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = \frac{3\,(h^2 - 4\,v^2)\,Q}{2\,b\,h^3}.$$

N wird, wie stets, zum Maximum für $v = \pm \tfrac{1}{2}\,h$, T_3 dagegen für $v = 0$ und zwar ist

$$4.\quad \max N = \frac{6\,M}{b\,h^2}, \quad \max T_3 = \frac{3\,Q}{2\,b\,h}.$$

Diese Formeln lassen sich leicht auf die verschiedenen Belastungsweisen anwenden. Wir wollen dies nur beispielsweise für einen an den Enden auf Stützen ruhenden und gleichmässig belasteten Stab thun. Für

Digitized by Google

denselben ist nach §. 105: $Q = \frac{1}{2} q (l - 2x)$, $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, also

$$N = \frac{6 q v x (l - x)}{b h^3}, \quad T_2 = \frac{3 q (h^2 - 4 v^2)(l - 2x)}{4 b h^3}.$$

Hiernach ist Taf. IX, Fig. 1. N und T_2 für $\frac{x}{l} = 0,\ 0{,}1\ 0{,}2\ 0{,}3\ 0{,}4\ 0{,}5$ graphisch dargestellt.

§. 197. Hauptspannungen. Als Hauptspannung H und ideale Hauptspannung S ergiebt sich nach 33 (§. 76) und nach 67 (§. 83) durch Einsetzung der Ausdrücke für N, T_2, T_3:

5. $$H = \frac{6 M}{b h^3}\left[v \pm \sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{16 M^2}(h^2 - 4 v^2)^2}\right],$$

6. $$S = \frac{4 M}{b h^3}\left[v \pm 2\sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{16 M^2}(h^2 - 4 v^2)^2}\right].$$

Hiernach wir H zum analytischen Maximum für

7. $$64 \mu v^6 + 16 (3 - 2 \mu) h^2 v^4 - 4 (2 - \mu) h^4 v^2 + h^6 = 0$$

und S zum analytischen Maximum für

8. $$256 \mu^2 v^6 + 16 \mu (15 - 8 \mu) h^2 v^4 + 8 (6 - 7 \mu + 2 \mu^2) h^4 v^2 - \mu h^6 = 0,$$

worin zur Abkürzung $\frac{Q^2 h^2}{M^2} = \mu$ gesetzt ist. Zum wirklichen Maximum kann aber auch H und S für $v = \pm \frac{h}{2}$ werden. In folgender Tabelle sind die Werthe von S_0, S_1 von S für $v = 0$, $v = \frac{1}{2} h$ und das analytische Maximum S' (für $v = v'$) bei verschiedenen Werthen von μ zusammengestellt.

$\frac{Q h}{M}$	S_0	S'	S_1	v'
∞	2	2,000	0	0
10	2	2,001	0,600	0,025
9	2	2,006	0,667	0,028
8	2	2,008	0,750	0,032
7	2	2,010	0,857	0,037
6	2	2,014	1,000	0,044
5	2	2,022	1,200	0,054
4	2	2,035	1,500	0,073
3	2	2,073	2,000	0,113
2,883	2	2,081	2,081	0,121
2	2	—	3,000	—
1	2	—	6,000	—
	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot \frac{Q}{F}$	$\cdot h$

Hieraus geht hervor, dass, wenn $Q h < 2{,}883 M$ ist, stets S' das Maximum von M ist. Zugleich zeigt die Tabelle, dass, wenn $Q h > 2{,}883 M$

Digitized by Google

ist, das wirkliche Maximum S' von dem Werthe S_0 nur sehr wenig abweicht, so dass man für die Praxis annehmen kann: S wird zum Maximum für $v = 0$ oder $v = \pm \frac{1}{3} h$ und zwar ist:

$$9. \quad \begin{cases} v = 0. & S_0 = \pm 2 \dfrac{Q}{b\,h}, \\ v = \pm \dfrac{h}{2}, & S_1 = \pm 6 \dfrac{M}{b\,h^2}. \end{cases}$$

Ebenso ergiebt sich, dass, wenn $Q\,h < 3{,}678$ ist, das H für $v = \pm \frac{1}{3} h$ grösser ist, als das analytische Maximum von H.

Für das im vorigen §. gewählte Beispiel sind auf Taf. IX in Fig. 2 H und S graphisch dargestellt.

Nach §. 76 wird, wenn α, β, γ die Richtungswinkel der einen Hauptspannung bezeichnen, $\tan\beta = \infty$, $\beta = 90^0$, d. h. die Hauptspannungen wirken in einer zur Kraftebene parallelen Ebene. Ferner wird

$$10. \quad \tan\alpha = \frac{T_3}{H}.$$

Für $v = 0$ wird $H = T_3$, also $\alpha = 45^0$; für $v = \pm \frac{1}{2} h$ wird $T_3 = 0$, also $\alpha = 0$.

Auf Taf. IX sind in Fig. 3 die Ellipsen der Elasticität graphisch dargestellt.

§. 198. Festigkeitsbedingungen. Da die grösste positive und negative ideale Hauptspannung einander gleich sind, so wird ein Bruch durch Zerreissen oder Zerdrücken eintreten, je nachdem $K \lessgtr \mathfrak{K}$ ist. Ist K' der kleinste der Coefficienten K, $\mathfrak{K}$, so ist die Festigkeitsbedingung

$$11\,a. \quad Q\,h < 2{,}88\,M: \quad K' = \frac{6\,M}{b\,h^2},$$

$$11\,b. \quad Q\,h > 2{,}88\,M: \quad K' = \frac{2\,Q}{b\,h}.$$

Für einen Körper von constanter Festigkeit müsste hiernach, wenn $Q\,h > 2{,}88\,M$ ist,

$$12. \quad b\,h = \frac{2\,Q}{K'}$$

sein. Der Körper wird demnach stets aus zwei verschiedenen Formen zusammenzusetzen sein, von denen die eine durch 12 bestimmte Form für denjenigen Theil gilt, in welchem $Q\,h > 2{,}88\,M$; die andere durch 11 a bestimmte Form aber für denjenigen Theil, in welchem $Q\,h < 2{,}88\,M$ ist. Bei den auf Taf. III und IV enthaltenen Formen sind beide Theile dargestellt. Der letztere Theil ist im IV. Abschnitte bestimmt; der erstere ergiebt sich leicht, wenn man in 12 die im IV. Abschnitte ermittelten Ausdrücke für Q einsetzt.

Bei prismatischen Körpern giebt, wenn die Länge gegen die Höhe gross ist, stets die Gleichung 11 a grössere Dimensionen, als die Gleichung 11 b, so dass die letztere meist nicht zu beachten ist.

Digitized by Google

Liegt z. B. der gleichmässig belastete Stab mit den Enden auf Stützen, so ist $\max Q = \frac{1}{2} q l$, $\max M = \frac{1}{8} q l^2$, **daher nach 8**

$$\max S_0 = \frac{q l}{b h}, \quad \max S_1 = \frac{3 q l^2}{4 b h^2},$$

so dass nur $\max S_0 > \max S_1$ **wird, wenn** $l < \frac{4}{3} h$ **ist. Ist, wie gewöhnlich,** $l > \frac{4}{3} h$, so ist S_1 das Maximum von S und daher nur die Gleichung 11a für die Festigkeit maassgebend. Diese giebt

$$4 K' b h^2 = 3 q l^2.$$

Nimmt man das Verhältniss $\frac{b}{h}$ an und zwar $= n$, so wird, wenn es auf die Berechnung der Dimensionen ankommt,

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 q l^2}{4 n K'}}.$$

Anwendung bei Balken in Gebäuden, hölzernen Balkenbrücken u. s. w.

§. 199. Das Rechteck im Kreise. Wenn ein Balken mit rechteckigem Querschnitte aus einem runden Stamme gezimmert wird, so ist es meist zweckmässig, die Seiten des Rechtecks so zu wählen, dass der Durchmesser des Stammes möglichst klein wird, oder, was auf dasselbe hinausläuft, dass die Tragkraft des aus einem gegebenen Stamme gezimmerten Balkens möglichst gross ausfällt.

Ist d der Durchmesser des dem Rechtecke umschriebenen Kreises, n das Verhältniss $\frac{b}{h}$, so ist $d^2 = b^2 + h^2 = (n^2 + 1) h^2$, also

$$h = \frac{d}{\sqrt{n^2 + 1}}, \quad b = \frac{n d}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Daher wird nach 11a:

$$6 M = K' \frac{n d^3}{(n^2 + 1)\sqrt{n^2 + 1}}$$

oder

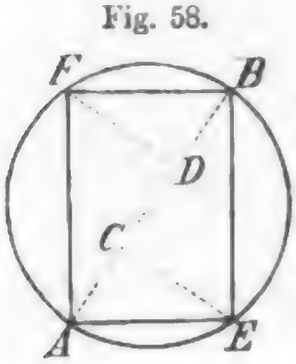
$$M = \frac{K' n d^3}{6\sqrt{(n^2 + 1)^3}}.$$

$$\frac{dM}{dn} = \frac{K' d^3 (1 - 2 n^2)}{6\sqrt{(n^2 + 1)^5}}.$$

Demnach wird M bei gegebenem d zum Maximum oder d bei gegebenem M zum Minimum, wenn $2 n^2 = 1$ oder

$$13. \quad n = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$$

Fig. 58.



ist, so dass sich nahezu $b : h = 7 : 10$ verhält. Hiernach ergiebt sich leicht eine einfache Construction (Fig. 58): Man theile einen Durchmesser A B in drei gleiche Theile und errichte auf denselben in den Theilpunkten C, D nach entgegengesetzen Seiten Senkrechten. Die Verbindung der so im Kreise bestimmten Punkte E, F mit den Enden des Durchmessers giebt das gewünschte Rechteck.

Die Einsetzung des Werthes von n giebt

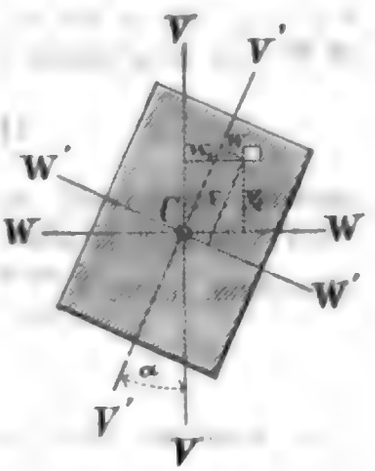
Digitized by Google

$$14.\quad M = \frac{\sqrt{3}}{27} K' d^3 = 0{,}0641\, K' d^3.$$

Die Durchbiegung des Balkens wird ein Minimum, wenn das Trägheitsmoment ein Maximum wird. Es ergiebt sich leicht, dass dies für das Verhältniss $n = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577$ eintritt. Die Construction kann in einer der obigen ähnlichen Weise erfolgen; nur ist hier der Durchmesser nicht in drei, sondern in vier gleiche Theile zu theilen.

§. 200. Geneigte Lage. Die eine Hauptaxe, welche der Seite h parallel ist, schliesse mit der Kraftebene den Winkel α ein (Fig. 59). Wählen wir wieder die beiden Hauptaxen als Axen der v, w, so ist die Faserspannung nach 21 §. 67 allgemein

Fig. 59.



$$N = M\left(\frac{v}{W}\cos\alpha + \frac{w}{W'}\sin\alpha\right),$$

wobei diejenigen Seiten der Hauptaxen als positiv zu nehmen sind, nach welchen zu die Kraft nicht wirkt (in der Figur links und oben). Nun aber ist für den rechteckigen Querschnitt $W = \frac{1}{12} b h^2$, $W' = \frac{1}{12} b^2 h$, mithin

$$15.\quad N = \frac{12\,M}{b\,h}\left(\frac{v}{h^2}\cos\alpha + \frac{w}{b^2}\sin\alpha\right).$$

Das Maximum erreicht N für $v = \pm\frac{1}{2}h$, $w = \pm\frac{1}{2}b$, also in einer Ecke, und zwar ist

$$16.\quad \max N = \pm\frac{6\,M}{b^2 h^2}(h\sin\alpha + b\cos\alpha).$$

Setzen wir nun als Festigkeitsbedingung $\max N = K'$, so ergiebt sich

$$17.\quad M = \frac{K' b^2 h^2}{6\,(h\sin\alpha + b\cos\alpha)}.$$

Hiernach lassen sich $\max N$ und M leicht durch eine geometrische Construction graphisch darstellen (Taf. IX Fig. 4), wobei man $\max N$ und M am besten vom Centrum aus auf der Axe der v aufträgt. Es lässt sich leicht nachweisen, dass alsdann die Linie für $\max N$ ein Kreis (für dessen Mittelpunkt $\tan\alpha = \frac{h}{b}$ ist) und die Linie für M eine Gerade ist.

Am kleinsten wird M für $\tan\alpha = \frac{h}{b}$ oder, wenn die eine Diagonale auf der Kraftebene senkrecht steht. Am grössten dagegen wird M, wenn die grösste der Seiten bh (wir nehmen h als diese Seite an) der Kraftebene parallel ist.

Bezeichnen wir die Diagonale mit d, so ist für die kleinste Tragkraft $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, $\cos\alpha = \frac{b}{d}$ und für die grösste $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 90^0$, daher wird

$$18.\quad \max M = \frac{K' b h^2}{6},\qquad \min M = \frac{K' b^3 h^3}{6\,d},$$

19. $\max M : \min M = d : b.$

Die Gleichung der neutralen Axe in Beziehung auf die Hauptaxen ist nach 12:

$$\frac{v}{h^2}\cos\alpha + \frac{w}{b^2}\sin\alpha = 0, \quad \frac{v}{w} = -\frac{h^2}{b^2}\tan\alpha.$$

Ist φ der Winkel zwischen der neutralen Axe und der Axe der w, so ist $\tan\varphi = \frac{v}{w}$, also

20. $$\tan\varphi = -\frac{h^2}{b^2}\tan\alpha,$$

wonach sich die Lage der neutralen Axe leicht construiren lässt (Taf. IX Fig. 5). Ist ψ der Winkel, welchen die neutrale Axe mit der Senkrechten WW′ zur Kraftebene bildet, so ist $\psi = \alpha + \varphi$, woraus sich leicht

21. $$\tan\psi = \frac{b^2 - h^2}{b^2\cot\alpha + h^2\tan\alpha}$$

ergiebt. Senkrecht zur neutralen Axe liegt die Biegungsebene. Diese wird von der Kraftebene am meisten abweichen oder ψ wird zu einem Maximum, wenn $\frac{d\tan\psi}{d\alpha} = 0$, d. i.

22. $$\tan\alpha = \frac{b}{h},$$

d. i. wenn die eine Diagonale vertical steht. In diesem Falle wird

23. $$\tan\varphi = \frac{h}{b}.$$

Die Biegungsebene erhält also die geneigteste Lage, wenn die eine Diagonale vertical steht; die andere Diagonale ist alsdann die neutrale Axe, auf welcher die Biegungsebene senkrecht steht.

§ 201. Transversale Normalspannungen. Die Normalspannung N_2, welche in Richtung der Seite h wirkt, ist nach 30 (§. 74):

$$N_2 = -\frac{q'}{b} + \frac{q(\mathfrak{W} - \Omega v)}{W b},$$

wobei Ω, $\mathfrak{W}$ das statische und Trägheitsmoment der Fläche ADEB (Fig. 57) und q′ den oberhalb AB wirkenden Theil von q bezeichnet. Nun aber ist nach 1 (§. 195) $\Omega = \frac{1}{4} b(h^2 - 4v^2)$ und ausserdem $\mathfrak{W} = b\int_v^{\frac{1}{2}h} v^2\,dv = \frac{1}{24} b(h^3 - 8v^3)$. Daher wird

24. $$N_2 = \frac{q}{2b}\left(1 - 3\frac{v}{h} + 4\frac{v^3}{h^3}\right) - \frac{q'}{b}.$$

a) Die Last liege nur auf der oberen Fläche. Abstrahiren wir vom Gewichte des Körpers, so ist $q' = q$, mithin

25. $$N_2 = -\frac{q}{2b}\left(1 + 3\frac{v}{h} - 4\frac{v^3}{h^3}\right),$$

Digitized by Google

wonach Taf. IX Fig. 6 (a) N_2 graphisch dargestellt ist. Hiernach nimmt N_2 nahezu gleichmässig von der oberen zur unteren Fläche ab.

b) Der Stab sei nur durch sein Eigengewicht belastet. Alsdann ist, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit bezeichnet, $q = b\,h\,\gamma$, $q' = \gamma \times$ Fläche $ADEB = \frac{1}{2}\,b\,(h - 2\,v)\,\gamma$. Daher wird

$$26.\quad N_2 = \tfrac{1}{2}\,\gamma\,v\left(1 - 4\,\frac{v^2}{h^2}\right),$$

wonach Taf. IX Fig. 6 (b) N_2 graphisch dargestellt ist. Hiernach findet auf der oberen Seite ein verticaler Druck, auf der unteren ein verticaler Zug statt; für $v = 0$ ist $N_2 = 0$. Zum Maximum wird N_2 für $v = \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}\,h = \pm 0{,}5777 \ldots \frac{1}{2}\,h$ und zwar ist

$$27.\quad \max N_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{18}\,h\,\gamma = 0{,}0963\,h\,\gamma.$$

Berücksichtigt man nur die Last, welche der Körper auf der oberen Fläche zu tragen hat, so ist $\max N_2 = \frac{q}{b}$. Dagegen ist $\max N = \frac{6\,M}{b\,h^2}$ mithin

$$\frac{\max N_2}{\max N} = \frac{q\,h^2}{6\,M}.$$

Ist z. B. der Stab an einem Ende eingespannt, so ist bei der Länge l des Stabes, $\max M = \frac{1}{2}\,q\,l^2$, mithin

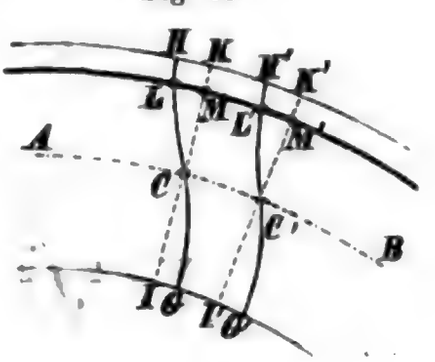
$$\frac{\max N_2}{\max N} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

wonach in den gewöhnlichen Fällen der Praxis $\max N_2$ gegen $\max N$ sehr klein ist, so dass die bisherige Vernachlässigung von N_2 für den rechteckigen Querschnitt gerechtfertigt erscheint.

§. 202. Formänderung der Querschnitte.

Nach 54 (§. 81) wird, wenn δ den Abstand LM (Fig. 60) des deformirten Querschnittes von der Normalebene IK zur deformirten Axe bezeichnet, da hier $\frac{db}{dv} = 0$, und $\Omega = \frac{1}{8}\,b\,(h^2 - 4\,v^2)$ ist,

Fig. 60.



$$\delta = \frac{12\,Q}{G\,b\,h^3}\left[\tfrac{1}{8}\int_0^v (h^2 - 4\,v^2)\,dv + \frac{v\,(2\,v^2 + 3\,w^2)}{12\,(m+1)}\right]$$

$$= \frac{Q\,v}{2\,G\,b\,h^3}\left[3\,h^2 - 4\,v^2 + \frac{2}{m+1}\,(2\,v^2 + 3\,w^2)\right].$$

Nach 38 ist für $m = 4$ $G = \frac{3}{5}\,E$, daher

$$28.\quad \delta = \frac{5\,Q\,v}{4\,E\,b\,h^3}\,(3\,h^2 - 3{,}2\,v^2 + 1{,}2\,w^2).$$

Am grössten ist δ für $v = \pm\frac{1}{2}\,h$. Bezeichnen wir diesen Werth von δ

Digitized by Google

mit δ_1, so ist, wenn wir das Glied mit w vernachlässigen,

$$29. \quad \delta_1 = \frac{11\,Q}{8\,E\,b}.$$

Für einen an den Enden gestützten, gleichmässig belasteten Stab ist z. B. $Q = \frac{1}{2}\,q\,(l - 2x)$, mithin

$$\delta_1 = \frac{11\,q\,(l-2x)}{16\,E\,b},$$

wonach Taf. IX Fig. 7 die Formänderung der Querschnitte dargestellt ist. An den Enden, wo δ_1 am grössten ist, ist $\delta_1 = \frac{11\,q\,l}{16\,E\,b} = \frac{22}{5}\,\mathfrak{v}\left(\frac{h}{l}\right)^2$, wenn $\mathfrak{v}$ die Durchbiegung in der Mitte (nach §. 106) bezeichnet.

XXII. Kapitel.

Der elliptische Querschnitt.

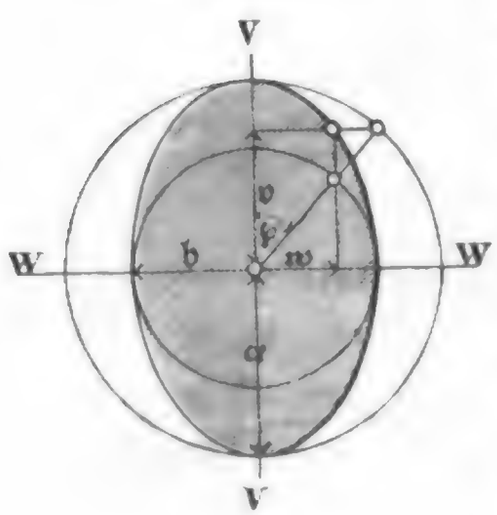
§. 203. Spannungen.

Wir bezeichnen die beiden Halbaxen der Ellipse mit a, b und setzen voraus, dass die Halbaxe a in die Kraftebene falle. Bezeichnet man mit φ einen Hilfswinkel, so kann man die Coordinaten $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ eines Punktes des Umfanges setzen

$$\mathfrak{v} = a\cos\varphi, \quad \mathfrak{w} = b\sin\varphi,$$

woraus die bekannte Construction der Ellipse mit Hilfe des um- und eingeschriebenen Kreises folgt (Fig. 61). Daher wird, da $d\mathfrak{v} = -a\sin\varphi\,.\,d\varphi$ ist und für $v = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, für $v = a$ $\varphi = 0$ wird,

Fig. 61.



$$\Omega = \int_v^a 2\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}\,d\mathfrak{v} = 2\,a^2\,b\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$W = 2\int_0^a 2\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{v}^2\,d\mathfrak{v} = 4\,a^3\,b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

d. i.

$$30. \quad \Omega = \frac{2}{3}\,a^2\,b\sin^3\varphi,$$

$$31. \quad W = \frac{\pi}{4}\,a^3\,b.$$

Demnach werden die Spannungen nach 23 (§. 68), 27 (§. 71), da hier 2 w für b und $db = 2\,dw = 2\,b\cos\varphi\,d\varphi$, $dv = d\mathfrak{v} = -a\sin\varphi\,d\varphi$ zu setzen ist,

Digitized by Google

$$32.\quad N = \frac{4\,M\,v}{\pi\,a^3\,b}$$

$$33.\quad T_3 = \frac{4\,Q}{3\,\pi\,a\,b}\sin^2\varphi,\quad T_2 = \frac{4\,Q\,w}{3\,\pi\,a^3 b}\cos\varphi.$$

Den grössten Werth erreicht N für $v = \pm a$, T_3 für $v = 0$ oder $\varphi = 90^0$ und zwar ist

$$34.\quad \max N = \frac{4\,M}{\pi\,a^2 b},\quad \max T_3 = \frac{4\,Q}{3\,\pi\,a\,b} = \frac{4\,Q}{3\,F}.$$

T_2 wird für ein gegebenes v am grössten für $w = \mathfrak{w}$, d. i. an der Oberfläche des Körpers und zwar ist hier

$$35.\quad T_2 = \frac{2\,Q}{3\,\pi\,a^2}\sin 2\varphi.$$

Am grössten wird demnach T_2 für $\varphi = 45^0$ und zwar ist

$$36.\quad \max T_2 = \frac{2\,Q}{3\,\pi\,a^2} = \frac{2\,Q}{3\,F}\cdot\frac{b}{a}.$$

Hier kann also T_2 gegen T_3 eine beträchtliche Grösse erreichen, während beim rechteckigen Querschnitte $T_2 = 0$ war.

Diese Formeln lassen sich sofort auf den kreisförmigen Querschnitt anwenden, wenn man $a = b =$ dem Radius r setzt. Wir heben besonders nur den Ausdruck für das Trägheitsmoment, nämlich

$$37.\quad W = \frac{\pi\,r^4}{4} = \frac{\pi\,d^4}{64}$$

hervor, worin d den Durchmesser 2r bedeutet.

Auf Taf. IX sind in Fig. 8, N, T_3, T_2 (für $w = \mathfrak{w}$) für den kreisförmigen Querschnitt graphisch dargestellt.

§. 204. Hauptspannungen. In einer Parallelen zur Axe der w ist N und T_3 constant, T_2 aber wird an den Enden derselben, also am Umfange am grössten. Hier wird daher auch die Hauptspannung H und ideale Hauptspannung S am grössten. Für einen Punkt des Umfanges aber ergiebt sich nach 33 (§. 76) und 67 (§. 83):

$$38.\quad H = \frac{2\,M}{\pi\,a^3 b}\left[v \pm \sqrt{v^2 + \frac{4\,Q^2 a^2}{9\,M^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}\right],$$

$$39.\quad S = \frac{4\,M}{3\,\pi\,a^3 b}\left[v \pm 2\sqrt{v^2 + \frac{4\,Q^2 a^2}{9\,M^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}\right].$$

Für das Maximum von H und S ergiebt sich in Beziehung auf v^2 eine cubische Gleichung. Wir wollen indess die Rechnung nur für einen kreisförmigen Querschnitt durchführen, für welchen sich dieselbe bedeutend vereinfacht. Setzen wir $a = b = r$, so wird, da $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist,

$$40.\quad H = \frac{2\,M}{\pi\,r^4}\left[v \pm \sqrt{v^2 + n^2(r^2 - v^2)}\right],$$

$$41.\quad S = \frac{4\,M}{3\,\pi\,r^4}\left[v \pm 2\sqrt{v^2 + n^2(r^2 - v^2)}\right],$$

Digitized by Google

wenn wir zur Abkürzung

$$n = \frac{2\,Q\,r}{3\,M}$$

setzen. Hiernach wird H zum analytischen Maximum für

$$42.\quad v^2 = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Ist $n < 1$, also $Q^2 r^2 < \frac{3}{2} M^2$ oder $Q\,r < 2{,}121\,M$, so ist v imaginär. Alsdann wird H zum wirklichen Maximum für $v = \pm r$. Das Maximum von H selbst ist

$$43.\quad \begin{cases} n > 1: & \max H = \pm \dfrac{2\,n^3}{\sqrt{n^2-1}} \dfrac{M}{\pi\,r^3} = \dfrac{4\,n\,Q\,v}{3\,F\,r}. \\ n < 1: & \max H = \dfrac{4\,M}{\pi\,r^3}. \end{cases}$$

S dagegen wird zum analytischen Maximum für

$$44.\quad v = \pm \frac{n\,r}{\sqrt{3-7\,n^2+4\,n^4}}.$$

Ist $n^2 < \frac{3}{4}$, also $Q\,r < \frac{3}{4}\sqrt{6}\,M$, d. i. $< 1{,}837\,M$, so wird $v > r$, also für uns ohne Bedeutung. Alsdann wird S für $v = \pm r$ zum wirklichen Maximum.

Bezeichnen wir den Werth von S für $v = 0$, $v = \pm r$ mit S_0, S_1, das analytische Maximum von S mit S', so ergiebt sich

$$45.\quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{16\,Q}{9\,\pi\,r^2}, \quad S_1 = \dfrac{4\,M}{\pi\,r^3}, \\ S' = \dfrac{16\,(4\,n^2-3)}{27\,n\sqrt{3-7\,n^2+4\,n^4}} \dfrac{Q}{F}. \end{cases}$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\frac{1}{n}$	$\frac{Q\,r}{M}$	S_0 .	S'	S_1	v
0	∞	1,778	1,778	0	0
0,1	15	1,778	1,780	0,267	0,050
0,2	7,5	1,778	1,791	0,533	0,104
0,3	5	1,778	1,800	0,800	0,163
0,4	3,75	1,778	1,820	1,067	0,233
0,5	3	1,778	1,850	1,333	0,320
0,6	2,5	1,778	1,899	1,600	0,439
0,7	2,143	1,778	1,980	1,867	0,616
0,8	1,875	1,778	2,137	2,133	0,924
0,817	1,837	1,778	2,177	2,177	1
0,9	1,667	1,778	—	2,4	—
		. $\frac{Q}{F}$	. $\frac{Q}{F}$	. $\frac{Q}{F}$	. r

Digitized by Google

Innerhalb der Grenzen, zwischen welchen das analytische Maximum von S das wirkliche ist, schwankt dasselbe also zwischen den engen Grenzen 1,778 $\frac{Q}{F}$ und 2,177 $\frac{Q}{F}$, so dass man annähernd für alle Fälle

$$46.\quad S' = 2\,\frac{Q}{F}$$

setzen kann.

§. 205. Festigkeitsbedingungen. Wenn beim kreisförmigen Querschnitte $Q\,r < 1{,}837\,M$ ist, so wird S für $v = \pm r$ zum Maximum und alsdann ist $K' = \frac{4\,M}{\pi\,r^3}$ zu setzen, also

$$47.\quad M = \frac{\pi\,K'\,r^3}{4}.$$

Wenn dagegen $Q\,r > 1{,}837\,M$ ist, so ist S' das Maximum von S und alsdann ergiebt sich als Festigkeitsbedingung, wenn man für n seinen Werth einsetzt,

$$48.\quad K' = \frac{M}{\pi\,r^3}\,\frac{8\,(16\,Q^2\,r^2 - 27\,M^2)}{9\sqrt{243\,M^4 - 63\,M^2\,Q^2\,r^2 + 64\,Q^4\,r^4}}.$$

Bedeutend einfacher und in den meisten Fällen auch genau genug wird die Festigkeitsbedingung, wenn man annähernd $S' = 2\,\frac{Q}{F}$ setzt, nämlich

$$49.\quad 2\,Q = K'\,\pi\,r^2.$$

Für einen Körper von constanter Festigkeit wird daher annähernd

$$50.\quad r = \sqrt{\frac{2\,Q}{\pi\,K'}}.$$

Taf. III Fig. 3, 6 und Taf. IV Fig. 8 stellen Fälle dar, bei welchen Q, also auch r constant ist. Die Form des übrigen Theiles, für welchen $Q\,r < 1{,}837\,M$ ist, wurde bereits früher bestimmt.

Genauer ergiebt sich für den Fall, dass eine Kraft auf das Ende des Stabes ($x = 0$) wirkt, wenn der Radius am Ende r_0 ist, $r_0 = 0{,}752\sqrt{\frac{Q}{K}}$, und für $x = 0$ 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 . r_0 bezüglich $r = 1{,}000$ 1,003 1,006 1,016 1,031 1,055 1,111 . r_0.

Bei prismatischen Körpern kann man in den gewöhnlichen Fällen die Festigkeitsbedingung 47 als maassgebend ansehen.

Ist z. B. der prismatische Stab an einem Ende eingespannt, am anderen mit G belastet, so ist $Q = G$, $M = G\,x$. Da Q constant ist und M für $x = l$ zum Maximum wird, so wird auch S für $x = l$ zum Maximum und zwar ist

$$\max S_1 = \frac{4\,G\,l}{\pi\,r^3},\quad \max S' = \frac{4\,G\,l}{\pi\,r^3}\,\frac{2\,(16\,r^2 - 27\,l^2)}{9\sqrt{243\,l^4 - 63\,l^2\,r^2 + 64\,r^4}}.$$

Es wird nur $\max S' > \max S_1$, wenn $l < 0{,}544\,r$ ist, welche Bedingung aber in den gewöhnlichen Fällen der Praxis nicht erfüllt ist.

§. 206. Schiefe Lage. Wenn die Halbaxe a gegen die Kraftebene unter dem Winkel α geneigt ist, so ergiebt sich nach §. 67, da hier $W = \frac{\pi}{4}\,a^3\,b$, $W' = \frac{\pi}{4}\,a\,b^3$ zu setzen ist, als Faserspannung

Digitized by Google

$$51.\quad N = \frac{4M}{\pi a b}\left(\frac{v}{a^2}\cos\alpha + \frac{w}{b^2}\sin\alpha\right),$$

also für einen Punkt des Umfanges, wenn wir $v = a\cos\varphi$, $w = b\sin\varphi$ setzen,

$$52.\quad N = \frac{4M}{\pi a b}\left(\frac{\cos\alpha\cos\varphi}{a} + \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{b}\right).$$

Am grössten wird hiernach N für

$$53.\quad \tan\varphi = \frac{a}{b}\tan\alpha$$

und zwar ergiebt sich, indem wir in 52 $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $\tan\varphi$ ausdrücken und $\tan\varphi$ aus 53 einsetzen,

$$\max N = \frac{4M\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}{\pi a^2 b^2}.$$

Setzen wir $\max N = K'$, so ergiebt sich

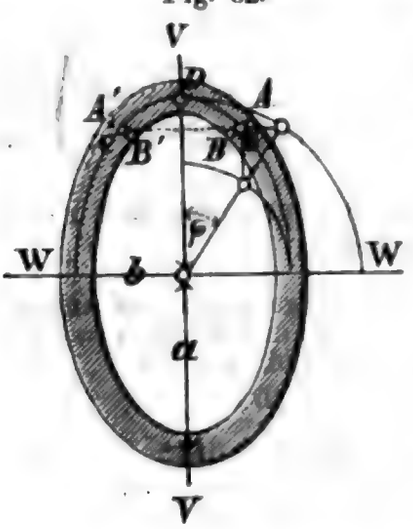
$$54.\quad M = \frac{\pi K' a^2 b^2}{4\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}.$$

Auf Taf. IX ist in Fig. 9 $\max N$ und M für ein variabeles α graphisch dargestellt. Hiernach wird, abweichend von rechteckigem Querschnitte, M zum Maximum und Minimum, je nachdem die grössere oder kleinere Axe der Ellipse in der Kraftebene liegt. Es wird $4\max M = \pi K' a^2 b$, $4\min M = \pi K' a b^4$, also $\max M : \min M = a : b$.

Die Halbaxen m, n der Trägheitsellipse verhalten sich nach §. 65 wie a : b. Aus §. 68 folgt daher, dass die Durchschnittslinie der Kraftebene mit dem Querschnitte und die neutrale Axe conjugirte Durchmesser sind, wonach sich die letztere leicht construiren lässt.

§. 207. Elliptischer Ring. (Fig. 62). Die Axe des Ringes sei eine Ellipse mit den Halbaxen a, b und die Breite δ des Ringes, senkrecht zu seiner Axe, constant und sehr klein. Der äussere und innere Umfang sind dann sehr nahe Ellipsen mit den Halbaxen $a + \frac{1}{2}\delta$, $b + \frac{1}{2}\delta$, $a - \frac{1}{2}\delta$, $b - \frac{1}{2}\delta$.

Fig. 62.



Als Trägheitsmoment ergiebt sich zunächst nach 31 (§. 203):

$$W = \frac{\pi}{4}\left[(a + \tfrac{1}{2}\delta)^3(b + \tfrac{1}{2}\delta) - (a - \tfrac{1}{2}\delta)^3(b - \tfrac{1}{2}\delta)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\delta\left[a^2(a + 3b) + \tfrac{1}{4}(3a + b)\delta^2\right].$$

Vernachlässigen wir das zweite Glied in der Parenthese wegen der Kleinheit von δ, so wird

$$55.\quad W = \frac{\pi}{4}a^2(a + 3b)\delta.$$

Unter Ω verstehen wir hier das statische Moment des Flächenstückes ABB'A', welches durch die symmetrisch zur Axe der v gelegenen Senkrechten AB, A'B' zur Mittellinie des Ringes abgeschnitten wird. Dasselbe ist sehr nahe gleich dem statischen Momente des durch die Sehne CC'

abgeschnittenen Flächenstückes. Bezeichnen wir die statischen Momente der durch CC′ von der mittleren, äusseren und inneren Ellipse abgeschnittenen Flächenstücke mit Ω_0, Ω_1, Ω_2, so ist $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ und nach 30 (§. 203), wenn sich φ auf die Punkte C, C′ bezieht,

$$\Omega_0 = \tfrac{2}{3}\, a^2 b \sin^3\varphi = \tfrac{2}{3}\, a^3 b \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^3}.$$

Differenziirt man nach a b, während man v constant lässt, so ergiebt sich

$$d\Omega_0 = \frac{2}{3\,a^2}\left[b\,(2\,a^2 + v^2)\,\partial a + a\,(a^2 - v^2)\,\partial b\right]\sqrt{a^2 - v^2}.$$

Dieser Ausdruck für $d\,\Omega_0$ gilt sehr nahe auch für $\Omega_1 - \Omega_0$ und für $\Omega_0 - \Omega_2$, wenn man δ für ∂a und ∂b setzt. Daher ist $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 = 2\,(\Omega_1 - \Omega_0)$, d. i.

$$\Omega = \frac{2\,\delta}{3\,a^2}\left[b\,(2\,a^2 + v^2) + a\,(a^2 - v^2)\right]\sqrt{a^2 - v^2}$$

oder

$$56.\quad \Omega = \frac{2\,\delta}{3\,a^2}\left[(a + 2\,b)\,a^2 - (a - b)\,v^2\right]\sqrt{a^2 - v^2}.$$

$$= \frac{2}{3}\,a\,\delta\left[3\,b + (a - b)\sin^2\varphi\right]\sin\varphi.$$

Demnach wird nun, wenn T_3' die zur Axe des Stabes parallel und in der durch AB gehenden, zur Axe des Stabes parallelen, Ebene wirkenden Schubspannung bezeichnet, nach 23 (§. 67) und 25 (§. 69), wobei in letzterer Formel $2\,\delta$ für b zu setzen ist,

$$57.\quad N = \frac{4\,M\,v}{\pi\,a^2\,(a + 3\,b)\,\delta},$$

$$58.\quad T_3' = \frac{4\,Q\,[3\,b + (a - b)\sin^2\varphi]\sin\varphi}{\pi\,a\,(a + 3\,b)\,\delta}.$$

Die Schubspannung T_2' (siehe §. 70) ist, da δ constant ist, Null. T_3' wird zum Maximum für $\varphi = 90^0$, d. i. in der Axe der w und zwar ist

$$59.\quad \begin{cases} \max N = \dfrac{8\,M}{\pi\,a\,(a + 3\,b)\,\delta} \\ \max T_3' = \dfrac{4\,Q\,(a + 2\,b)}{\pi\,a\,(a + 3\,b)\,\delta}. \end{cases}$$

Für den Kreisring ergiebt sich, wenn wir $a = b = r$ setzen,

$$60.\quad N = \frac{M\,v}{\pi\,r^3\,\delta},\quad T_3' = \frac{3\,Q\sin\varphi}{\pi\,r\,\delta}.$$

$$61.\quad \max N = \frac{M}{\pi\,r^2\,\delta},\quad \max T_3' = \frac{3\,Q}{\pi\,r\,\delta} = \frac{6\,Q}{F}.$$

Während sich beim vollen elliptischen Querschnitte $\frac{\max T_3}{\max N} = \frac{Q\,a}{3\,M}$ ergab, ergiebt sich hier $\frac{\max T_3}{\max N} = \frac{Q\,(a + 2\,b)}{M}$, so dass hier die Schubspannung verhältnissmässig viel grösser werden kann.

Digitized by Google

§. 208. Hauptspannungen. Als ideale Hauptspannung ergiebt sich für den Kreisring nach 67 (§. 83)

$$62.\quad S = \frac{M}{3\pi r^3\delta}\left[v \pm 2\sqrt{v^2 + n^2(r^2 - v^2)}\right],$$

wenn wir zur Abkürzung $n = \frac{6Qr}{M}$ setzen. Der von v abhängige Ausdruck in der Parenthese ist derselbe, wie beim vollen elliptischen Querschnitte nach 41 (§. 204). Wir können daher sofort folgern, dass S zum analytischen Maximum wird für

$$63.\quad v = \pm\frac{nr}{\sqrt{3 - 7n^2 + 4n^4}},$$

dass das wirkliche Maximum von S aber für $v = \pm r$ eintritt, wenn $n^2 < \frac{1}{2}$, d. i. $Qr < \frac{\sqrt{6}}{12} M$, d. i. $Qr < 0{,}204\,M$ ist.

Sind S_0, S_1 die Werthe von S für $v = 0$, $v = \pm r$ und S' das analytische Maximum, so ist

$$64.\quad \begin{cases} S_0 = \frac{4Q}{\pi r\delta} = \frac{8Q}{F}, \quad S_1 = \frac{M}{\pi r^3\delta}, \\ S' = \frac{8(4n^2 - 3)}{3n\sqrt{3 - 7n^2 + 4n^4}}\frac{Q}{F}. \end{cases}$$

Die Tabelle in §. 204 gilt auch hier, nur sind die dort angegebenen Werthe von S_0, S', S_1 noch mit $\frac{9}{2}$ zu multipliciren. Daher liegt S' zwischen den Grenzen $\frac{9}{2} \cdot 1{,}778\frac{Q}{F} = 8\frac{Q}{F}$ und $\frac{9}{2} \cdot 2{,}177\frac{Q}{F} = 9{,}796\frac{Q}{F}$, so dass man in allen Fällen annähernd

$$65.\quad S' = 9\frac{Q}{F} = \frac{9Q}{2r\pi\delta}$$

setzen kann.

Die Festigkeitsbedingungen sind hiernach leicht aufzustellen. Für den gewöhnlichen Fall, dass S für $v = \pm r$ zum Maximum wird, ist $K' = S$, also

$$66.\quad K'\pi r^2\delta = M$$

zu setzen.

Ist z. B. der an beiden Enden unterstützte Körper gleichmässig belastet, so ist $\max Q = \frac{1}{2}ql$, $\max M = \frac{1}{8}ql^2$, daher $S_1 = \frac{ql^2}{8\pi r^3\delta}$ und annähernd $S' = \frac{9ql}{2F} = \frac{9ql}{4\pi r\delta}$, daher wird nur $S' > S_1$, wenn

$$l < 18r$$

ist, welche Bedingung allerdings in einzelnen Fällen der Praxis erfüllt werden kann. Daher ist als Festigkeitsbedingung

$$l > 18r: \quad ql = \frac{8K'\pi r^2\delta}{l},$$

$$l < 18r: \quad ql = \tfrac{4}{9}K'\pi r\delta$$

zu setzen.

Digitized by Google

XXIII. Kapitel.

Verschiedene Querschnittsformen.

§. 209. Bestimmung der Querschnittsgrössen. Wir wollen in diesem Kapitel verschiedene Querschnitte untersuchen, bei welchen es nicht nöthig wird, auf die Schubspannungen Rücksicht zu nehmen.

Zunächst kommt es dabei auf die Bestimmung des Schwerpunktes an, welche nach bekannten Regeln der Mechanik auszuführen ist. Am besten bestimmt man, wenn er nicht schon durch Symmetrieaxen etc. bestimmt ist, seine Entfernung von zwei Axen, indem man für diese Axen das statische Moment des Querschnittes bestimmt und dieses durch den Flächeninhalt dividirt.

Das Trägheitsmoment bestimmt man entweder direkt für die Schweraxe, oder, was zuweilen vorzuziehen ist, erst für irgend eine andere zu dieser parallele Axe. Ist das letztere Trägheitsmoment W', der Abstand der beiden Axen e und der Abstand eines Punktes von der Schweraxe und der zu dieser parallelen Axe bezüglich v, v_1, so ist $v_1 = v + e$, also $W_1 = \int df\, v_1^2 = \int df\, (v+e)^2 = \int df\, v^2 + 2e \int df\, v + e^2 \int df = W + 0 + F e^2$, also

$$67.\quad W = W_1 - F e^2.$$

In gleicher Weise ergiebt sich, wenn $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_1$ das statische Moment für die Schweraxe und die zu dieser parallele Axe bezeichnet,

$$68.\quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 - F e.$$

Bei zusammengesetzten Querschnitten ist das Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile.

A. Geradlinige Figuren.

§. 210. Das Parallelogramm. Die eine Seite des recht- oder schiefwinkligen Parallelogrammes sei b, die zugehörige Höhe h. Alsdann ist in Beziehung auf eine der Seiten b

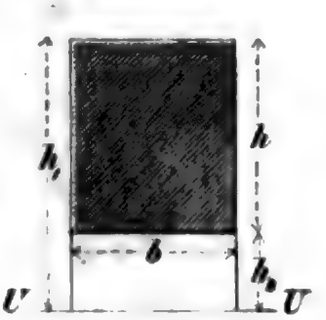
$$\mathfrak{Q} = b \int_0^h y\, dy, \quad W = b \int_0^h y^2 dy, \quad \text{d. i.}$$

$$69.\quad \mathfrak{Q} = \tfrac{1}{2} b h^2; \quad W = \tfrac{1}{3} b h^3.$$

Hat die Axe von den beiden Seiten b des Parallelogrammes die Abstände h_1, h_2, (Fig. 63) so ergiebt sich in gleicher Weise

$$70.\quad \mathfrak{Q} = \tfrac{1}{2} b (h_1^2 - h_2^2) = \tfrac{1}{2} F (h_1 + h_2),$$
$$71.\quad W = \tfrac{1}{3} b (h_1^3 - h_2^3) = \tfrac{1}{3} F (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2).$$

Fig. 63.



Die wichtigsten aus Rechtecken zusammengesetzten Formen sind der I und Tförmige Querschnitt, die wir in den nächsten Kapiteln ausführlicher behandeln wollen. Hier wollen wir nur auf den kreuzförmigen Querschnitt eingehen.

§. 211. Kreuzförmiger Querschnitt. Der Querschnitt sei in Beziehung auf zwei senkrechte Axen symmetrisch und habe die in

Digitized by Google

Fig. 64.

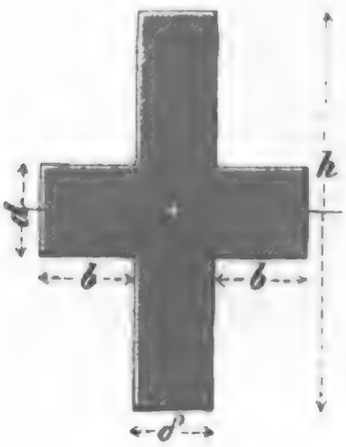


Fig. 64 angegebenen Dimensionen, wobei die Kraftebene vertical angenommen ist. Alsdann ist

$$72. \quad \begin{cases} F = h\,\delta + 2\,b\,\partial, \\ W = \frac{1}{12}(\delta\,h^3 + 2\,b\,\partial^3), \end{cases}$$

also die Festigkeitsbedingung $K'\,W = M\,a$, wenn K' der kleinste der Coefficienten K, $\mathfrak{K}$ ist,

$$73. \quad K'(\delta\,h^3 + 2\,b\,\partial^3) = 6\,M\,h.$$

Sind beispielsweise die Verhältnisse $\frac{b}{h} = m$, $\frac{\delta}{h} = n$, $\frac{\partial}{h} = n_1$, gegeben, so wird $K'(n + 2\,m\,n_1^3)\,h^3 = 6\,M$, also

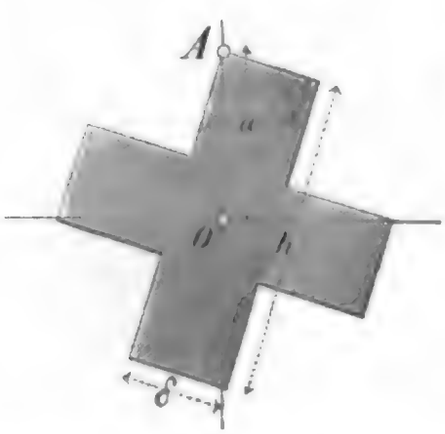
$$74. \quad h = \sqrt[3]{\frac{6\,M}{K(n + 2\,m\,n_1^3)}}.$$

Dieser Querschnitt findet besonders Anwendung bei Wellen und Stäben, die auf Knickfestigkeit beansprucht werden. In beiden Fällen ist eine congruente Symmetrie in Beziehung auf beide Axen am zweckmässigsten. Alsdann wird $b = \frac{1}{2}(h - \delta)$, $\partial = \delta$, mithin, wenn wir $\frac{\delta}{h} = n$ setzen,

$$75. \quad \begin{cases} F = 2\,h\,\delta - \delta^2 = n\,(2 - n)\,h^2, \\ W = \frac{1}{12}(h^3\delta + h\,\delta^3 - \delta^4) = \frac{n}{12}(1 + n^2 - n^3)\,h^4. \end{cases}$$

Das Trägheitsmoment ist für alle Schweraxen constant.

Fig. 65.



Die Faserspannung N wird bei sich drehenden Wellen am grössten, wenn a am grössten ist, und dies tritt ein, wenn eine Ecke A (Fig. 65) in die Kraftebene fällt. Alsdann ist $a = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + d^2} = \frac{1}{2}\,h\sqrt{1 + n^2}$. Die Festigkeitsbedingung $K'\,W = M\,a$ wird demnach

$$76. \quad \begin{cases} K'(h^3\delta + h\,\delta^3 - \delta^4) = 5\,M\sqrt{h^2 + d^2}, \\ h = \dfrac{6\,M\sqrt{1 + n^2}}{K'\,n\,(1 + n^2 - n^3)}. \\ F = \dfrac{36\,(2 - n)\,(1 + n^2)\,M^2}{K'^2\,n\,(1 + n^2 - n^3)^2}. \end{cases}$$

Hiernach ergiebt sich z. B. für $n = 0,\ 0{,}2\ \ 0{,}4\ \ 0{,}6\ \ 0{,}8\ \ 1$ bezüglich $F = 316,\ 139,\ 87,\ 70,\ 72\ .\ \frac{M^2}{K'^2}$. Am kleinsten wird F für $n = 0{,}877$.

Wenn der Körper auf Knickfestigkeit beansprucht wird, so ist in dem Falle, dass die Enden frei sind, und eine Kraft P im Schwerpunkte jeder Endfläche wirkt, bei constantem Querschnitte nach 19 (§. 172):

Digitized by Google

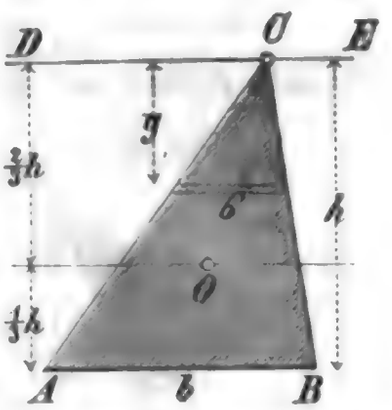
$$77.\quad \begin{cases} P = \dfrac{\pi^2 E}{12\,l^2}(h^3\delta + h\,\delta^3 - \delta^4), \\ h = \sqrt[4]{\dfrac{12\,P\,l^2}{\pi^2 E\,n\,(1+n^2-n^3)}}, \\ F = \sqrt{\dfrac{12\,n\,(2-n)^2 P\,l^2}{\pi^2 E\,(1+n^2-n^3)}}. \end{cases}$$

Für $n = 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8 \quad 1$ ergiebt sich bezüglich $F = 0 \quad 0{,}87 \quad 1{,}07 \quad 1{,}12 \quad 1{,}11 \quad 1{,}10 \sqrt{\frac{P\,l^2}{E}}$. F wird am grössten für $n = 0{,}69$, am kleinsten für $n = 0$, so dass es zweckmässig ist, δ möglichst klein anzunehmen.

§. 212. Das Dreieck. Die eine Seite AB des Dreiecks (Fig. 66) sei $= b$ und die zugehörige Höhe $= h$. Wir legen zunächst die Axe DE durch die Spitze C parallel zu AB. Ist b' die Länge eines zu AB parallelen Streifens im Abstande y von C, so ist $\Omega_1 = \int_0^h b'\,y\,dy$, $W_1 = \int_0^h b'\,y^2\,dy$.

Nun aber ist $b' = b\,\frac{y}{h}$, mithin

Fig. 66.



$$\Omega_1 = \frac{b}{h}\int_0^h y^2\,dy, \quad W_1 = \frac{b}{h}\int_0^h y^3\,dy,$$

d. i.

$$78.\quad \Omega_1 = \frac{1}{3}\,b\,h^2 = \frac{2}{3}\,F\,h,$$

$$79.\quad W_1 = \frac{1}{4}\,b\,h^3 = \frac{1}{2}\,F\,h^2.$$

Da der Abstand des Schwerpunktes von DE $= \frac{2}{3}\,h$ ist, so ist für die zu AB parallele Schweraxe $W = W_1 - F\,(\frac{2}{3}\,h)^2 = \frac{1}{2}\,F\,h^2 - \frac{4}{9}\,F\,h^2$ oder

$$80.\quad W = \frac{1}{36}\,b\,h^3 = \frac{1}{18}\,F\,h^2.$$

Für die Seite AB ergiebt sich nun nach 65 und 64 $\Omega_2 = 0 + F \cdot \frac{1}{3}\,h$, $W_2 = W + F\,(\frac{1}{3}\,h)^2$, d. i.

$$81.\quad \Omega_2 = \frac{1}{6}\,b\,h^2 = \frac{1}{3}\,F\,h,$$

$$82.\quad W_2 = \frac{1}{12}\,b\,h^3 = \frac{1}{6}\,F\,h^2.$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, so ergiebt sich in Beziehung auf die Symmetrieaxe nach 82: $W' = 2 \cdot \frac{1}{12}\,b\left(\frac{h}{2}\right)^3$, d. i.

$$83.\quad W' = \frac{1}{48}\,b^3\,h.$$

Für einen Rhombus mit den Diagonalen b, h würde sich nach 83 für die beiden Diagonalen $W = 2 \cdot \frac{1}{48}\,h^3\,\frac{b}{2}$, $W' = 2 \cdot \frac{1}{48}\,b^3\,\frac{h}{2}$, d. i.

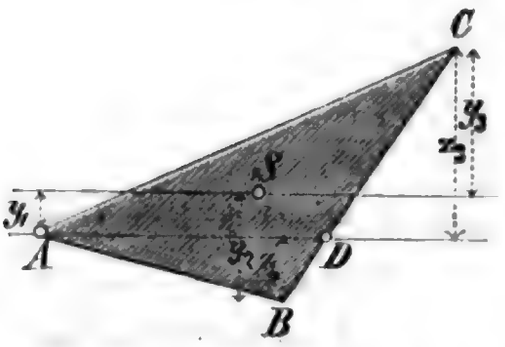
$$W = \frac{1}{48}\,b\,h^3, \quad W' = \frac{1}{48}\,b^3\,h$$

ergeben.

Digitized by Google

§. 213. Fortsetzung.

Fig. 67.



Wir legen die Axe in beliebiger Richtung durch eine Ecke A (Fig. 67); die Axe schneide die gegenüberliegende Seite in D. Bezeichnen wir die Länge von AD mit b, den Abstand der Ecken B und C von der Axe mit z_1, z_2, so ergiebt sich nach 81, 82 $\Omega = \frac{1}{6} b (z_2^2 - z_1^2)$, $W = \frac{1}{12} b (z_2^2 + z_1^2)$. Nun aber ist $F = \frac{1}{2} b (z_2 + z_1)$, daher $\Omega = \frac{1}{3} F \frac{z_2^2 - z_1^2}{z_2 + z_1}$, $W = \frac{1}{6} F \frac{z_2^3 + z_1^3}{z_2 + z_1}$, d. i.

$$84. \quad \Omega = \frac{1}{3} F (z_2 - z_1).$$

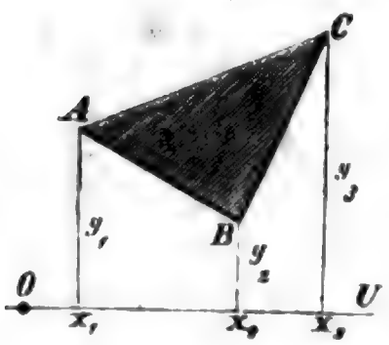
$$85. \quad W = \frac{1}{6} F (z_2^2 - z_2 z_1 + z_1^2).$$

Der Abstand des Schwerpunktes von AD ist hiernach $\frac{1}{3} (z_2 - z_1)$. Demnach ergiebt sich für eine zu AD parallele Schweraxe, wenn y_1, y_2, y_3 die Abstände der Ecken A, B, C von derselben sind, nach 67, $W = \frac{1}{6} F (z_2^2 - z_2 z_1 + z_1^2) - \frac{1}{9} F (z_2 - z_1)^2 = \frac{1}{18} F (z_2^2 + z_2 z_1 + z_1^2)$. Nun aber ist $z_2 = -(y_2 - y_1)$, $z_1 = y_3 - y_1$, wenn wir y_1, y_2, y_3 auf der einen Seite als positiv, auf der andern als negativ einführen. Dies eingesetzt, giebt

$$86. \quad W = \frac{1}{18} F (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_2 y_3 - y_3 y_1 - y_1 y_2).$$

Dieselbe Formel gilt auch noch für das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Schweraxe, wenn y_1, y_2, y_3 die Abstände von einer andern zur Schweraxe parallelen Axe bedeuten, da auch dann noch $z_2 = -(y_2 - y_1)$, $z_1 = y_3 - y_1$ ist.

Fig. 68.



Für eine ganz beliebige Axe OU (Fig. 68) ergiebt sich nun, wenn y_1, y_2, y_3 die Abstände der drei Ecken von dieser Axe sind, da alsdann der Abstand des Schwerpunktes von dieser Axe $= \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$ ist, $\Omega = \frac{1}{3} F (y_1 + y_2 + y_3)$, $W = \frac{1}{18} F (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_2 y_3 - y_3 y_1 - y_1 y_2) - \frac{1}{9} F (y_1 + y_2 + y_3)^2$, d. i.

$$87. \quad \Omega = \frac{1}{3} F (y_1 + y_2 + y_3).$$

$$88. \quad W = \frac{1}{6} F (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 + y_1 y_2).$$

Bezeichnen wir den Abstand der Ecken A, B, C von einer andern zu OU senkrechten Axe mit x_1, x_2, x_3, so ist $F = \frac{1}{2} [(x_3 - x_1)(y_3 + y_1) - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - (x_3 - x_2)(y_3 + y_2)]$ oder

$$89. \quad F = \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)].$$

Hiernach würde es nun auch möglich sein, das statische und Trägheitsmoment für ein beliebiges Vieleck zu bestimmen.

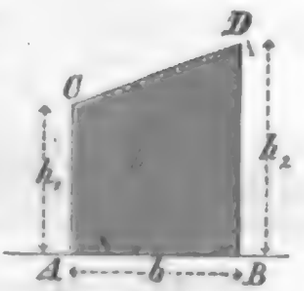
§. 214. Das Trapez.

a) Wir bestimmen zunächst das statische und Trägheits-Moment für

tized by Google

eine der nicht parallelen Seiten AB (Fig. 69). Die Länge dieser Seite sei = b und die Abstände der anderen Ecken C, D von derselben = h_1, h_2. Indem wir uns das Trapez parallel zu den parallelen Seiten in streifenförmige Elemente von der Höhe h zerlegt denken, ergiebt sich nach 69 (§. 210), die Winkel bei A und B mögen rechte oder schiefe sein,

Fig. 69.



$$\Omega = \tfrac{1}{2}\int_0^b h^2\,dx, \quad W = \tfrac{1}{3}\int_0^b h^3\,dx.$$

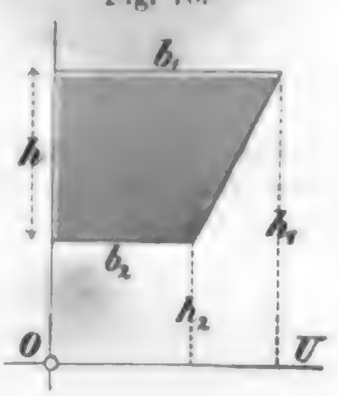
Nun aber ist $h - h_1 : h_2 - h_1 = x : b$, also $h = h_1 + (h_2 - h_1)\frac{x}{b}$. Die Einsetzung und Integration giebt

$$90.\quad \Omega = \frac{1}{6} b\,(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2)$$

$$91.\quad W = \frac{1}{12} b\,(h_1^3 + h_1^2 h_2 + h_1 h_2^2 + h_2^3) = \frac{1}{6} F\,(h_1^2 + h_2^2).$$

b) Wir legen jetzt die Axe parallel zu den beiden parallelen Seiten b_1, b_2 (Fig. 70) und bezeichnen die Abstände derselben von der Axe mit h_1, h_2, die Höhe des Trapezes mit h. Wir denken uns das Trapez in zwei Dreiecke mit den Flächen $\frac{1}{2} b_1 h$ und $\frac{1}{2} b_2 h$ zerlegt. Die Anwendung der Formeln 87 und 88 giebt alsdann

Fig. 70.



$$92.\quad \Omega = \frac{1}{6} h\,[b_1\,(2 h_1 + h_2) + b_2\,(h_1 + 2 h_2)].$$

$$W = \frac{1}{12} h\,[b_1\,(2 h_1^2 + h_2^2 + h_1^2 + 2 h_1 h_2) + b_2\,(h_1^2 + 2 h_2^2 + 2 h_1 h_2 + h_2^2)]$$

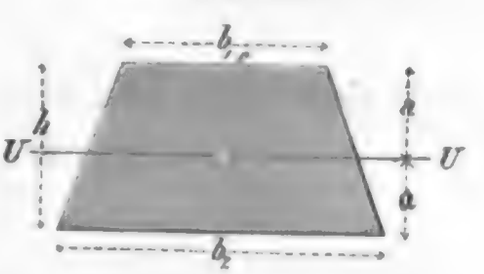
oder

$$93.\quad W = \frac{1}{12} h\,[b_1\,(3 h_1^2 + 2 h_1 h_2 + h_2^2) + b_2\,(h_1^2 + 2 h_1 h_2 + 3 h_2^2)]$$

$$= \frac{1}{12} h\,[b_1 + b_2)\,(h_1 + h_2)^2 + 2 b_1 h_1^2 + 2 b_2 h_2^2].$$

c) Hiernach ist nun auch leicht, das Trägheitsmoment für eine zu den parallelen Seiten b_1, b_2 parallele Schweraxe UU (Fig. 71) zu bestimmen. Das statische Moment in Beziehung auf die Seiten b_1, b_2 ist bei der Gesammthöhe h nach 92 bezüglich $\frac{1}{6} h^2(2 b_1 + b_2)$, $\frac{1}{6} h^2(b_1 + 2 b_2)$. Der Flächeninhalt ist $\frac{1}{2} h\,(b_1 + b_2)$. Demnach ist der Abstand der Schweraxe von den Seiten b_1, b_2:

Fig. 71.



$$a = \frac{2 b_1 + b_2}{3\,(b_1 + b_2)} h, \quad a = \frac{b_1 + 2 b_2}{3\,(b_1 + b_2)} h.$$

Das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seite b_1 ist nach 93 $\frac{1}{12} h\,[(b_1 + b_2) h^2 + 4 b_1 h^2] = \frac{1}{12}(3 b_1 + b_2) h^3$; daher ist nach 64:

$$W = \frac{1}{12}(3\,b_1 + b_2)\,h^3 - \frac{1}{2}(b_1 + b_2)\,h\left(\frac{2\,b_1 + b_2}{3\,(b_1 + b_2)}\,h\right)^2,$$

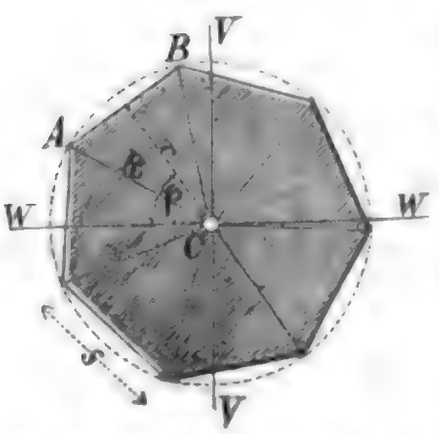
was sich reduciren lässt auf

$$94.\quad W = \frac{1}{36}\,\frac{b_1^{\,2} + 4\,b_1\,b_2 + b_2^{\,2}}{b_1 + b_2}\,h^3.$$

Direkt findet der trapezförmige Querschnitt wenig Anwendung. Wohl aber tritt das Trapez sehr häufig in zusammengesetzten Formen auf, wie Winkeleisen, T-eisen, Eisenbahnschienen u. s. w.

§. 215. Das regelmässige Vieleck. Es bezeichne n die Anzahl der Seiten, s die Seite, r den Radius des eingeschriebenen, R den Radius des umschriebenen Kreises. Wir denken uns das Vieleck durch Verbindung der Ecken mit dem Mittelpunkte C (Fig. 72) in Dreiecke zerlegt. Die Symmetrieaxe eines solchen Dreiecks ABC bilde mit der Axe WW den Winkel φ. Das Trägheitsmoment des Dreiecks für die durch C gehende Symmetrieaxe ist nach 83 (§. 212) $= \frac{1}{48}\,s^3 r$ und für eine zur Symmetrieaxe senkrechte Axe nach 79 (§. 212) $= \frac{1}{4}\,s\,r^3$. Daher ist das Trägheitsmoment des Dreiecks für die Axe WW nach 16 (§. 65) $= \frac{1}{48}\,s^3 r\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\,s\,r^3\sin^2\varphi$, da das in §. 65 mit V bezeichnete Integral für die beiden genannten Axen des Dreiecks Null wird. Demnach ist das Trägheitsmoment des ganzen Vielecks

Fig. 72.



$$W = \frac{1}{48}\,s\,r\,[s^2\,\Sigma\cos^2\varphi + 12\,r^2\,\Sigma\sin^2\varphi].$$

Ebenso ergiebt sich als Trägheitsmoment W′ für die zu WW senkrechte Schweraxe

$$W' = \frac{1}{48}\,s\,r\,[s^2\,\Sigma\sin^2\varphi + 12\,r^2\,\Sigma\cos^2\varphi].$$

Addirt man diese beiden Gleichungen und beachtet, dass nach §. 65 für das regelmässige Vieleck $W' = W$ und dass $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ und $\Sigma 1 = n$ ist, so ergiebt sich

$$95.\quad W = \frac{n}{96}\,s\,r\,(s^2 + 12\,r^2).$$

Da $s^2 = 4\,(R^2 - r^2)$ und die Fläche F des Vielecks $= \frac{1}{2}\,n\,s\,r$ ist, so ergiebt sich auch

$$96.\quad W = \frac{1}{12}\,F\,(R^2 + 2\,r^2).$$

Ist der Centriwinkel einer Seite $= \alpha$, so ist $r = R\cos\frac{1}{2}\alpha$, mithin auch

$$97.\quad W = \frac{1}{12}\,F\,R^2\,(2 + \cos\alpha)$$
$$= \frac{1}{6}\,F^2\,\frac{2 + \cos\alpha}{n\sin\alpha}.$$

Ist W_1 das Trägheitsmoment eines Kreises mit gleichem Flächeninhalte, so ist bei dem Radius r_1 $W_1 = \frac{\pi}{4}\,r_1^{\,4} = \frac{F^2}{4\pi}$, mithin

Digitized by Google

$$98.\quad W = \frac{2\pi(2+\cos\alpha)}{3\,n\sin\alpha}\,W_1.$$

Hiernach ergiebt sich z. B. für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ bezüglich $W = 1{,}209$ $1{,}047$ $1{,}016$ $1{,}008$ $1{,}003$ $1{,}001\ .\ W_1$.

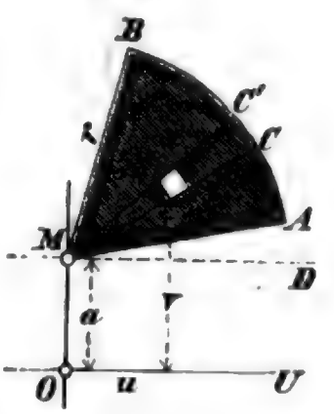
Bei gerader Seitenzahl ist die Tragkraft am grössten und kleinsten, je nachdem der kleine Radius r oder grosse Radius R in der Kraftebene liegt, also ist $\max M = \frac{K'W}{r}$, $\min M = \frac{K'W}{R}$.

Bei ungerader Seitenzahl ist der Abstand der gespanntesten und gedrücktesten Faser verschieden. Die Tragkraft wird am kleinsten, wenn der grosse Radius R entweder auf der ausgedehnten, oder auf der zusammengedrückten Seite in die Kraftebene fällt. Bei beliebiger Lage ist $M = \frac{KW}{a}$ oder $M = \frac{\mathfrak{K}W}{a}$ und von diesen Werthen ist der kleinere maassgebend. Wenn sich das Vieleck dreht, so nimmt der eine der Werthe a, a zu, während der andere abnimmt. M wird daher am grössten, wenn $\frac{K}{a} = \frac{\mathfrak{K}}{a}$ oder $\frac{a}{a} = \frac{K}{\mathfrak{K}}$ ist, wenn diese Lage überhaupt möglich ist. Ist z. B. $K = \mathfrak{K}$, so tritt diese Lage ein, wenn ein grosser und ein kleiner Radius senkrecht auf der Kraftebene steht. Ist diese Lage nicht möglich, so wird die Tragkraft am grössten, wenn ein kleiner Radius in der Kraftebene liegt, und zwar auf der ausgedehnten oder gedrückten Seite, je nachdem $K \lessgtr \mathfrak{K}$ ist.

B. Krummlinige Figuren.

§. 216. Der Kreisabschnitt. Der Kreis habe den Radius r und der Mittelpunkt von der Axe OU (Fig. 73) den Abstand a. Die Radien MA, MB, welche den in Rede stehenden Kreisabschnitt begrenzen, mögen mit der Axe OU oder einer Parallelen MD zu dieser die Winkel α, β einschliessen. Ein beliebiger Radius MC bilde mit MD den Winkel φ. Ist ϱ der Abstand eines beliebigen Punktes in MC von M, so ist für ein dreieckiges Element MCC'

Fig. 73.



$$d\Omega = d\varphi \int_0^r \varrho\, v\, d\varrho, \quad dW = d\varphi \int_0^r \varrho\, v^2\, d\varrho.$$

Nun aber ist $v = a + \varrho\sin\varphi$, mithin

$$d\Omega = d\varphi \int_0^r \varrho\,(a + \varrho\sin\varphi)\,d\varrho = \tfrac{1}{6}\,r^2\,d\varphi\,(3\,a + 2\,r\sin\varphi)$$

$$dW = d\varphi \int_0^r \varrho\,(a + \varrho\sin\varphi)^2\,d\varrho = \tfrac{1}{12}\,r^2\,d\varphi\,(6\,a^2 + 8\,a\,r\sin\varphi + 3\,r^2\sin^2\varphi).$$

Demnach ist nun für den ganzen Kreisabschnitt

$$\Omega = \frac{1}{6} r^2 \int_\alpha^\beta (3a + 2r\sin\varphi)\, d\varphi$$

$$W = \frac{1}{12} r^2 \int_\alpha^\beta (6a^2 + 8ar\sin\varphi + 3r^2\sin^2\varphi)\, d\varphi,$$

d. i.

$$99.\quad \Omega = \frac{1}{6} r^2 [3a(\beta - \alpha) + 2r(\cos\alpha - \cos\beta)],$$

$$100.\quad W = \frac{1}{48} r^2 [6(4a^2 + r^2)(\beta - \alpha) + 32ar(\cos\alpha - \cos\beta) - 3r^2(\sin 2\beta - \sin 2\alpha)].$$

Bezeichnen wir die Abstände der Punkte A, B von der Axe OU mit y_1, y_2, von dem zu OU senkrechten Durchmesser mit x_1, x_2, so ist $r\cos\alpha = x_1$, $r\cos\beta = x_2$, $r\sin\alpha = y_1 - a$, $r\sin\beta = y_2 - a$. Daher wird auch

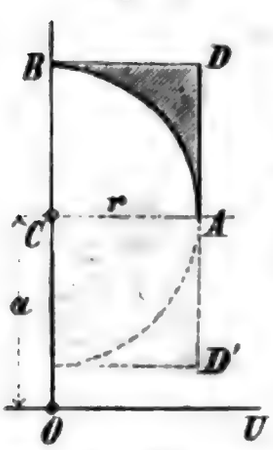
$$101.\quad \Omega = \frac{1}{6} r^2 [3a(\beta - \alpha) + 2(x_1 - x_2)],$$

$$102.\quad W = \frac{1}{24} r^2 [3(4a^2 + r^2)(\beta - \alpha) + 19a(x_1 - x_2) - 6(x_1 y_1 - x_2 y_2)].$$

Sollen diese Formeln allgemeine Giltigkeit haben, so muss man für MA den am weitesten nach rechts gedrehten Radius nehmen (wenn man die rechte Seite von OM als die positive annimmt).

Für den Viertelkreis wird, je nachdem derselbe oberhalb oder unterhalb MD liegt, $\alpha = 0$ oder -90^0, $\beta = 90^0$ oder 0, daher

Fig. 74.



$$103.\quad \Omega = \frac{1}{12} r^2 (3\pi a \pm 4r),$$

$$104.\quad W = \frac{1}{48} r^3 [3\pi(4a^2 + r^2) \pm 32ar].$$

Hiernach ergiebt sich leicht für eine Fläche, welche von einem Viertelkreise AB (Fig. 74) und den Tangenten AD, BD eingeschlossen wird, indem man diese Fläche als Differenz eines Quadrates und eines Kreisausschnittes ansieht,

$$105.\quad \Omega = \frac{1}{12} r^2 [3(4 - \pi)a \pm 2r],$$

$$106.\quad W = \frac{1}{48} r^3 [12(4 - \pi)a^2 \pm 16ar + (16 - 3\pi)r^2].$$

Das obere oder untere Zeichen ist zu wählen, je nachdem die Fläche oberhalb oder unterhalb des Radius AC liegt.

§. 217. Kreisabschnitt. Der Kreisabschnitt (Fig. 75) habe den Radius r, und den halben Centriwinkel α.

a) Die Axe UU sei der Sehne AB parallel. Wir betrachten den Kreisabschnitt als Differenz des Kreisabschnittes MACB und des Dreiecks MAB. Für den ersteren ergiebt sich nach 99 u. 100, wenn wir dort $90^0 - \alpha$ für α und $\beta = 90^0 + \alpha$ setzen, $\Omega = \frac{1}{3} r^2 (3a\alpha + 2r\sin\alpha)$, $W = \frac{1}{24} r^2 [6(4a^2 + r^2)\alpha + 32ar\sin\alpha - 3r^2\sin 2\alpha]$. Für das Dreieck wird

nach 87 und 88, wenn wir dort $F = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha$, $y_1 = a$, $y_2 = y_3 = a + r\cos\alpha$ setzen, $\Omega = \frac{1}{3} r^2 (3a + 2r\cos\alpha)\sin 2\alpha$, $W = \frac{1}{12} r^3 (6a^2 + 8ar\cos\alpha + 3r^2\cos^2\alpha)\sin 2\alpha$. Daher ergiebt sich für den Kreisabschnitt

Fig. 75.

107. $$\Omega = \frac{1}{3} r^2 [3a(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) \pm 2r\sin^3\alpha].$$

108. $$W = \frac{1}{24} r^2 [3(4a^2 + r^2)(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) \pm 2r\sin\alpha(8a\sin^2\alpha \mp 3r\cos^3\alpha)].$$

Für den Fall, dass, wie in der Figur, der Kreisabschnitt oberhalb M liegt, ergiebt sich das obere Vorzeichen. Das untere ergiebt sich in gleicher Weise für den Fall, dass der Kreisabschnitt unterhalb M liegt.

Der Flächeninhalt des Kreisabschnittes ist $F = r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$.

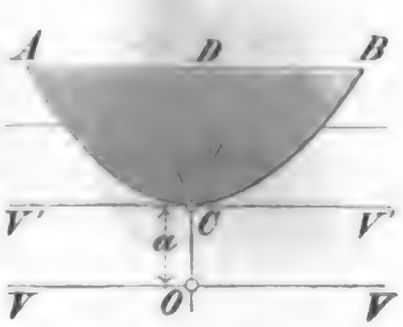
b) Für die Symmetrieaxe OC ist das Trägheitsmoment des Kreisausschnittes nach 100, indem wir dort $a = 0$, $-\alpha$ für α und α für β setzen, $W = \frac{1}{8} r^4 (2\alpha - \sin 2\alpha)$ und das des Dreiecks nach 80 $\frac{1}{6} r^4 \sin^3\alpha\cos\alpha$. Mithin ist das Trägheitsmoment des Kreisabschnittes

$$109. \quad W' = \frac{1}{24} r^4 (6\alpha - 3\sin 2\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha).$$

Für eine beliebige Lage der Axe ist das Trägheitsmoment nun nach 16 (§. 65) zu bestimmen.

§. 218. Die Parabel. Wir wollen uns bei der Parabel nur auf das wichtigste Flächenstück beschränken, nämlich auf einen durch eine Senkrechte AB (Fig. 76) zur Axe getrennten Abschnitt ABC. Ist die Länge einer Sehne im Abstande x vom Scheitel C = y, so ist $y = A\sqrt{x}$. Bezeichnen wir die Sehne AB mit b, die Höhe CD mit h, so ist $b = A\sqrt{h}$, also $A = \frac{b}{\sqrt{h}}$, mithin

Fig. 76.



$$y = b\sqrt{\frac{x}{h}}.$$

a) Wir bestimmen zunächst die Momente für die Scheiteltangente V'V'. Für dieselbe ist

$$\Omega = \int_0^b y\,x\,dx = \frac{b}{\sqrt{h}} \int_0^h x^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

$$W = \int_0^b y\,x^2\,dx = \frac{b}{\sqrt{h}} \int_0^h x^{\frac{5}{2}}\,dx.$$

das ist

$$\Omega = \frac{2}{5} b h^2 \qquad W = \frac{2}{7} b h^3.$$

Digitized by Google

Da der Flächeninhalt $F = \frac{2}{3} b h$ ist, so ergiebt sich als Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel $\frac{3}{5} h$. Daher ist für die zur Scheiteltangente parallele Schweraxe $W = \frac{2}{7} b h^3 - \frac{2}{3} b h (\frac{3}{5} h)^2$, d. i.

$$W = \frac{8}{175} b h^3.$$

Für eine um a vom Scheitel entfernte und der Scheiteltangente parallele Axe VV wird daher $\mathfrak{Q} = \frac{2}{3} b h (a + \frac{3}{5} h)$, $W = \frac{8}{175} b h^3 + \frac{2}{3} b h (a + \frac{3}{5} h)^2$, d. i.

$$110. \quad \mathfrak{Q} = \frac{2}{15} b h (5 a + 3 h),$$

$$111. \quad W = \frac{2}{105} b h (35 a^2 + 42 a h + 15 h^2).$$

Wenn der Parabelabschnitt zwischen dem Scheitel C und der Axe VV liegt, so ist das zweite Glied in beiden Parenthesen negativ zu nehmen.

b) Als Trägheitsmoment W′ für die Axe CD der Parabel ergiebt sich nach 2 §. 196

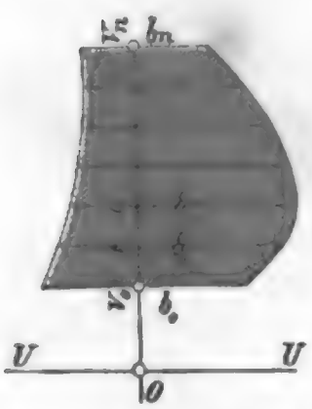
$$W = \frac{1}{12} \int_0^h y^3 dx = \frac{b^3}{12\sqrt{h^3}} \int_0^h x^{\frac{3}{2}} dx, \text{ d. i.}$$

$$112. \quad W = \frac{1}{30} b^3 h.$$

Diese Formeln können auch zuweilen als Näherungsformeln für flache Kreisabschnitte angewendet werden.

§. 219. Simpson'sche Regel. Bei unregelmässig begrenzten Flächen benutzt man am besten die bekannte Simpson'sche Regel zur Bestimmung des statischen nnd Trägheitsmomentes.

Fig. 77.

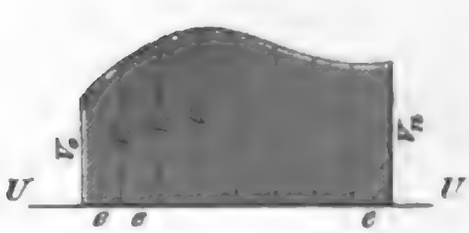


a) Theilt man die Fläche durch zur Axe parallele Sehnen, welche von einander einen gleichen Abstand e haben, in eine gerade Anzahl von Theilen (Fig. 77), so ist, wenn wir die Sehnen mit $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n$, ihre Abstände von UU mit $v_0, v_1, v_2, \ldots v_n$ bezeichnen, $\mathfrak{Q} = \int b v \, dv$, $W = \int b v^2 dv$, d. i.

$$113. \quad \mathfrak{Q} = \frac{1}{3} e [b_0 v_0 + b_n v_n + 4 (b_1 v_1 + b_3 v_3 + \ldots) + 2 (b_2 v_2 + b_4 v_4 + \ldots)],$$

$$114. \quad W = \frac{1}{3} e [b_0 v_0^2 + b_n v_n^2 + 4 (b_1 v_1^2 + b_3 v_3^2 + \ldots) + 2 (b_2 v_2^2 + b_4 v_4^2 + \ldots)].$$

Fig. 78.



b) Theilt man die von der Geraden UU (Fig. 78) begrenzte Fläche durch zu UU senkrechte Ordinaten, welche von einander einen gleichen Abstand e haben, in eine gerade Anzahl Theile, so ist, wenn man die Ordinaten mit $v_0, v_1, v_2, \ldots v_n$ bezeichnet, in Beziehung auf die Axe UU $\mathfrak{Q} = \frac{1}{2} \int v^2 dx$, $W = \frac{1}{3} \int v^3 dx$, d. i.

Digitized by Google

115. $\mathfrak{Q} = \frac{1}{6} e [v_0^2 + v_n^2 + 4 (v_1 + v_3 + \ldots) + 2 (v_2 + v_4 + \ldots)]$

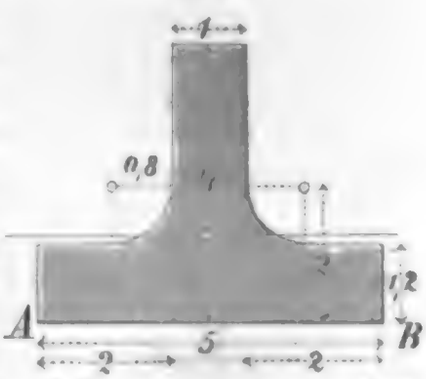
116. $W = \frac{1}{9} e [v_0^3 + v_n^3 + 4 (v_1^3 + v_3^3 + \ldots) + 2 (v_2^3 + v_4^3 + \ldots)]$.

§. 220. Aehnliche Querschnitte. **Nicht selten wählt man in der Praxis für bestimmte Constructionstheile ähnliche Querschnitte. Aus dem in §. 66 über proportionale Querschnitte Gesagten folgt für ähnliche Querschnitte sofort, dass sich die Trägheitsmomente zu einander, wie die vierten Potenzen entsprechender Querschnittsdimensionen verhalten.**

Da sich die Abstände a, a der gespanntesten Fasern wie entsprechende Querschnittsdimensionen verhalten, so folgt aus den Festigkeitsbedingungen $K = \frac{M a}{W}$, $\mathfrak{K} = \frac{M a}{W}$, dass sich bei gleichen Dimensionen die Tragkräfte zu einander, wie die dritten Potenzen entsprechender Querschnittsdimensionen verhalten.

Beispiel. Der Querschnitt habe die in Fig. 79 angegebenen Dimensionen. Der Flächeninhalt ist $F = 1 . 4 + 4 . 1{,}2 + 2 . \left(0{,}8^2 - \frac{\pi}{4} . 0{,}8^2\right) = 9{,}078$. Das statische Moment in Beziehung auf AB ist nach 67 und 100 $\mathfrak{Q} = \frac{1}{2} . 1 . 4^2 + \frac{1}{2} . 4 . 1{,}2^2 + 2 . \frac{1}{12} . 0{,}8^2 [3 (4 - \pi) . 2 - 2 . 0{,}8] = 11{,}258$. Daher ist der Abstand des Schwerpunktes von AB $= \frac{11{,}258}{9{,}078} = 1{,}241$. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf AB wird nach 66 und 103 $= \frac{1}{3} . 1 . 4^3 + \frac{1}{3} . 4 . 1{,}2^3 + 2 . \frac{1}{4 \cdot 8} . 0{,}8^2 [12 (4 - \pi) 2^2 - 16 . 2 . 0{,}8 + (16 - 3\pi) 0{,}8^2] = 24{,}17$. Also ist für eine zu AB parallele Schweraxe $W = 24{,}17 - 9{,}078 . 1{,}241^2 = 24{,}17 - 13{,}98 = 10{,}19$.

Fig. 79.



Für Querschnitte mit denselben Verhältnissen wird daher bei der Höhe h $W : 10{,}19 = h^4 : 4^4$ oder

$$W = 0{,}0398\, h^4.$$

Ist die obere Seite die gedrückte, so ist $a = 1{,}241$, $a = 4 - 1.241 = 2{,}759$, also allgemein $a = \frac{1.241}{4} h = 0{,}310\, h$, $a = \frac{2.759}{4} h = 0{,}690\, h$. Handelt es sich um Gusseisen, so tritt am leichtesten ein Bruch durch Zerrissen ein, also ist zu setzen

$$K = \frac{M a}{W} = \frac{M . 0{,}310\, h}{0{,}0398\, h^4} = 7{,}79 \frac{M}{h^3}, \text{ also}$$

$$M = 0{,}128\, K h^3; \quad h = 1{,}983 \sqrt[3]{\frac{M}{K}}.$$

§. 221. Aehnliche Körper. Wir denken uns zwei ähnliche Körper A, A_1 aus demselben Materiale, deren entsprechende Dimensionen sich wie 1 : n verhalten. Die Kräfte mögen auf beide Körper auf gleiche Weise vertheilt sein und die zulässigen Gesammtlasten mögen sich wie 1 : m verhalten. Alsdann ist

$$K = \frac{P}{F} + \frac{M a}{W} = \frac{P_1}{F_1} + \frac{M_1 a_1}{W_1}.$$

Nun aber ist $a_1 = n a$, $F_1 = n^2 F$, $W_1 = n^4 W$, $P_1 = m P$, $M_1 = m n M$, mithin

Digitized by Google

$$\frac{P}{F}+\frac{M\,a}{W}=\frac{m\,P}{n^2F}+\frac{m\,M}{n^2W}$$

oder

$$m=n^2,$$

d. h. die Lasten, welche zwei ähnliche Körper aufnehmen können, sind dem Quadrate entsprechender Dimensionen proportional.

Anwendung bei Belastungsproben mit Modellen.

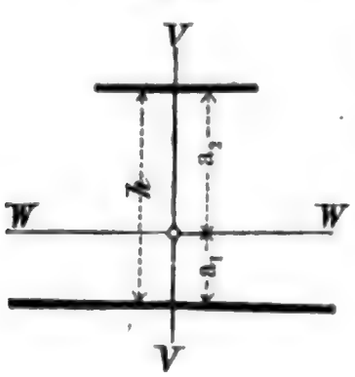
XXIV. Kapitel.

Idealer I-förmiger Querschnitt.

§. 222. Beste Querschnittsform. Nach den Festigkeitsbedingungen $K\,W = M\,a$, $\Re\,W = M\,a$ ergiebt sich, wenn sich die Lage des Körpers gegen die Kraftebene nicht ändern kann, die kleinste Querschnittsfläche, wenn man das Material möglichst weit von der neutralen Axe entfernt. Die grösste zulässige Höhe des Körpers ist in der Regel durch praktische Rücksichten bestimmt. Der beste ideale Querschnitt wird demnach aus zwei zur neutralen Axe parallelen Geraden bestehen (Fig. 80).

In Wirklichkeit kann natürlich die Höhe dieser beiden Flächen nicht unendlich klein sein und ausserdem müssen dieselben zur Aufnahme der Schubspannungen durch eine Fläche verbunden sein. Wir wollen indess jetzt voraussetzen, dass diese Höhe der Flächen unendlich klein sei und dass eine Verbindung fehle, da wir dadurch wenigstens Näherungswerthe für die nöthige Grösse der Flächen erhalten.

Fig. 80.



Die beiden Theile, aus welchen der Körper besteht, nennen wir Gurte.

Wir bezeichnen mit

h die Gesammthöhe des Querschnittes,

f_1, f_2 den Flächeninhalt der Querschnitte beider Gurte,

a_1, a_2 den Abstand derselben vom Schwerpunkte,

φ das Verhältniss $\frac{f_1}{f_2}$.

Der eine Gurt hat einen Zug, der andere einen Druck aufzunehmen. Der Index 1 entspreche dem gezogenen, der Index 2 dem gedrückten Gurte.

§. 223. Festigkeitsbedingungen. Es ist $(f_1+f_2)\,a_1 = f_2\,h$. $(f_1+f_2)\,a_2 = f_1\,h$, mithin

$$117.\quad a_1=\frac{f_2\,h}{f_1+f_2}=\frac{h}{1+\varphi},\quad a_2=\frac{f_1\,h}{f_1+f_2}=\frac{\varphi\,h}{1+\varphi}.$$

Demnach ist das Trägheitsmoment

$$W = f_1 a^2 + f_2 a_2^2 = \frac{f_1 f_2^2 + f_2 f_1^2}{(f_1 + f_2)^2} h^2,$$

d. i.

$$118. \quad W = \frac{f_1 f_2 h^2}{f_1 + f_2}.$$

Die Festigkeitsbedingungen $K = \frac{M a}{W}$, $\mathfrak{K} = \frac{M a}{W}$ gehen nun über in

$$K = \frac{M}{f_1 h}, \quad \mathfrak{K} = \frac{M}{f_2 h}$$

oder

$$119. \quad f_1 = \frac{M}{K h}, \quad f_2 = \frac{M}{\mathfrak{K} h};$$

$$f_1 : f_2 = \mathfrak{K} : K,$$

d. h. die Querschnitte der Gurte sollen sich umgekehrt verhalten, wie die entsprechenden Sicherheitscoefficienten für Zug und Druck.

Somit ergeben sich für Holz und Schmiedeeisen nahe gleiche Gurte, während beim Gusseisen der gedrückte Gurt viel schwächer ausfällt, als der gezogene.

Beide Gurte werden um so schwächer, je grösser h ist. Der Körper soll daher möglichst hoch sein. Wie schon erwähnt, ist die grösste zulässige Höhe meist durch praktische Rücksichten bedingt.

Setzt man die Werthe für f_1, f_2, in den Ausdruck für W, so ergiebt sich

$$120. \quad W = \frac{M h}{K + \mathfrak{K}}.$$

§. 224. Träger von constanter Festigkeit bei constanter Höhe und gleichmässiger Belastung. Macht man die Querschnittsfläche an jeder Stelle nicht grösser, als es die Festigkeit verlangt, so folgt aus 116, dass der Querschnitt der Gurte dem Momente proportional sein müsse.

Liegt der Träger mit beiden Enden auf Stützen und ist derselbe gleichmässig belastet, so ist nach §. 105 $M = \frac{1}{2} q x (l - x)$, mithin

$$f_1 = \frac{q x (l - x)}{2 K h}, \quad f_2 = \frac{q x (l - x)}{2 \mathfrak{K} h},$$

oder, wenn man den Querschnitt in der Mitte mit f_1', f_2' bezeichnet, wobei $f_1' = \frac{q l^2}{8 K h}$, $f_2' = \frac{q l^2}{8 \mathfrak{K} h}$ ist,

$$121. \quad f_1 = 4 f_1' \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad f_2 = 4 f_2' \frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Der Querschnitt ändert sich ganz in derselben Weise, wie die Breite bei gleich hohen proportionalen Querschnitten. Auch krümmt sich hier die Axe kreisförmig. Die früher für Körper mit proportionalen, gleich hohen Querschnitten entwickelten Regeln in Bezug auf Breite, Volumen und Formänderung können daher hier direkt angewendet werden.

Liegt der Träger mit beiden Enden auf Stützen, so ist nach §. 107

Digitized by Google

und 103 das Volumen $\frac{2}{3}$ von dem Volumen bei constantem Querschnitte. Die Senkung η_1 in der Mitte bei constantem Querschnitte ist nach 46 (§. 106) $\eta_1 = \frac{5}{384} \frac{q\,l^4}{E\,W'}$, daher ist die Gleichung der deformirten Axe nach 49 (§. 107)

$$122. \quad \eta = \frac{24\,\eta_1}{5\,l^3}\,x\,(l-x) = \frac{q\,x\,(l-x)\,l^2}{16\,E\,W'},$$

wenn W' das Trägheitsmoment des Querschnittes in der Mitte bedeutet. Die grösste Senkung $\eta\,(x = \frac{1}{2}\,l)$ wird daher

$$123. \quad \eta = \frac{6}{5}\,\eta_1 = \frac{q\,l^4}{64\,E\,W'},$$

oder, da nach 120 $W' = \frac{q\,l^2 h}{8\,(K+\Re)}$ ist,

$$124. \quad \eta = \frac{(K+\Re)\,l^2}{8\,E\,h}.$$

Bei continuirlichen Trägern gelten die in §. 165, 166, 167 entwickelten Regeln genau. Es folgt daher, dass eine verschiedene Höhenlage der Stützen kein geringeres Volumen ergiebt, als eine gleiche Höhenlage. Die daselbst entwickelten Gesetze für die Transversalkraft, Stützendrücke, Momente, für das Volumen und für das zweckmässigste Verhältniss der Längen der Felder sind direkt anzuwenden.

Anwendung bei Gitterträgern.

§. 225. Träger von constanter Festigkeit bei constantem Querschnitte. Nach 119 ergiebt sich als Höhe des Trägers

$$125. \quad h = \frac{M}{K\,f_1} = \frac{M}{\Re\,f_2}.$$

Bei constantem Querschnitte muss also die Höhe des Trägers dem Momente proportional sein.

Wir bezeichnen das grösste Moment mit M_0, die entsprechende Höhe mit h_0. Alsdann wird $h : h_0 = M : M_0$, also

$$125\,a. \quad h = \frac{M}{M_0}\,h_0.$$

Liegt der Träger mit den Enden auf Stützen und ist derselbe in der Mitte mit G belastet, so ist $M = \frac{1}{2}\,G\,x$, $M_0 = \frac{1}{4}\,G\,l$, also

$$126. \quad h = 2\,h_0\left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

so dass der Träger eine rhombische Gestalt hat.

Liegt der Träger mit den Enden auf Stützen und ist derselbe gleichmässig belastet, so ist $M = \frac{1}{2}\,q\,x\,(l-x)$, $M_0 = \frac{1}{8}\,q\,l^2$, mithin

$$127. \quad h = 4\,h_0\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Hiernach hat der Träger eine parabolische Gestalt, wesshalb man derartige Träger auch Parabelträger nennt.

Für die Formänderung der Axe haben wir mit Rücksicht auf 120 (§. 223):

Digitized by Google

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{M}{E\,W} = -\frac{K+\mathfrak{K}}{E\,h}.$$

Bei gleichmässiger Belastung wird daher

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{(K+\mathfrak{K})\,l^2}{4\,E\,h_0\,x\,(l-x)}.$$

Ist η_0 die Senkung in der Mitte bei der constanten Höhe h_0, so ist $\eta_0 = \frac{5}{384}\frac{q\,l^4}{E\,W_0} = \frac{5}{48}\frac{(K+\mathfrak{K})\,l^2}{E\,h_0}$; daher können wir auch setzen

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{12}{5}\frac{\eta_0}{x\,(l-x)},$$

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{12\,\eta_0}{5}\int\frac{dx}{x\,(l-x)} = -\frac{12\,\eta_0}{5\,l}\left(C - \text{lognat}\,\frac{l-x}{x}\right).$$

Für $x = \frac{1}{2}l$ muss $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden, also $C = \text{lognat}\,1 = 0$. Daher wird nun weiter

$$\eta = \frac{12\,\eta_0}{5\,l}\int dx\,\text{lognat}\,\frac{l-x}{x}, \quad \text{d. i.}$$

$$128.\quad \eta = -\frac{12}{5}\,\eta_0\left[\frac{x}{l}\,\text{lognat}\,\frac{x}{l} + \left(1-\frac{x}{l}\right)\text{lognat}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right].$$

Für $x = 0$ wird hiernach $\eta = \frac{12}{5}\eta_0\,[0\,.\,\text{lognat}\,0 + \text{lognat}\,1] = \frac{12}{5}\eta_0\,0\,.\,(-\infty)$. Nun aber ist nach der bekannten Bestimmungsweise des vieldeutigen Symboles $\frac{\infty}{\infty}$ $0\,.\,\text{lognat}\,0 = \frac{\text{lognat}\,y}{y^{-1}} = \frac{\frac{d\,\text{lognat}\,y}{dy}}{-y^{-1}} = \frac{y^{-1}}{-y^{-2}} = y$ (für $y = 0$), d. i. $= 0$; mithin ist $\eta = 0$. Da für $x = 0$ in der That $\eta = 0$ werden muss, so ist eine Constante nicht hinzuzufügen.

Die Senkung η in der Mitte wird $\eta = -\frac{12}{5}\eta_0\,\text{lognat}\,\frac{1}{2}$ oder

$$129.\quad \eta = \frac{12\,\text{lognat}\,2}{5}\,\eta_0 = 1{,}664\,\eta_0 = 0{,}1733\,\frac{(K+\mathfrak{K})\,l^2}{E\,h_0}.$$

Anwendung bei Parabelträgerbrücken.

XXV. Kapitel.

Symmetrischer I-förmiger Querschnitt.

§. 226. Bezeichnungen. Wenn die Festigkeit gegen Zug und Druck gleich gross ist, so ist ein symmetrischer Querschnitt am vortheilhaftesten, wenn nur äussere Transversalkräfte vorhanden sind. Derselbe wird daher vorzugsweise beim Schmiedeeisen Anwendung finden. Für denselben bezeichne (Fig. 81)

h die ganze Höhe,

h_1 den Abstand der Schwerpunkte der beiden Gurt-Querschnitte,

h_2 die Höhe der zwischen den Gurten befindlichen Blechwand,

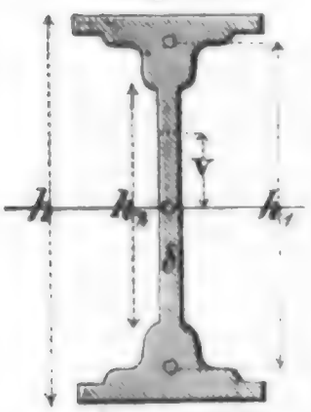
Digitized by Google

f den Flächeninhalt jedes Gurt-Querschnittes,
w das Trägheitsmoment desselben in Beziehung auf seine horizontale Schweraxe,
δ die Dicke der Blechwand.

Die Form der Gurte nehmen wir vorläufig als unbestimmt an, setzen aber voraus, dass dieselben so dick sind, dass die in ihnen auftretenden Schubspannungen unberücksichtigt bleiben können.

§. 227. Spannungen. Das statische Moment eines Theiles, welches durch eine um v von der horizontalen Schweraxe entfernte Parallele zu dieser getrennt wird, ergiebt sich zu

Fig. 81.



$$130.\quad \Omega = \tfrac{1}{2} f h_1 + \tfrac{1}{4} \delta (h_2^2 - 4 v^2).$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes ist nach 2 (S. 193) und 64 (S. 199):

$$131.\quad W = \tfrac{1}{2} f h_1^2 + \tfrac{1}{12} \delta h_2^3 + 2 w,$$

und die gesammte Querschnittsfläche

$$132.\quad F = 2 f + h_2 \delta.$$

Die Normalspannung N in einem beliebigen Punkte der Blechwand oder der Gurte und die Schubspannung T_3 in einem beliebigen Punkte der Blechwand ist

$$133.\quad N = \frac{M v}{W}, \quad T_3 = \frac{Q}{W}\left[\frac{1}{2}\frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{8}(h_2^2 - 4 v^2)\right].$$

Die Schubspannung T_2 in der Blechwand ist $= 0$.

Die ideale Hauptspannung S in den Gurten ist N und erreicht ihr Maximum für $v = \pm \frac{1}{2} h$. Die ideale Hauptspannung in der Blechwand ist nach 67 (Seite 70)

$$134.\quad S = \frac{M}{3 W}\left[v \pm 2\sqrt{v^2 + \frac{Q^2}{M^2}\left\{\frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{4}(h_2^2 - 4 v^2)\right\}^2}\right].$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{f h_1}{\delta h^2} + \frac{1}{4}\frac{h_2^2}{h^2} = \alpha, \qquad \frac{Q^2 h^2}{M^2} = \beta,$$

so wird

$$S = \frac{M}{3 W}\left[v \pm 2\sqrt{v^2 + \beta h^2\left(\alpha - \frac{v^2}{h^2}\right)^2}\right].$$

$$\frac{dS}{dv} = \frac{M}{3 W}\left[1 \pm 2\frac{1 - 2\beta\left(\alpha - \frac{v^2}{h^2}\right)}{\sqrt{1 + \beta\frac{h^2}{v^2}\left(\alpha - \frac{v^2}{h^2}\right)^2}}\right].$$

Hiernach wird S zu einem Maximum oder Minimum für

$$16\beta^2\left(\frac{v}{h}\right)^6 - (32\alpha\beta - 15)\beta\left(\frac{v}{h}\right)^4 + (16\alpha^2\beta^2 - 14\alpha\beta + 3)\left(\frac{v}{h}\right)^2 - \alpha^2\beta = 0.$$

Das sich hieraus ergebende v wird $> \frac{1}{2} h$, also für uns ohne Bedeutung.

Digitized by Google

wenn β kleiner ist, als die Wurzel der Gleichung

$$(64\,\alpha^2 - 32\,\alpha + 4)\,\beta^2 - (16\,\alpha^2 + 56\,\alpha - 15)\,\beta + 12 = 0.$$

Nun liegt α zwischen den Grenzen $\frac{1}{4}$ und ∞, demnach β zwischen den Grenzen 8,3 und $\frac{1}{4}$, so dass in Wirklichkeit ein analytisches Maximum in keinem Falle eintritt, wenn $\beta < \frac{1}{4}$ oder $\frac{Q\,h}{M} < \frac{1}{4}$, oder

$$M > 2\,Q\,h$$

ist. Ein analytisches Maximum kann daher nur in der unmittelbaren Nähe der Enden des Trägers stattfinden. Im übrigen Theile wird S zum Maximum für $v = \pm \frac{1}{2}\,h$ oder $v = \pm \frac{1}{2}\,h_2$. In der Nähe der Enden aber wird S zum Maximum für einen zwischen 0 und $\pm \frac{1}{2}\,h_2$ liegenden Werthe von v. Am Ende selbst, wo $M = 0$ ist, wird S zum Maximum für $v = 0$.

Berechnet man S für verschiedene α, β, v, so findet man, dass in allen Fällen, wo S ein analytisches Maximum hat, dasselbe nur wenig abweicht von einem der Werthe von S für $v = 0$ oder $v = \pm \frac{1}{2}\,h$. So z. B. wird für $\alpha = 1$ und $\beta = 10,\ 4,\ 2$ max $S = 2{,}12 \quad 1{,}36 \quad 0{,}98 \ldots \frac{M\,h}{W}$ (für $v = 0{,}08 \quad 0{,}14 \quad 0{,}25 \ldots h_2$). während für $v = 0$ bezüglich $S = 2{,}11 \quad 1{,}33 \quad 0{,}94 \ldots \frac{M\,h}{W}$ und für $v = \frac{1}{2}\,h$ bezüglich $S = 1{,}78 \quad 1{,}22 \quad 0{,}95 \ldots \frac{M\,h}{W}$ wird. Wir wollen daher in der Folge annehmen, dass an den Enden des Trägers S zum Maximum für $v = 0$ oder für $v = \pm \frac{1}{2}\,h$ wird, wodurch die Rechnung bedeutend vereinfacht wird, ohne dass Fehler entstehen, welche für die Praxis von Bedeutung sind. Im übrigen Theile wird S zum Maximum für $v = \pm \frac{1}{2}\,h_2$ oder $v = \pm \frac{1}{2}\,h$.

Wir wollen die Werthe von S für $v = 0$, $v = \pm \frac{1}{2}\,h_2$ und $v = \frac{1}{2}\,h$ mit S_0, S_1, S_2 bezeichnen. Alsdann ist

$$135.\quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{2\,Q}{3\,W}\left(\dfrac{f\,h_1}{\delta} + \dfrac{1}{4}\,h_2^{\,2}\right). \\ S_1 = \dfrac{M\,h_2}{6\,W}\left[1 + 2\sqrt{1 + \left(\dfrac{2\,Q\,f\,h_1}{M\,\delta\,h_2}\right)^2}\right]. \\ S_2 = \dfrac{M\,h}{2\,W}. \end{cases}$$

Es ergiebt sich hiernach leicht, dass

$$136.\quad \begin{cases} S_0 \gtrless S_1, \text{ wenn } \dfrac{M}{Q\,h_2} \lessgtr -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4\,f\,h_1}{\delta\,h_2^{\,2}} + 1\right) + \sqrt{\dfrac{4\,f^2\,h_1^{\,2}}{\delta^2\,h_2^{\,4}} + \dfrac{8\,f\,h_1}{\delta\,h_2^{\,2}} + 1}. \\ S_0 \gtrless S_2, \text{ wenn } \dfrac{M}{Q\,h_2} \lessgtr \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4\,f\,h_1}{\delta\,h\,h_2} + \dfrac{h_2}{h}\right). \\ S_1 \gtrless S_2, \text{ wenn } \dfrac{M}{Q\,h_2} \lessgtr \dfrac{4\,f\,h_1}{h_2\,\delta\sqrt{3\,(h - h_2)\,(3\,h + h_2)}}. \end{cases}$$

Für die hiernach auszuführende Bestimmung der Querschnittsdimensionen wollen wir beispielsweise die folgenden Fälle behandeln.

§. 228. Träger mit constantem Querschnitte, welcher in der Mitte belastet ist. Das eigene Gewicht des Trägers vernach-

Digitized by Google

lässigen wir; die in der Mitte ruhende Last sei $= G$. Q ist constant und zwar $= \frac{1}{2} G$. M wird in der Mitte zum Maximum und zwar ist dasselbe $= \frac{1}{4} G l$. Daher ist S_0 constant und S_1, S_2 müssen in der Mitte zum Maximum werden. Für dieselbe ist

$$137. \quad \begin{cases} S_0 = \frac{G}{3 W} \left(\frac{f h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2 \right), \\ S_1 = \frac{G h_2}{24 W} \left[l + 2 \sqrt{l^2 + \left(\frac{4 f h_1}{\delta h_2} \right)^2} \right], \\ S_2 = \frac{G l h}{8 W}. \end{cases}$$

Es ergiebt sich leicht, dass $S_0 > S_1$ ist, wenn

$$\frac{2 f}{h_2 \delta} < - \frac{3 l^2 + 4 l h_2 - 4 h_2^2}{8 h_1 (l - 2 h_2)}.$$

Die rechte Seite ist stets negativ, daher kann diese Bedingung nicht erfüllt werden; S_0 kann also nicht das Maximum von S sein. Ferner wird $S_1 > S_2$, wenn

$$\frac{2 f}{h_2 \delta} > \frac{l}{4 h_1} \sqrt{3 \left(3 \frac{h^2}{h_2^2} - 2 \frac{h}{h_2} - 1 \right)}.$$

Die Gleichung $S_2 = K$ giebt, wenn wir für W den Ausdruck 131 setzen, und das entsprechende f mit f_2 bezeichnen,

$$138. \quad f_2 = \frac{3 G h l - 2 K (h_2^3 \delta + 24 w)}{12 K h_1^2}.$$

Dagegen giebt die Gleichung $S_1 = K$, wenn wir das entsprechende f mit f_1 bezeichnen, wobei wir w seiner Kleinheit wegen vernachlässigen,

$$139. \quad f_1^2 + \frac{3 K h_2 \delta^2 (2 K h_2^2 \delta - G l)}{2 (9 K^2 h_1^2 \delta^2 - 4 G^2)} f_1 = \frac{(2 K h_2^2 \delta + G l)(3 G l - 2 K h_2^2 \delta) h_2^2 \delta^2}{16 (9 K^2 h_1^2 \delta^2 - 4 G^2) h_1^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\frac{K h^2}{G} = \varepsilon$, $\frac{l}{h} = m$, $\frac{\delta}{h} = n$, so wird annähernd für $h = h_1 = h_2$:

$$138a. \quad f_2 = \frac{3 m - 2 \varepsilon n}{12 \varepsilon} h^2,$$

$$139a. \quad f_1^2 + \frac{3 \varepsilon n^2 (2 \varepsilon - 1)}{2 (9 \varepsilon^2 n^2 - 4)} h f_1 = \frac{2 n^2 (m + 2 \varepsilon n)(3 m - 2 \varepsilon n)}{2 (9 \varepsilon^2 n^2 - 4)} h^4.$$

Hat man hiernach f_1, f_2 berechnet, so ist $F_1 = 2 f_1 + h_2 \delta$, $F_2 = 2 f_2 + h_2 \delta$. Auf Taf. IX ist in Fig. 11 und 12 F_1 und F_2 für verschiedene δ graphisch dargestellt.

Hat man ein bestimmtes δ gewählt, so ist von den beiden Werthen von F der grössere zu wählen, weil sich leicht nachweisen lässt, dass bei constantem δ S_1 und S_2 mit abnehmendem f oder F grösser werden. Wäre z. B. $F_1 > F_2$ und man wollte F_2 wählen, so wäre $S_2 = K$, aber $S_1 > K$, was unzulässig ist.

Digitized by Google

Offenbar ist nun dasjenige δ das zweckmässigste, für welches F ein Minimum wird. Dasjenige δ, für welches $F_1 = F_2$ wird, sei δ_1, dasjenige δ aber, für welches F zum Minimum wird, $= \delta_2$. Ist nun $\delta_1 < \delta_2$ (Fig. 12), so ist offenbar δ_1 der zweckmässigste Werth für δ, denn für $\delta = \delta_2$ würde ja nicht F_2, sondern F_1 maassgebend sein. Ist dagegen $\delta_1 > \delta_2$ (Fig. 11), so ist δ_2 der zweckmässigste Werth für δ. Um zu entscheiden, ob $\delta_1 \lessgtr \delta_2$ ist, muss man allerdings F_1 und F_2 für einige Werthe von δ berechnen.

Ist δ_1 der zweckmässigste Werth von δ, so ergiebt sich δ und f aus den Gleichungen $S_1 = K$, $S_2 = K$ oder $S_1 = S_2$, $S_2 = K$ und zwar

$$140. \quad \begin{cases} \delta = \dfrac{6\,G\,l\,h\,h_1}{K\,h_2^{\,2}(3\,l\,R + 4\,h_1)}, \\ f = \dfrac{h_2\,l\,\delta\,R}{8\,h_1} = \dfrac{3\,G\,h\,l^2\,R}{4\,K\,h_2\,(3\,l\,h_1\,R + 4\,h_2^{\,2})}, \end{cases}$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$R = \sqrt{3\left(3\,\frac{h^2}{h_2^{\,2}} - 2\,\frac{h}{h_2} - 1\right)}.$$

In der Regel ist h direkt gegeben; die Werthe von h_1 und h_2 muss man vorläufig annehmen; sodann berechnet man δ, f und construirt den Querschnitt, wodurch man h_1, h_2 genauer erhält, so dass man nun δ, f noch einmal genauer berechnen kann.

In vielen Fällen ist die so berechnete Blechdicke für die praktische Ausführung zu klein. Wählt man alsdann δ ohne Berechnung, so ist nur f nach 138 und 139 zu berechnen und der grössere der erhaltenen Werthe beizubehalten.

Beispiel. Es sei $l = 100^c$, $h = 25^c$, $G = 6980$ Kilogr., $K = 630$ Kil. pro $\square$ Centim. Wir nehmen vorläufig $h_1 = 23^c$, $h_2 = 21^c$ an. Nach 138, 139 ergiebt sich

δ	Gleichung	f_1	F_1	f_2	F_2
0,32	— —	∞	∞	12,16	31,04
0,50	$f_1^2 - 15{,}022\,f_1 = 133{,}39$	21,29	58,08	11,63	33,76
0,75	$f_1^2 - 7{,}234\,f_1 = 100{,}77$	14,29	44,43	10,90	37,55
1,00	$f_1^2 - 3{,}334\,f_1 = 94{,}87$	11,55	44,10	10,17	41,34
1,25	$f_1^2 - 0{,}077\,f_1 = 92{,}05$	9,63	45,51	9,44	45,13
1,50	$f_1^2 + 2{,}983\,f_1 = 89{,}26$	8,07	47,64	8,71	48,92
				$f_2 = 13{,}09 - 2{,}918\,\delta$	

Hiernach ist F_1, F_2 auf Taf. IX in Fig. 11 graphisch dargestellt. Man sieht, dass $\delta_2 < \delta_1$ ist, so dass δ_2 der zweckmässigste Werth von δ ist. Durch Interpolation nach der Anmerkung auf Seite 93 findet man

$$\delta_1 = 0{,}922^c, \quad f = 12.33\ \square^c, \quad F = 44.02\ \square^c.$$

Anwendung bei Blechquerträgern eiserner Brücken u. s. w.

§. 229. Träger mit constantem Querschnitte, welcher durch eine isolirte Last von veränderlicher Lage belastet ist.

In diesem Falle ist nach §. 102, wenn wir zur Abkürzung $\frac{x}{l} = n$ setzen,

Digitized by Google

$$Q = G(1-n), \quad M = G\,l\,n(1-n).$$

Hiernach wird, wenn wir noch $\frac{2fh_1}{\delta l h_2} = A$, $\frac{Glh_2}{6W} = B$ setzen,

$$141. \quad S_1 = B(1-n)\left[n + 2\sqrt{A^2+n^2}\right].$$

S_1 wird hiernach zum Maximum für

$$(1-n)\left[2n+\sqrt{A^2+n^2}\right] = 2(A^2+n^2) + n\sqrt{A^2+n^2} \text{ oder}$$

$$A^2 = \tfrac{1}{4}\left[1+4n+12n^2+(1-2n)\sqrt{1+12n(1-n)}\right].$$

Die Reduction auf n bei gegebenem A würde eine Gleichung vierten Grades geben. Für n = 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 wird bezüglich A = 0,5 0,5516 0,5414 0,4835 0,3660 0. Durch Interpolation findet man hieraus für A = 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,555 bezüglich n = 0,500 0,481 0,462 0,433 0,371 0,272 0,133. Für noch grössere Werthe von A wird S_1 stets für x = 0 zum Maximum. Die entsprechenden Werthe von S_1, sowie auch die Werthe von S_1 für n = 0,5 und n = 0 sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

A	n	max S_1	S_1 für n = 0,5	S_1 für n = 0
0	0,500	0,750	0,750	0
0,1	0,493	0,760	0,760	0,2
0,2	0,462	0,790	0,789	0,4
0,3	0,433	0,843	0,833	0,6
0,4	0,371	0,920	0,890	0,8
0,5	0,272	1,027	0,957	1,0
0,555	0,133	1,105	0,997	1,111
		. B	. B	. B

Hieraus geht hervor, dass das Maximum von S_1 nur sehr wenig abweicht von dem Werthe von S_1 für n = 0,5 oder n = 0. Wir können demnach annehmen, dass S_1 für x = 0 oder x = 0,5 l zum Maximum wird, wodurch sich die Rechnung wesentlich vereinfacht. Für x = 0 ist nach §. 227 $S_0 > S_1$, so dass S_1 für x = 0 nicht weiter zu beachten ist. Da S_0 dem Q, S_2 dem M direkt proportional ist, so wird S_0 für x = 0 und S_2 für x = 0,5 l zum Maximum. Für x = 0 wird Q = G, M = 0, für x = 0,5 l aber $Q = \frac{1}{2}G$, $M = \frac{1}{4}Gl$. Demnach werden die Maxima von S_0, S_1, S_2 für x = 0, $x = \frac{1}{2}l$, $x = \frac{1}{2}l$

$$142. \quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{2G}{3W}\left(\dfrac{fh_1}{\delta} + \tfrac{1}{4}h_2^2\right), \\ S_1 = \dfrac{Gh_2}{24W}\left[l + 2\sqrt{l^2 + \left(\dfrac{4fh_1}{\delta h_2}\right)^2}\right], \\ S_2 = \dfrac{Ghl}{8W}. \end{cases}$$

Wenn $S_0 > S_1$ ist, so geben die Festigkeitsbedingungen $S_0 = K$, $S_2 = K$ oder $S_0 = S_2$, $S_2 = K$ folgende Werthe für δ und f:

Digitized by Google

$$143.\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{12\,G\,l\,h}{K\,(9\,l\,h\,h_1 - 12\,h_1\,h_2^2 + 8\,h_2^3)}, \\ f = \dfrac{(3\,l\,h - 4\,h_2^2)\,\delta}{16\,h_1} = \dfrac{3\,G\,l\,h\,(3\,l\,h_1 - 4\,h_2^2)}{4\,K\,h_1\,(9\,l\,h\,h_1 - 12\,h_1\,h_2^2 + 8\,h_2^3)}. \end{cases}$$

Setzt man $h_1 = h_2 = h$, so wird annähernd

$$144.\quad \delta = \frac{12\,G\,l}{K\,h\,(9\,l - 4\,h)},\quad f = \frac{(3\,l - 4\,h)\,\delta}{16} = \frac{3\,G\,l\,(3\,l - 4\,h)}{4\,K\,h\,(9\,l - 4\,h)}.$$

Hat man in dieser Weise δ und f berechnet, so berechnet man nach 142 noch S_1. Ergiebt sich hierbei $S_1 > K$, so ist $S_1 > S_0$ und die Berechnung müsste dann durch die Gleichungen $S_1 = K$, $S_2 = K$ genau wie im vorigen §. erfolgen.

Anwendung bei kleinen Blechbrücken und Nebenlängsträgern grösserer Brücken.

§. 230. Träger mit constantem Querschnitte bei gleichmässiger Belastung. Bei totaler gleichmässiger Belastung ist nach §. 105, wenn wir wieder $\frac{x}{l} = n$ setzen,

$$Q = \tfrac{1}{2}\,q\,l\,(1 - 2\,n),\quad M = \tfrac{1}{2}\,q\,l^2\,n\,(1 - n).$$

Setzen wir ausserdem $\frac{2\,f\,h_1}{\delta\,l\,h_2} = A$, $\frac{q\,l^2\,h_2}{12\,W} = B$, so wird zunächst

$$145.\quad S_1 = B\,[n\,(1 - n) + 2\sqrt{n^2\,(1 - n)^2 + A^2\,(1 - 2\,n)^2}].$$

Auf Taf. IX ist in Fig. 10 hiernach S_1 für verschiedene A und n graphisch dargestellt. Man sieht, dass S_1 für jeden Werth von A nur entweder für $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}\,l$ zum Maximum wird. Nun aber ist für $x = 0$ $M = 0$, also nach §. 227 $S_0 > S_1$ und für $x = \frac{1}{2}\,l$ $Q = 0$, also nach §. 227 $S_2 > S_1$, so dass S_1 in keinem Querschnitte zum Maximum werden kann. Das Maximum von S ist daher S_0 für $x = 0$ ($Q = \frac{1}{2}\,q\,l$, $M = 0$) oder S_2 für $x = \frac{1}{2}\,l$ ($Q = 0$, $M = \frac{1}{8}\,q\,l^2$), und zwar ist

$$146.\quad S_0 = \frac{q\,l}{3\,W}\left(\frac{f\,h_1}{\delta} + \tfrac{1}{4}\,h_2^2\right),\quad S_2 = \frac{q\,l^2\,h}{16\,W}.$$

Die Festigkeitsbedingungen $S_0 = K$, $S_1 = K$ geben nun nach Einsetzung des Werthes von W (mit Vernachlässigung von w) für δ und f:

$$147.\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{6\,q\,l^2\,h}{K\,(9\,l\,h\,h_1 - 12\,h_1\,h_2^2 + 8\,h_2^3)}, \\ f = \dfrac{(3\,l\,h - 4\,h_2^2)\,\delta}{16\,h_1} = \dfrac{3\,q\,l^2\,h\,(3\,l\,h - 4\,h_2^2)}{8\,K\,h_1\,(9\,l\,h\,h_1 - 12\,h_1\,h_2^2 + 8\,h_2^3)}. \end{cases}$$

Annähernd wird, wenn wir $h_1 = h_2 = h$ setzen,

$$148.\quad \begin{cases} \delta = \dfrac{6\,q\,l^2}{K\,h\,(9\,l - 4\,h)}, \\ f = \dfrac{(3\,l - 4\,h)\,\delta}{16} = \dfrac{3\,q\,l^2\,(3\,l - 4\,h)}{8\,K\,h\,(9\,l - 4\,h)}. \end{cases}$$

Wenn, wie gewöhnlich, h gegen l nur klein ist, so ist mit noch geringerer Annäherung

Digitized by Google

$$149.\quad \delta = \frac{2\,q\,l}{3\,K\,h},\quad f = \frac{3}{16}\,l\,\delta = \frac{1}{8}\,\frac{q\,l^2}{K\,h}.$$

Die ganze Querschnittsfläche ist annähernd, wenn wir für δ und f die Ausdrücke 149 setzen,

$$150.\quad F = 2\,f + h\,\delta = \frac{3}{4}\,\frac{q\,l^2}{K\,h}\cdot\frac{3\,l + 4\,h}{9\,l - 4\,h}.$$

Hiernach wird F zum Minimum für $\frac{h}{l} = \frac{9}{20} = 0{,}45$, welches Verhältniss, obwohl theoretisch das zweckmässigste, in den meisten Fällen aus praktischen Gründen zu gross ist.

Ergiebt sich δ für die praktische Ausführung zu klein, so dass man also δ grösser wählen muss, so ist $S_0 < K$ und es muss f durch die Bedingung $S_2 = K$ bestimmt werden. Alsdann wird

$$151.\quad f = \frac{3\,q\,l^2\,h - 4\,K\,\delta\,h_2^{\,3}}{24\,K\,h_1^{\,2}}.$$

Für $h_1 = h_2 = h$ wird annähernd

$$152.\quad f = \frac{3\,q\,l^2 - 4\,K\,\delta\,h^2}{24\,K\,h},\quad F = \frac{3\,q\,l^2 + 8\,K\,\delta\,h^2}{12\,K\,h}.$$

Zum Minimum wird F für

$$153.\quad \frac{h}{l} = \sqrt{\frac{3\,q}{8\,K\,\delta}}.$$

Anwendung bei Blechträgern für Gebäude und Brücken.

§. 231. Träger von constanter Festigkeit. Wir setzen voraus, dass für jeden Querschnitt Q und M gegeben seien. Die zweckmässigsten Werthe von δ und f sind dann folgendermaassen zu bestimmen. Man reducirt die Festigkeitsbedingungen $S_0 = K$, $S_1 = K$, $S_2 = K$, worin für S_0, S_1, S_2 die Ausdrücke 135 (§. 227) zu setzen sind, auf f und bestimmt f für verschiedene δ. Das grösste der so erhaltenen drei Werthe von f ist beizubehalten. Sodann berechnet man für die verschiedenen angenommenen Werthe von δ die Werthe von F nach der Formel $F = 2\,f + h_2\,\delta$. Offenbar ist nun dasjenige δ das zweckmässigste, für welches F ein Minimum ist.

Bezeichnen wir die drei Werthe von f bezüglich mit f_0, f_1, f_2, so ergiebt sich

$$154.\quad \left\{\begin{array}{l} f_0 = \dfrac{(2\,Q - K\,h_2\,\delta)\,h_2^{\,2}\,\delta}{2\,(3\,K\,h_1\,\delta - 4\,Q)\,h_1}, \\ f_1^{\,2} + \dfrac{3\,K\,h_2\,\delta^2\,(K_2\,h_2^{\,2}\,\delta - 2\,M)}{9\,K^2\,h_1^{\,2}\,\delta^2 - 16\,Q^2}\,f_1 = \dfrac{(2\,M + K\,h_2^{\,2}\,\delta)\,(6\,M - K\,h_2^{\,2}\,\delta)\,\delta^2\,h_2^{\,2}}{4\,(9\,K^2\,h_1^{\,2}\,\delta^2 - 16\,Q^2)}, \\ f_2 = \dfrac{6\,M\,h - K\,h_2^{\,3}\,\delta}{6\,K\,h_1^{\,2}}. \end{array}\right.$$

An den Enden, wo $M = 0$ ist, ist nur f_0 zu berechnen. Es ergiebt sich leicht, dass hier annähernd (für $h = h_1 = h_2$) F zum Minimum wird für

$$\delta = \frac{4 - \sqrt{12}}{3}\,\frac{Q}{K\,h} = 0{,}1786\,\frac{Q}{K\,h}.$$

Digitized by Google

Die Berechnung ist hiernach allerdings ziemlich umständlich. Man kann indess mit Rücksicht darauf, dass man die Blechdicke oft grösser nehmen muss, als sie sich ergiebt, zur Umgehung der umständlichen Berechnung von f_1 folgenden Weg einschlagen. Man nimmt die Blechdicke an und berechnet f_2 nach 154. Nach 136 (§. 227) lässt sich nun leicht entscheiden, ob etwa $S_0 > S_2$, oder $S_1 > S_2$ wird. In diesem Falle, der selten eintreten wird, müsste man allerdings noch f_0 und f_1 berechnen.

Beispiel. Träger mit gleichmässiger Belastung. Es sei $l = 2000^c$, $h = 200^c$, $h_1 = 195$, $h_2 = 180$, $q = 4000$ Klgr. pro Meter $= 40$ Klgr. pro Centim., $K = 700$ Klgr. pro □Centim.

a) Ende oder $x = 0$. $Q = \frac{1}{2} q l = 40000$, $M = 0$. Nach 154 ergiebt sich

$$f_0 = 179 \frac{(0{,}635 - \delta)\,\delta}{\delta - 2{,}74}.$$

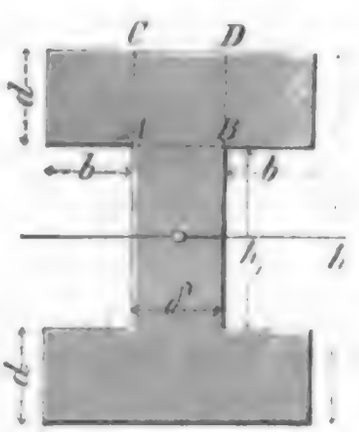
Für $\delta = 0{,}64^c$ wird $f_0 = 0$ und für noch grössere δ wird f_0 negativ. Wir wählen $\delta = 1^c$.

b) Für $x = 0{,}25\,l$ wird $Q = 20000$, $M = 15000000$, daher nach 154 für $\delta = 1$ $f_2 = 87$ □^{c}. Nach 136 wird $S_0 < S_2$, wenn $4{,}167 > 0{,}93$ und $S_1 < S_2$, wenn $4{,}17 > 1{,}74$. Da beide Bedingungen erfüllt sind, so ist S_2 das Maximum von S, der berechnete Werth $f = 120$ □^{c} also der richtige.

c) In der Mitte oder für $x = \frac{1}{2} l$ wird $Q = 0$, $M = 20000000$. Hier ist S_2 das Maximum von S. Nach 154 ergiebt sich $f_2 = 162$ □^{c}.

§. 232. Träger mit reinem I-förmigem Querschnitte. Wir setzen jetzt einen aus Rechtecken zusammengesetzten I-förmigen Querschnitt voraus, welcher gewöhnlich bei gewalzten und gegossenen Trägern gewählt wird. Wir führen ausser den bisher angewendeten Bezeichnungen noch die folgenden ein (Fig. 82).

Fig. 82.



b die Breite jeder horizontalen Rippe,

∂ die Dicke derselben.

Alsdann ist

155. $W = \frac{1}{12} \delta h^3 + \frac{1}{3} b \partial (3 h^2 - 6 h \partial + 4 \partial^2)$.

In der verticalen oder Mittelrippe behalten die Spannungen die in den vorigen Paragraphen ermittelten Werthe. Die bisher vernachlässigten Schubspannungen in den Seitenrippen sind aber jetzt nicht mehr zu vernachlässigen. Das statische Moment eines von den Seitenrippen durch eine Verticale, welche von der Axe der v um w absteht, abgeschnittenen Stückes ist $\mathfrak{Q} = \frac{1}{4} \partial (2 b + \delta - 2 w) h_1$. Mithin ist nach 23 (§. 68) und 28 (§. 72):

$$N = \frac{M v}{W}, \quad T_2 = \frac{Q (2 b + \delta - 2 w) h_1}{4 W}, \quad T_3 = \frac{Q [\partial^2 - (2 v - h_1)^2]}{8 W}.$$

N wird zum Maximum für $v = \frac{1}{2} h$. T_2 wird zum Maximum für $w = \frac{1}{2} \delta$, d. i. an der Wurzel AC, BD der seitlichen Rippen. Hier ist $T_2 = \frac{Q b h_1}{2 W}$.

T_3 wird zum Maximum für $v = \frac{1}{2} h_1$ und zwar ist $\max T_3 = \frac{Q \partial^2}{8 W}$. Da $\frac{1}{4} \partial^2$ gegen $b h_1$ sehr klein ist, so können wir T_3 gegen T_2 vernachlässigen und also setzen

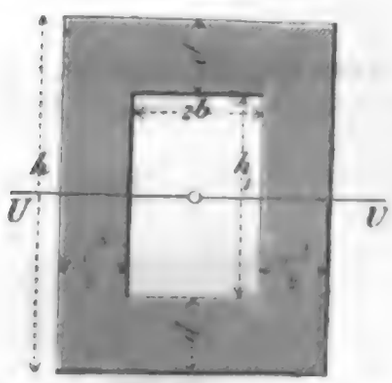
$$156.\quad N = \frac{M\,h}{2\,W},\quad T_2 = \frac{Q\,b\,h_1}{2\,W},\quad T_3 = 0.$$

Die ideale Hauptspannung muss hiernach in den Seitenrippen für $v = \pm \frac{1}{2} h$, $w = \pm \frac{1}{2} \delta$, d. i. an den äusseren Enden C, D der Wurzeln der Seitenrippen zum Maximum werden. Wir bezeichnen dasselbe wieder mit S_2. Die Ausdrücke für S_0, S_1 sind nach §. 227 beizubehalten, nur setzen wir $2\,b\,\partial$ für f. Daher wird

$$157.\quad \begin{cases} S_0 = \dfrac{2\,Q}{3\,W}\left[\dfrac{(2\,b+\delta)\,\partial\,h_1}{\delta} + \frac{1}{4}\,h_2^2\right], \\ S_1 = \dfrac{M\,h_2}{6\,W}\left[1 + 2\sqrt{1+\left(\dfrac{2\,Q\,(2\,b+\delta)\,\partial\,h_1}{M\,\delta\,h_2}\right)^2}\right], \\ S_2 = \dfrac{M\,h}{6\,W}\left[1 + 2\sqrt{1+\left(\dfrac{2\,Q\,b\,h_1}{M\,h}\right)^2}\right]. \end{cases}$$

Hiernach wird annähernd $S_1 = S_2$, wenn $(2\,b+\delta)\,\frac{\partial}{\delta} = b$ oder

Fig. 83.



$$158.\quad \partial = \frac{b\,\delta}{2\,b+\delta}$$

ist. Da δ gegen 2 b nur klein ist, so ist mit noch geringerer Näherung $\partial = \frac{1}{2}\,\delta$, die Seitenrippe also halb so dick, als die Mittelrippe. Ist ∂ noch kleiner, so ist $S_3 > S_2$, ist ∂ grösser, so ist $S_2 > S_3$. Gewöhnlich wird man aus praktischen Rücksichten $\partial > \frac{1}{2}\,\delta$ machen müssen, so dass meist $S_2 > S_3$ sein wird.

Alles dies gilt auch für Röhrenträger mit dem Querschnitte Fig. 83, wenn man die Dicke der verticalen Rippen $\frac{1}{2}\,\delta$, die lichte Breite $= 2\,b$ setzt. T_2 wird hier in der Axe der $v = 0$ und am Anschlusse der horizontalen Theile an die verticalen am grössten.

§. 233. Träger, welcher in der Mitte durch eine isolirte Last belastet ist. Nach §. 228 ist, einen prismatischen Träger vorausgesetzt, S_0 constant und S_1, S_2 werden in der Mitte, wo $Q = \frac{1}{2}\,G$, $M = \frac{1}{4}\,G\,l$ ist, zum Maximum. Nach §. 228 ist aber $S_0 < S_1$, so dass nur die Bedingungen $S_1 = K$ oder $S_2 = K$ zu erfüllen sind. Durch die Gleichung $S_1 = K$ ergiebt sich für $f = (2\,b+\delta)\,\partial$ die Gleichung 139 und es ist nun, wie dort, δ so zu wählen, dass F ein Minimum wird. Bei gegebener Höhe des Trägers ändert sich mit ∂ allerdings auch h_2, jedoch ist ∂ nur von geringem Einflusse, so dass man ∂ vorläufig nach Gutdünken annehmen kann. Jedoch ergiebt sich F um so kleiner, je kleiner man ∂ wählt oder je weiter man das Material von der neutralen Axe entfernt. Das kleinste ∂, was man wählen kann, ist dasjenige, für welches $S_3 = K$ wird, d. i. nach 158 nahezu $\partial = \frac{b\,\delta}{2\,b+\delta}$. Setzt man hierin $b = \frac{1}{2}\left(\frac{f}{\partial} - \delta\right)$ und reducirt auf ∂, so ergiebt sich, nachdem f und δ bestimmt ist,

Digitized by Google

$$159.\quad \partial = \frac{f\delta}{2f+\delta^2},\quad b = \frac{f}{\delta}.$$

Es ist jedoch nicht nöthig, sich streng an diesen Werth von ∂ zu binden, weil sich die nöthige Gesammtfläche F nur wenig ändert, wenn sich das Verhältniss $\partial : b$ ändert.

Beispiel. Es sei, wie im Beispiele zu §. 228 $l = 100^c$, $h = 25^c$, $G = 6980$ Klgr., $K = 630$ Kilogr. pro □Centim. Nehmen wir vorläufig $h_1 = h_2 = h = 25$ an, so ergiebt sich F nach der Gleichung $S_2 = K$ am kleinsten, für $\delta = 0{,}56$, $f = 9{,}3$; es wird $F = 32{,}6$. Daher wird nach 159 $\partial = \frac{9{,}3 \cdot 0{,}56}{2 \cdot 9{,}3 + 0{,}56^2} = 0{,}28$, $b = \frac{9{,}3}{0{,}56} = 16{,}6$. Genauer wird nun $h_1 = 25 - 0{,}28 = 24{,}7$, $h_2 = 25 - 2 \cdot 0{,}28 = 24{,}4$. Jetzt ergiebt sich F am kleinsten für $\delta = 0{,}61$, $f = 9{,}7$. Es wird $F = 34{,}4$, $\partial = \frac{9{,}7 \cdot 0{,}61}{2 \cdot 9{,}7 + 0{,}61^2} = 0{,}30$, $b = \frac{9{,}7}{0{,}61} = 15{,}9$, $h_1 = 24{,}7$, $h_2 = 24{,}4$.

§. 234. Träger mit gleichmässiger Belastung. Hier ist $Q = \frac{1}{2} q l (1 - 2n)$, $M = \frac{1}{2} q l^2 n (1 - n)$, wenn $n = \frac{x}{l}$ ist. Nach 157 wird, wenn wir zur Abkürzung $\frac{2 f h_1}{\delta l h_2} = A$, $\frac{q l^2 h_2}{12 W} = B$, $\frac{2 b h_1}{l h} = A_1$, $\frac{q l^2 h}{12 W} = B_1$ setzen,

$$S_1 = B\left[n(1-n) + 2\sqrt{n^2(1-n)^2 + A^2(1-2n)^2}\right],$$

$$S_2 = B_1\left[n(1-n) + 2\sqrt{n^2(1-n)^2 + A_1^2(1-2n)^2}\right].$$

Nach §. 230 wird hiernach sowohl S_1, als S_2 entweder für $n = 0$ oder $n = \frac{1}{2}$, d. i. $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2} l$ zum Maximum. Für $x = 0$ ist $S_0 > S_1$. Für $n = \frac{1}{2}$ wird $S_1 : S_2 = B : B_1 = h_2 : h$, also $S_2 > S_1$, so dass S_1 in keinem Querschnitte zum Maximum werden kann. Das Maximum von S ist also entweder S_0 für $x = 0$, S_2 für $x = 0$ oder S_2 für $x = \frac{1}{2} l$, d. i.

$$160.\quad \begin{cases} x = 0. \quad S_0 = \dfrac{q l}{3 W}\left[\dfrac{(2b+\delta)\,\partial\, h_1}{\delta} + \frac{1}{4} h_2^2\right], \\ x = 0. \quad S_2' = \dfrac{q l b h_1}{3 W}, \\ x = \frac{1}{2} l, \quad S_2'' = \dfrac{q l^2 h}{16 W}. \end{cases}$$

Setzt man in diesen drei Gleichungen K für S, so hat man die Gleichungen zur Bestimmung von b, δ, ∂.

Zunächst giebt die Gleichung $S_2' = S_2''$ die Beziehung

$$161.\quad b = \frac{3}{16}\frac{h}{h_1} l.$$

Setzt man ferner $S_0 = S_2''$, substituirt in diese Gleichung für b den eben aufgestellten Werth und setzt ausserdem $h_1 = h - \partial$, $h_2 = h - 2\partial$, so ergiebt sich $6 l \partial + 4 h \delta = 3 l \delta$, oder

$$162.\quad \partial = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4h}{3l}\right)\delta.$$

Annähernd ist also wiederum $\partial = \frac{1}{2} l$. Setzt man nun in 161 $h_1 = h - \partial$

tized by Google

$= h - \frac{1}{2}\delta + \frac{2}{3}\frac{h}{l}\delta$, d. i. sehr nahe $h_1 = h - \frac{1}{2}\delta$, und annähernd $\frac{h}{h_1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\delta}{h}$, so wird

$$163.\quad b = \frac{3}{16}\left(1 + \frac{\delta}{2h}\right)l.$$

Substituirt man diese Ausdrücke für ∂ und b in die Gleichung $S_2'' = K$, nachdem man für W seinen Werth 155 gesetzt hat, so ergiebt sich eine Gleichung, welche nur noch δ als Unbekannte enthält. Annähernd ist $W = \frac{1}{12}h^3\delta + b\,h^2\partial = \frac{1}{12}h^3\delta + \frac{3}{32}l\,h^2\delta\left(1 - \frac{4h}{3l}\right) = \frac{3}{32}l\,h^2\delta - \frac{1}{24}h^3\delta$. Die Gleichung $S_2'' = K$ giebt $16\,K\,W = q\,l^2 h$, d. i. $K\,h\,\delta\,(9\,l - 4\,h) = 6\,q\,l^2$, also

$$164.\quad \delta = \frac{6\,q\,l^2}{K\,h\,(9\,l - 4\,h)},$$

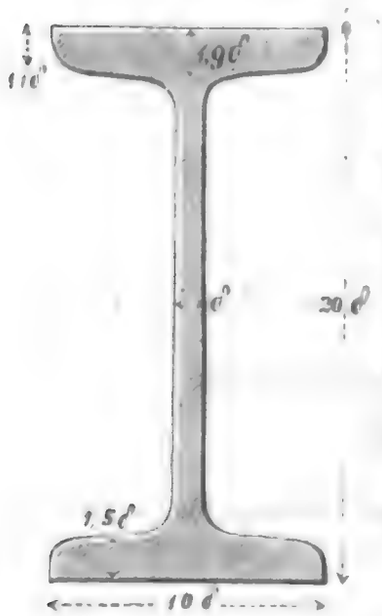
oder annähernd, da h gegen l klein ist,

$$164a.\quad \delta = \frac{2\,q\,l}{3\,K\,h}.$$

Beispiel. Es sei $q = 40$ Klgr. pro Cent., $l = 400$ Cent. $h = 40$ Cent. $K = 600$ Klgr. pro □Cent. Zunächst wird $\delta = \frac{6 \cdot 40 \cdot 400^2}{600 \cdot 40\,(9 \cdot 400 - 4 \cdot 40)} = 0{,}47$. $\partial = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4 \cdot 40}{3 \cdot 400}\right) \cdot 0{,}47 = 0{,}20$, $b = \frac{3}{16}\left(1 + \frac{0{,}47}{2 \cdot 40}\right) \cdot 400 = 75{,}4$.

§. 235. Praktische Formeln. Die zweckmässigste Höhe der Träger ergiebt sich sowohl für Blech- als für gewalzte Träger in den meisten Fällen für die praktische Ausführung zu gross. Ebenso ergeben sich für die gewalzten Träger die horizontalen Rippen zu breit und zu dünn. Meist wird sich für die gewalzten Träger auch die Mittelrippe zu dünn ergeben. Man wird daher meist von den Schubspannungen absehen und die Berechnung nur nach der Bedingung $S_2 = K$, d. i. $2\,K\,W = M\,h$ vornehmen können. Man kann hierbei zwei Wege verfolgen.

Fig. 84.



1. Man wählt für verschiedene Träger ähnliche Querschnitte. Wir wählen beispielsweise folgende Verhältnisse: $h = 20\,\delta$, ganze Breite $= 0{,}5\,h = 10\,\delta$, $\partial = 1{,}5\,\delta$ (Fig. 84), welche für viele praktische Anwendungen geeignet erscheinen. Für diese Verhältnisse ergiebt sich leicht nach dem vorigen Kapitel

$$165.\quad F = 47\,\delta^2,\quad W = 2983\,\delta^4.$$

Daher wird $2\,K \cdot 2983\,\delta^4 = M \cdot 20\,\delta$, also

$$166.\quad \delta = 0{,}150\sqrt[3]{\frac{M}{K}},\quad h = 3{,}0\sqrt[3]{\frac{M}{K}}.$$

2. Man wählt die Höhe h und die ganze Breite $2\,b + \delta$, so wie das Verhältniss von $\delta : \partial$. Es sei $2\,b + \delta = m\,h$, $\partial = n\,\delta$. Alsdann ist

nahezu $W = \frac{1}{12} h^3 \delta + \frac{1}{2} m n h^2 \delta = \frac{1}{12} (1 + 6 m n) h^3 \delta$, also $K (1 + 6 m n) h^3 \delta = 6 M h$, folglich

$$167. \quad \delta = \frac{6 M}{(1 + 6 m n) K h^2}.$$

Ist z. B. $m = 0{,}5$, $n = 1{,}5$, so wird $\delta = \frac{12 M}{11 K h^2}$. Hat man hiernach δ bestimmt, so kann man noch alle Verhältnisse genau fixiren, das Trägheitsmoment nach dem vorigen Kapitel genauer bestimmen und nun noch einmal δ nach der vorigen Methode berechnen.

XXVI. Kapitel.

Unsymmetrischer I-förmiger Querschnitt.

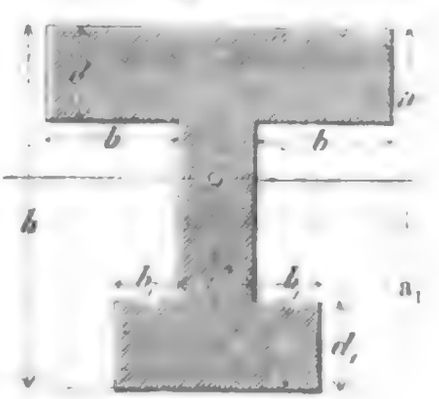
§. 236. Einleitung. Wir haben bei dem symmetrischen I-förmigen Querschnitte gesehen, dass sich häufig die Dicke der verticalen und horizontalen Rippen zu klein ergiebt, namentlich die der horizontalen Rippen. Noch mehr, als beim Schmiedeeisen, ist dies beim Gusseisen der Fall, für welches ein unsymmetrischer Querschnitt am zweckmässigsten ist. Dann werden aber die Schubspannungen so klein, dass wir sie vernachlässigen können, wodurch die Rechnung bedeutend vereinfacht wird. Die Dicken der Rippen wird man dabei am besten so klein wählen, wie es die praktische Ausführung zulässt. Die Dicken der horizontalen Rippen wird man aber meist noch grösser wählen müssen, da sonst die Breite derselben für die praktische Ausführung zu gross wird.

Hat man hiernach die Dimensionen bestimmt, so ist es nach den allgemeinen Formeln leicht, die Normal- und Schubspannungen, sowie die idealen Hauptspannungen genau zu berechnen und sich somit nachträglich von der Zulässigkeit der angenommenen Dimensionen bestimmt zu überzeugen.

Wir bezeichnen für den unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt (auch unsymmetrischer doppelt T-förmiger Querschnitt genannt) (Fig. 85) mit

- h die gesammte Höhe,
- b, b_1 die Breiten der oberen und unteren Rippen,
- ∂, ∂_1 die Dicken derselben,
- f, f_1 die Querschnittsflächen der oberen und unteren Gurte, (d. i. $b\,d$ und $b_1\,d_1$),
- δ die Dicke der verticalen Rippe oder des Steges,
- a, a_1 den Abstand der horizontalen Schweraxe von der oberen und unteren Kante.

Fig. 85.



Digitized by Google

§. 237. Lage des Schwerpunktes. Setzen wir die statischen Momente der auf beiden Seiten der Schweraxe W W gelegenen Flächenstücke in Beziehung auf diese Schweraxe einander gleich, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\,a^2\delta + 2\,b\,\partial\,(a - \tfrac{1}{2}\,\partial) = \tfrac{1}{2}\,a_1{}^2\delta + 2\,b_1\,\partial_1\,(a_1 - \tfrac{1}{2}\,\partial_1) \text{ oder}$$

$$(a + a_1)\,(a - a_1)\,\delta + 4\,b\,\partial\,a - 4\,b_1\,\partial_1\,a_1 = 2\,b\,\partial^2 - 2\,b_1\,\partial_1{}^2.$$

Nun aber ist $a + a_1 = h$, $a_1 = h - a$. Setzt man dies ein und reducirt auf a, so ergiebt sich die erste der Gleichungen:

$$168.\quad \begin{cases} a = \dfrac{h^2\delta + 4\,h\,b_1\,\partial_1 + 2\,b\,\partial^2 - 2\,b_1\,\partial_1{}^2}{2\,(h\,\delta + 2\,b\,\partial + 2\,b_1\,\partial_1)}, \\ a_1 = \dfrac{h^2\delta + 4\,h\,b\,\partial + 2\,b_1\,\partial_1{}^2 - 2\,b\,\partial^2}{2\,(h\,\delta + 2\,b\,\partial + 2\,b_1\,\partial_1)}. \end{cases}$$

Der zweite Ausdruck für a_1 ergiebt sich aus dem ersten leicht durch Vertauschung von b und b_1, ∂ und ∂_1, a und a_1. Der gemeinschaftliche Nenner ist $= 2\,F$. Setzen wir im Zähler $2\,b\,\partial = f$, $2\,b_1\,\partial_1 = f_1$, so ergiebt sich leicht

$$169.\quad \begin{cases} a = \tfrac{1}{2}\,h + \dfrac{(f_1 - f)\,h}{2\,F} - \dfrac{f_1\,\partial_1 - f\,\partial}{2\,F}, \\ a_1 = \tfrac{1}{2}\,h - \dfrac{(f_1 - f)\,h}{2\,F} + \dfrac{f_1\,\partial_1 - f\,\partial}{2\,F}. \end{cases}$$

Annähernd wird, wenn wir ∂, ∂_1 gegen h vernachlässigen,

$$170.\quad a = \left(1 + \frac{f_1 - f}{F}\right)\frac{h}{2}, \quad a_1 = \left(1 - \frac{f_1 - f}{F}\right)\frac{h}{2}.$$

Das Verhältniss der beiden Abstände ist hiernach annähernd

$$171.\quad \frac{a}{a_1} = \frac{F + f_1 - f}{F - f_1 + f} = \frac{2\,f_1 + h\,\delta}{2\,f + h\,\delta}.$$

§. 238. Trägheitsmoment. Als Trägheitsmoment W ergiebt sich mit Berücksichtigung der Formel 66 (Seite 199):

$$W = \tfrac{1}{3}\,(a^3 + a_1{}^3)\,\delta + \tfrac{2}{3}\,b\,[a^3 - (a - \partial)^3] + \tfrac{2}{3}\,b_1\,[a_1{}^3 + (a_1 - \partial_1)^3].$$

Nun aber ist $a^3 + a_1{}^3 = a^3 + (h - a)^3 = h^3 - 3\,h^2 a + 3\,h\,a^2 = h^3 - 3\,h\,a\,a_1$, $a^3 - (a - \partial)^3 = 3\,a^2 - 3\,a\,\partial + \partial^2$ u. s. w.; mithin

$$172.\quad W = \tfrac{1}{3}\,[(h^2 - 3\,a\,a_1)\,h\,\delta + 2\,b\,\partial\,(3\,a^2 - 3\,a\,\partial + \partial^2) + 2\,b_1\,\partial_1\,(3\,a_1{}^2 - 3\,a_1\,\partial_1 + \partial_1{}^2)].$$

Durch Einsetzung der Ausdrücke für a, a_1 ergiebt sich ein zu complicirter Ausdruck. Vernachlässigen wir aber ∂, ∂_1 gegen a, a_1, so ergiebt sich annähernd, wenn wir gleichzeitig wiederum $2\,b\,\partial = f$, $2\,b_1\,\partial_1 = f_1$ setzen,

$$173.\quad W = \tfrac{1}{3}\,(h^2 - 3\,a\,a_1)\,h\,\delta + f\,a^2 + f_1\,a_1{}^2.$$

Setzen wir für a, a_1 die Ausdrücke 170 ein, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen der einfache Ausdruck

$$174.\quad W = \frac{1}{12}\,h^3\,\delta + \frac{1}{4}\,(f + f_1)\,h^2 - \frac{(f - f_1)^2 h^2}{4\,F_1}$$

$$= \frac{1}{4}\,F\,h^2 - \frac{1}{6}\,h^3\,\delta - \frac{(f - f_1)^2\,h^2}{4\,F}.$$

Digitized by Google

§. 239. Querschnittsdimensionen bei angenommener Dicke und Höhe. Die beiden Festigkeitsbedingungen sind, wenn wir annehmen, dass auf derjenigen Seite, für welche der Index 1 eingeführt ist, Druck, auf der andern Zug eintritt,

$$K = \frac{M a}{W}, \quad \mathfrak{K} = \frac{M a_1}{W},$$

also

$$a : a_1 = K : \mathfrak{K}.$$

Die Abstände der am meisten ausgedehnten und zusammengedrückten Faser von der horizontalen Schweraxe sollen sich also zu einander verhalten, wie die Sicherheitscoefficienten für Zug und Druck. Setzen wir für $a : a_1$ den Näherungsausdruck 170, so ergiebt sich

$$175. \quad \frac{2 f_1 + h \delta}{2 f + h \delta} = \frac{K}{\mathfrak{K}}.$$

Die Reduction auf f_1 giebt

$$f_1 = \frac{2 K f + (\mathfrak{K} - K) h \delta}{2 \mathfrak{K}},$$

daher

$$f + f_1 = \frac{2 (\mathfrak{K} + K) f - (\mathfrak{K} - K) h \delta}{2 \mathfrak{K}},$$

$$f - f_1 = \frac{(\mathfrak{K} - K)(2 f + h \delta)}{2 \mathfrak{K}},$$

$$F = f + f_1 + h \delta = \frac{(\mathfrak{K} + K)(2 f + h \delta)}{2 \mathfrak{K}}.$$

Dies in den Ausdruck 174 für W eingesetzt, giebt nach gehöriger Reduction

$$W = \frac{K}{\mathfrak{K} + K} f h^2 - \frac{\mathfrak{K} - 2 K}{6 (\mathfrak{K} + K)} h^3 \delta.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Festigkeitsbedingung $K W = M a$ und beachtet dabei, dass $a = \frac{K}{\mathfrak{K} + K} h$ wird, so ergiebt sich die erste der Gleichungen

$$176. \quad \begin{cases} K f h - \frac{1}{6} (\mathfrak{K} - 2 K) h^2 \delta = M, \\ \mathfrak{K} f_1 h - \frac{1}{6} (2 \mathfrak{K} - K) h^2 \delta = M. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung für f_1 ergiebt sich leicht aus der ersten durch Vertauschung von f und f_1, K und $\mathfrak{K}$. Daher wird nun

$$177. \quad \begin{cases} f = \frac{M}{K h} + \frac{\mathfrak{K} - 2 K}{6 K} h \delta, \\ f_1 = \frac{M}{\mathfrak{K} h} - \frac{2 \mathfrak{K} - K}{6 \mathfrak{K}} h \delta, \end{cases}$$

$$178. \quad F = \frac{\mathfrak{K} + K}{\mathfrak{K} K} \left[\frac{M}{h} + \frac{1}{6} (\mathfrak{K} + K) h \delta \right].$$

Ist $\mathfrak{K} > 2 K$, so wird f grösser, f_1 kleiner, als wenn kein Steg vorhanden ist. Der Ausdruck für F zeigt, dass die Gesammtfläche F grösser ist, als wenn kein Steg vorhanden ist.

Hiernach ist es nun leicht, f, f_1 zu bestimmen, wenn man die kleinste

Digitized by Google

zulässige Dicke δ, sowie die Höhe h annimmt. Durch Annahme der Dicken ∂, ∂_1 der Rippen ergiebt sich sodann auch deren Breite. Genauer lässt sich die Rechnung in folgender Weise führen.

Es ist, da $a : a_1 = K : \mathfrak{K}$ und $a + a_1 = h$ sein soll, $a = \frac{K}{\mathfrak{K}+K} h$, $a_1 = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}+K} h$. Somit sind, wenn man h, δ, ∂, ∂_1 angenommen hat, im Ausdrucke 172 für W nur b und b_1 unbekannt. Setzt man $K W = M a$ oder $\mathfrak{K} W = M a_1$, so hat man eine Gleichung für b und b_1. Aus 168 folgt

$$\frac{a}{a_1} = \frac{h^2\delta + 4 h b_1 \partial_1 + 2 b \partial^2 - 2 b_1 \partial_1^2}{h^2\delta + 4 h b \partial + 2 b_1 \partial_1^2 - 2 b \partial^2} = \frac{K}{\mathfrak{K}}$$

und dies ist eine zweite Gleichung für b und b_1. Beide Gleichungen sind vom ersten Grade, also leicht aufzulösen.

Beispiel. Es sei ein Träger von 200^c Spannweite mit 20 Kilogr. pro Cent. belastet. Alsdann ist das grösste Moment $M = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} . 20 . 200^2 = 100000$. Wir nehmen an: $h = 17$, $\delta = 1{,}5$, $\partial = 3$, $\partial_1 = 1{,}8$, $K = 212$, $\mathfrak{K} = 530 = 2{,}5\,K$. Da $K : \mathfrak{K} = 2 : 5$ ist, so wird $a = \frac{2}{7} . 17 = 4{,}9$, $a_1 = \frac{5}{7} . 17 = 12{,}1$, daher nach 172:

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{3}\,[(17^3 - 3 . 12{,}1 . 4{,}9)\,17 . 1{,}5 + 2 . 3 . b\,(3 . 4{,}9^2 - 3 . 4{,}9 . 3 + 3^2) \\ &\quad + 2 . 1{,}8 . b_1 (3 . 12{,}1^2 - 3 . 12{,}1 . 1{,}8 + 1{,}8^2)] \\ &= 945 + 74\,b + 453\,b_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\mathfrak{K} W = M a_1$ oder $\frac{W}{a_1} = \frac{M}{\mathfrak{K}}$ wird daher $78 + 6\,b + 37\,b_1 = 189$ oder

$$\text{I.} \quad 6\,b + 37\,b_1 = 111.$$

Ferner ist nun nach 168:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{17^2 . 1{,}5 + 4 . 17 . 1{,}8\,b_1 + 2 . 3^2 b - 2 . 1{,}8^2 b_1}{17^2 . 1{,}5 + 4 . 17 . 3\,b + 2 . 1{,}8^2 b_1 - 2 . 3^2 b}$$

$$= \frac{434 + 18\,b + 116\,b_1}{434 + 186\,b + 6\,b_1} = \frac{2}{5} \text{ oder}$$

$$\text{II.} \quad 141\,b - 283\,b_1 = 650.$$

Die gewöhnliche Auflösung der Gleichungen I. und II. giebt

$$b = 8{,}0, \quad b_1 = 1{,}7.$$

Nach den Näherungsformeln 127 erhält man

$$f = \frac{100000}{212 . 17} + \frac{530 - 2 . 212}{6 . 530} 17 . 1{,}5 = 38{,}4 + 2{,}1 = 40{,}5.$$

Ebenso ergiebt sich $f_1 = 15{,}4 - 6{,}8 = 8{,}6$, mithin ist $b = \frac{40{,}5}{2 . 3} = 6{,}8$, $b_1 = \frac{8{,}6}{2 . 1{,}8} = 2{,}4$.

§. 240. Anwendung auf Gusseisen. Der unsymmetrisch I-förmige Querschnitt findet insbesondere beim Gusseisen Anwendung. Hier kommt es zunächst hauptsächlich auf die Feststellung des Verhältnisses der Coefficienten K, $\mathfrak{K}$ an.

Die Bruchcoefficienten B, $\mathfrak{B}$ für Zug und Druck kann man annähernd nach Formel 91 (Seite 76) berechnen. Die Festigkeitscoefficienten C, $\mathfrak{C}$ für Zug und Druck und der Bruchcoefficient B_0 für den rechteckigen Querschnitt sind nach §. 91 ungefähr in Kilogr. pro □Centimeter.

$$C = 1320, \quad \mathfrak{C} = 7920, \quad B_0 = 2860.$$

Der von der Querschnittsform abhängende Coefficient $\varkappa$ ergab sich nach 90 (Seite 76) für einige in Anwendung gekommene Querschnittsformen zu 0,75 bis 0,83, erstere Zahl für verhältnissmässig dicke, letztere für

Digitized by Google

verhältnissmässig dünne Rippen. Für diese Werthe von $\varkappa$ wird nach 91 (Seite 76):

$$\varkappa = 0{,}75, \quad B = 2283, \quad \mathfrak{B} = 4757 = 2{,}1\,B,$$
$$\varkappa = 0{,}83, \quad B = 1975, \quad \mathfrak{B} = 5770 = 2{,}9\,B,$$

so dass hiernach $\frac{\mathfrak{B}}{B}$ ungefähr zwischen 2,1 und 2,9 liegen würde. Die Resultate direkter Bruchversuche stimmen hiermit nahe überein. Der zweckmässige Werth des Verhältnisses $\frac{a_1}{a}$ würde demnach ebenfalls zwischen 2,1 und 2,9 liegen.

Hodgkinson fand durch direkte Bruchversuche, bei welchen das Verhältniss der Gurtquerschnitte successive geändert wurde, als zweckmässigstes Verhältniss $\frac{a_1}{a} = 2{,}9$. Die Rippen waren hierbei in der That verhältnissmässig dünn.

Nimmt man eine bestimmte Grenzsicherheit an, so würde nach §. 43 der zweckmässigste Werth von $\frac{a_1}{a}$ ungefähr 2,5 sein. Manche Autoren geben 2 als den zweckmässigsten Werth an.

Hiernach dürfte ungefähr das Verhältniss

$$179. \quad \frac{a_1}{a} = \frac{\mathfrak{B}}{B} = 2{,}5$$

im Allgemeinen das zweckmässigste sein. Die entsprechenden Bruchcoefficienten sind ungefähr in Kilogr. pro □Centim.

$$B = 2120, \quad \mathfrak{B} = 5300.$$

Demnach würde nach 177

$$f = \frac{M}{K\,h} + \frac{1}{12}\,h\,\delta, \quad f_1 = \frac{M}{\mathfrak{K}\,h} - \frac{4}{15}\,h\,\delta.$$

§. 241. Zweckmässigste Höhe. Nach 178 ergiebt sich, dass F in Beziehung auf h zum Minimum, also $\frac{dF}{dh} = 0$ wird für $(\mathfrak{K} + K)\,h^2\,\delta = M$ oder

$$180. \quad h = \sqrt{\frac{6\,M}{(\mathfrak{K} + K)\,\delta}}.$$

Bei gleichmässiger Belastung ist, wenn l die Spannweite bezeichnet, $M = \frac{1}{8}\,q\,l^2$ zu setzen; daher wird

$$h = l\sqrt{\frac{3\,q}{4\,(K + K)\,\delta}}.$$

In praktischen Fällen ist q ungefähr 3,5 bis 30 Kilogr. pro Centim., $K + \mathfrak{K}$ bei 10facher Sicherheit = 742 und δ etwa 0,7 bis 2 Centim. Demnach ergiebt sich $h = 0{,}07\,l$ bis $0{,}12\,l$, im Mittel also etwa $h = \frac{1}{10}\,l$.

Die Einsetzung dieses Werthes für h in den Ausdruck 178 für F giebt

$$181. \quad F = \frac{2\sqrt{(\mathfrak{K} + K)^3}}{\mathfrak{K}\,K\sqrt{6}}\sqrt{M\,\delta} = \frac{(\mathfrak{K} + K)^2}{3\,\mathfrak{K}\,K}\,h\,\delta,$$

Digitized by Google

d. i. genau doppelt so gross, als sich bei gleicher Höhe ergeben würde, wenn kein Steg vorhanden wäre. Für $\mathfrak{K} = 1.K,\ 2.K,\ 3.K$ wird $F = 1{,}33\,h\,\delta,\ 1{,}50\,h\,\delta,\ 1{,}78\,h\,\delta$, so dass die Querschnittsfläche $h\,\delta$ des Steges stets den grössten Theil (75 bis 56 %) der ganzen Fläche ausmacht.

Als Flächen der Gurte ergeben sich nach 177 durch Einsetzung des Werthes von h

$$182.\quad f = \frac{2\,\mathfrak{K} - K}{K\sqrt{6\,(\mathfrak{K}+K)}}\sqrt{M\,\delta},\quad f_1 = \frac{2\,K - \mathfrak{K}}{\mathfrak{K}\sqrt{6\,(\mathfrak{K}+K)}}\sqrt{M\,\delta}.$$

Für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$ wird hiernach f_1 negativ, so dass sich diese Querschnittsform bei Anwendung der der Dicke δ entsprechenden zweckmässigsten Höhe nicht realisiren lässt.

In vielen Fällen hat man aber bei der Wahl der Höhe noch andere Rücksichten zu nehmen.

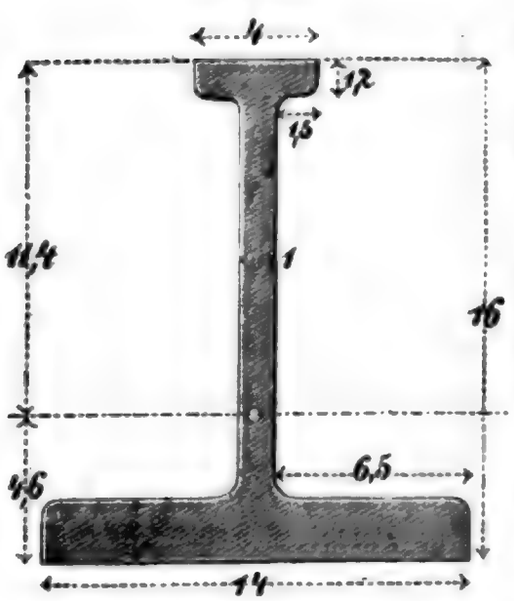
§. 242. Aehnliche Querschnittsformen. Je grösser die Höhe ist, desto grösser muss für das Gelingen des Gusses auch die Dicke sein, so dass man etwa zwischen h und δ ein constantes Verhältniss wählen kann. Wir setzen $h = m\,\delta$. Setzt man dies in den Ausdruck 178 für F ein, so ergiebt sich, dass F zu einem Minimum, also $\frac{dF}{d\delta} = 0$ wird für

$$183.\quad \delta = \sqrt[3]{\frac{3\,M}{m^2(\mathfrak{K}+K)}},\quad h = m\,\delta.$$

Hieraus folgt $M = \frac{1}{3}\,m^2(\mathfrak{K}+K)\,\delta^3$. Dies in die Ausdrücke 177, 178 für f, f_1, F eingesetzt, giebt

$$184.\quad f = \frac{\mathfrak{K}}{2K}\,h\,\delta,\quad f_1 = \frac{K}{2\mathfrak{K}}\,h\,\delta,\quad F = \frac{(\mathfrak{K}+K)^2}{2\,\mathfrak{K}\,K}\,h\,\delta.$$

Fig. 86.



Hiernach verhält sich

$$185.\quad f : f_1 = \mathfrak{K}^2 : K^2.$$

Für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$ verhält sich $f : f_1 = 6{,}25 : 1$ d. i. nahezu wie der Festigkeitscoefficient für Druck zu dem für Zug. Es wird für dieses Verhältniss

$$f = \tfrac{5}{4}\,h\,\delta,\quad f_1 = \tfrac{1}{5}\,h\,\delta,\quad F = 2{,}45\,h\,\delta.$$

Für das Gelingen des Gusses ist es ferner erforderlich, dass auch die Dicken der Seitenrippen zu der der Mittelrippe in einem gewissen Verhältnisse stehen. Wir setzen $\partial = n\,\delta$, $\partial_1 = n_1\,\delta$. Alsdann ist $b = \frac{f}{2\partial}$, $b_1 = \frac{f_1}{2\partial_1}$, d. i. nach 184

$$186.\quad b = \frac{\mathfrak{K}}{4\,n\,K}\,h,\quad b_1 = \frac{K}{4\,n_1\,\mathfrak{K}}\,h$$

und für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$: $b = \frac{5}{8\,n}\,h,\quad b_1 = \frac{1}{10\,n_1}\,h.$

Geeignete Verhältnisse sind ungefähr

$$m = 16,\quad n = 2{,}0\quad n_1 = 1{,}2.$$

igitized by Google

Alsdann wird $b = \frac{5}{16} h = 5\delta$, $b_1 = \frac{1}{12} h = \frac{4}{3}\delta$. Das sind jedoch nur Näherungsresultate. Genauer ergiebt sich, damit sich genau $a_1 : a = 2{,}5 : 1$ verhält, $b = 6{,}2\,\delta$, $b_1 = \frac{4}{3}\delta$ oder

$$b = 6{,}5\,\delta, \quad b_1 = 1{,}5\,\delta.$$

Für diese Verhältnisse (Fig. 86) ergiebt sich genau

$$187. \quad W = 1289\,\delta^4.$$

$$188. \quad \delta = 0{,}207 \sqrt[3]{\frac{M}{\Re}} = 0.153 \sqrt[3]{\frac{M}{\Re}}.$$

$$189. \quad F = 45{,}6\,\delta^2 = 1{,}95 \sqrt[3]{\left(\frac{M}{\Re}\right)^2} = 1{,}07 \sqrt[3]{\left(\frac{M}{K}\right)^2}.$$

Nach der Näherungsformel 174 würde sich, da $f = 3{,}6\,\delta^2$, $f_1 = 26\,\delta^2$, $F = 45{,}6\,\delta^2$ ist, $W = 1470\,\delta^4$ ergeben.

§. 243. Träger von constanter Festigkeit. Wir setzen voraus, dass man aus praktischen Rücksichten für die verticalen und horizontalen Rippen eine constante Dicke anwende. Am zweckmässigsten würde es alsdann sein, für jeden einzelnen Querschnitt die zweckmässigste Höhe und die entsprechenden Flächen der Gurte nach §. 241 zu bestimmen. Da sich aber, wie wir gesehen haben, diese Querschnitte nicht realisiren lassen, so erscheint es passender, für den höchsten Querschnitt die Verhältnisse passend nach §. 242 anzunehmen, und die Höhe nach dem Gesetze 180 (§. 241) zu ändern. Die grösste Höhe sei h', das entsprechende Moment M'; alsdann ist nach 180 $h : h' = \sqrt{M} : \sqrt{M'}$ also

$$190. \quad h = h' \sqrt{\frac{M}{M'}}.$$

Der Aufriss ist demnach derselbe, wie bei einem Stabe mit proportionalem Querschnitte und constanter Breite (vergl. Taf. III Fig. 2, 5, 8, 10, Taf. IV Fig. 2, 5, 7, 10).

Setzt man diesen Ausdruck für h in 177 (§. 239) ein, so ergiebt sich, dass auch $f = b\,\delta$, $f_1 = b_1\,\delta_1$ dem $\sqrt{M}$ proportional sind, so dass wir auch

$$191. \quad b = b' \sqrt{\frac{M}{M'}}, \quad b_1 = b_1' \sqrt{\frac{M}{M'}}$$

setzen können, wenn b', b_1' die Breiten der horizontalen Rippen am höchsten Querschnitte bezeichnen. Dies ist natürlich nur annähernd richtig. Will man einen Querschnitt genauer berechnen, so kann dies leicht in der in §. 239 gezeigten Weise geschehen.

Wenn auch die Breite b, b_1 der Seitenrippen constant bleiben soll, so ist nur h zu berechnen. Man hat dann zunächst zu entscheiden, ob ein Bruch durch Zug oder Druck eintreten kann, d. h. ob $\frac{a}{a_1} \gtrless \frac{K}{\Re}$ ist, da jetzt im allgemeinen nicht mehr $\frac{a}{a_1} = \frac{K}{\Re}$ sein wird. Man berechnet alsdann am besten a, a_1 nach 168 oder 170 und W nach 172 oder 173 für

Digitized by Google

zwei angenommene Werthe von h. Durch Interpolation bestimmt man sodann h so, dass $\frac{W}{a} = \frac{M}{K}$ oder $\frac{W}{a_1} = \frac{M}{\mathfrak{K}}$ wird.

Beispiel. Ein Träger von 400^c Spannweite sei in der Mitte mit 2000 Klgr. belastet. Es sei $K = 212$, $\mathfrak{K} = 530$. Für die Mitte ist $M = \frac{1}{4} G l = \frac{1}{4} . 2000 . 400 = 200000$, daher wird nach 188:

$$\delta = 0{,}207 \sqrt[3]{\frac{200000}{530}} = 1{,}5.$$

Nach dem Profile Fig. 86 wird nun $h = 16 . 1{,}5 = 24$, $b = 6{,}5 . 1{,}5 = 9{,}8$, $b_1 = 1{,}5 . 1{,}5 = 2{,}3$, $\hat{o} = 2 . 1{,}5 = 3$, $\hat{o}_1 = 1{,}2 . 1{,}5 = 1{,}8$. Nimmt man das eine Ende als Anfang der x an, so ist $M = \frac{1}{2} G x$, $M' = \frac{1}{4} G l$, daher

$$h = h' \sqrt{\frac{2x}{l}} = 34 \sqrt{\frac{x}{l}}$$

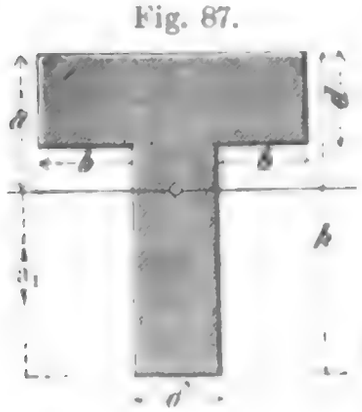
und annähernd auch $b = 14 \sqrt{\frac{x}{l}}$, $b_1 = 3{,}25 \sqrt{\frac{x}{l}}$. So z. B. für $x = \frac{1}{4} l$ $h = 34 \sqrt{\frac{1}{4}} = 17$, $b = 14 \sqrt{\frac{1}{4}} = 7$, $b_1 = 3{,}25 \sqrt{\frac{1}{4}} = 1{,}6$. Genauer ergiebt sich (vergl. das Beispiel zu §. 239) für $x = \frac{1}{4} l$ $b = 8{,}0$, $b_1 = 1{,}7$.

XXVII. Kapitel.

T-förmiger Querschnitt.

§. 244. Querschnittsgrössen. Aus §. 241 ist zu ersehen, dass für das Gusseisen unter Umständen auch der T-förmige Querschnitt von Vortheil sein könne. Die für den unsymmetrisch I-förmigen Querschnitt genommenen Resultate lassen sich zum Theil auf den T-förmigen anwenden, indem man die Fläche f_1 des einen Gurtes zu Null annimmt. Alle für den I-förmigen Querschnitt gebrauchten Bezeichnungen (Fig. 87) behalten wir bei.

Fig. 87.



Als Abstand der am meisten ausgedehnten und zusammengedrückten Fasern von der horizontalen Schweraxe (bei verticaler Mittelrippe) ergiebt sich zunächst aus 168 (§. 237)

$$192. \quad \left| \begin{array}{l} a = \dfrac{h^2 \delta + 2 b \hat{o}^2}{2 (h \delta + 2 b \hat{o})}, \\ a_1 = \dfrac{h^2 \delta + 4 h b \hat{o} - 2 b \hat{o}^2}{2 (h \delta + 2 b \hat{o})}, \end{array} \right.$$

oder auch nach 169:

$$193. \quad a = \frac{1}{2} h - \frac{f (h - \hat{o})}{2 F}, \quad a_1 = \frac{1}{2} h + \frac{f (h - \hat{o})}{2 F}.$$

Vernachlässigt man $\hat{o}$ gegen h, so ist das Verhältniss zwischen a und a_1

$$194. \quad \frac{a}{a_1} = \frac{F - f}{F + f} = \frac{h \delta}{2 f + h \delta}.$$

Digitized by Google

Das Trägheitsmoment wird nach 172 genau

195. $W = \frac{1}{3}[(h^2 - 3\,a\,a_1)\,h\,\delta + 2\,b\,\partial\,(3\,a^2 - 3\,a\,\partial + \partial^2)]$,

und nach 174 annähernd, wenn man ∂ gegen h vernachlässigt,

196. $W = \frac{1}{12}\,h^3\,\delta + \frac{1}{4}\,f\,h^2 - \frac{f^2\,h^2}{4\,F}$.

§. 245. Querschnittsdimensionen bei angenommener Dicke. Die Gleichung $a : a_1 = K : \mathfrak{K}$ giebt mit Berücksichtigung der Ausdrücke 192:

197. $\frac{h^2\,\delta + 2\,b\,\partial^2}{h^3\,\delta + 4\,h\,b\,\partial - 2\,b\,\partial^2} = \frac{K}{\mathfrak{K}}$.

Die Reduction auf b giebt

198. $b = \frac{(\mathfrak{K} - K)\,h^3\,\delta}{2\,(2\,K\,h - \mathfrak{K}\,\partial - K\,\partial)\,\partial}$.

Annähernd wird

199. $f = 2\,b\,\partial = \frac{\mathfrak{K} - K}{2\,K}\,h\,\delta$.

Für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$ wird hiernach $f = \frac{3}{4}\,h\,\delta$, so dass sich die Flächen der horizontalen und verticalen Rippe nahe wie 3 : 4 verhalten. Die Einsetzung des Ausdruckes für b in die Formel 195 giebt, wenn man gleichzeitig berücksichtigt, dass $a = \frac{K}{\mathfrak{K} + K}\,h$, $a_1 = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} + K}\,h$ ist, nach gehöriger Reduction

$$W = \frac{K\,(2\,\mathfrak{K} - K)\,h^2 - (\mathfrak{K}^2 + 2\,\mathfrak{K}\,K - 2\,K^2)\,h\,\delta + (\mathfrak{K}^2 - K^2)\,\partial^2}{3\,(\mathfrak{K} + K)\,(2\,K\,h - \mathfrak{K}\,\partial - K\,\partial)}\,h^2\,\delta.$$

Für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$ wird hiernach

$$W = \frac{16\,h^2 - 37\,h\,\partial + 21\,\partial^2}{21\,(4\,h - 7\,\partial)}\,h^2\,\delta.$$

Annähernd wird

$$W = \frac{2\,\mathfrak{K} - K}{6\,(\mathfrak{K} + K)}\,h^3\,\delta.$$

Für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$ wird hiernach annähernd $W = \frac{4}{21}\,h^3\,\delta = 0{,}19\,h^3\,\delta$. Setzt man diesen Ausdruck für W in eine der Festigkeitsbedingungen $K\,W = M\,a$, $\mathfrak{K}\,W = M\,a_1$ und beachtet dabei, dass $a = \frac{K\,h}{\mathfrak{K} + K}$, $a_1 = \frac{K\,h}{\mathfrak{K} + K}$ ist, so ergiebt sich zur Bestimmung von h folgende cubische Gleichung

200. $[K\,(2\,\mathfrak{K} - K)\,h^2 - (\mathfrak{K}^2 + 2\,\mathfrak{K}\,K - 2\,K^2)\,h\,\partial + (\mathfrak{K}^2 - K^2)\,\partial^2]\,h\,\delta = 3\,M\,(2\,K\,h - \mathfrak{K}\,\partial - K\,\partial)$.

Annähernd ist $K\,(2\,\mathfrak{K} - K)\,h^3\,\delta = 6\,K\,M\,h$, also

201. $h = \sqrt{\frac{6\,M}{(2\,\mathfrak{K} - K)\,\delta}}$.

Hat man hiernach h annähernd bestimmt, so würde man aus der vorigen cubischen Gleichung leicht h genauer berechnen können.

Für $\mathfrak{K} = 2{,}5\,K$ wird hiernach h nur $\sqrt{0{,}875} = 0{,}935$mal so gross,

Digitized by Google

als beim I-förmigen Querschnitte (§. 241), also bei gleichmässiger Belastung ungefähr 0,065 l bis 0,11 l, im Mittel also etwa $h = \frac{1}{11} l$.

Bezeichnet man die gesammte Querschnittsfläche beim I- und T-förmigen Querschnitte mit F und F_0, so ergiebt sich nach diesem §. und nach §. 241.

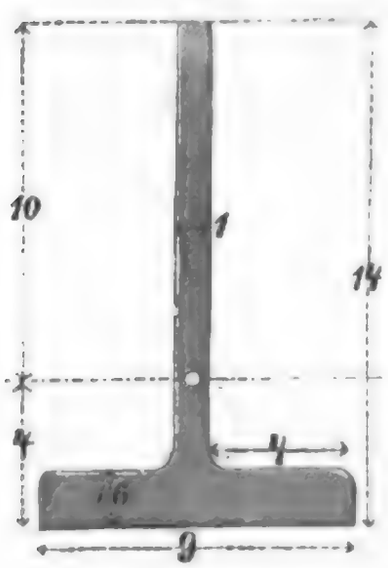
$$F_0 = \frac{\Re + K}{2K\sqrt{2\Re - K}}\sqrt{6 M \delta}, \quad F = \frac{\sqrt{(\Re + K)^3}}{3\Re K}\sqrt{6 M \delta};$$

$$\frac{F}{F_0} = \frac{2\sqrt{(\Re + K)(2\Re - K)}}{3\Re}.$$

Für $\Re = 2{,}5\,K$ wird hiernach $F = 0{,}998\,F_0$, so dass für beide Querschnittsformen fast genau dieselbe Fläche nöthig ist.

§. 246. Aehnliche Querschnittsformen. Wir nehmen wiederum an, dass man zwischen der Höhe h und der Dicke δ ein constantes Verhältniss anwende und setzen daher $h = m\delta$. Nach 199 wird alsdann $f = \frac{\Re - K}{2K} m \delta^2$. Nehmen wir ferner auch ein constantes Verhältniss zwischen den Dicken der verticalen und horizontalen Rippe an, indem wir $\partial = n\delta$ setzen, so wird $b = \frac{f}{2\partial} = \frac{f}{2n\delta}$, d. i.

Fig. 88.



$$202. \quad b = \frac{m(\Re - K)}{4nK}\delta,$$

so dass jetzt auch ein constantes Verhältniss zwischen der Breite b und der Dicke δ eintritt, sonach alle Querschnitte ähnlich ausfallen.

Genauer wird, wenn man die Gleichung 197 auf b reducirt,

$$203. \quad b = \frac{m^2(\Re - K)}{2n(2mK - nK - n\Re)}\delta.$$

Passende Verhältnisse sind ungefähr $m = 14$, $n = 1{,}6$. Alsdann wird für $\Re = 2{,}5\,K$ nach 202 annähernd $b = 3{,}3\,\delta$ und nach 203 genauer $b = 4\,\delta$. Für diese Verhältnisse (Fig. 88) ergiebt sich genau

$$204. \quad W = 489\,\delta^4,$$

$$205. \quad \delta = 0{,}274\sqrt[3]{\frac{M}{\Re}} = 0{,}202\sqrt[3]{\frac{M}{K}},$$

$$206. \quad F = 26{,}8\,\delta^2 = 2{,}00\sqrt[3]{\left(\frac{M}{\Re}\right)^2} = 1{,}09\sqrt[3]{\left(\frac{M}{K}\right)^2}.$$

Die Vergleichung mit 189 (Seite 231) zeigt, dass die Gesammtfläche F nur 2 bis $3\frac{0}{0}$ grösser ist, als beim I-förmigen Querschnitte.

Digitized by Google

VII. Abschnitt.

Genaue Biegungstheorie gerader Stäbe.

XXVIII. Kapitel.

Allgemeine Theorie.

§. 247. Fixirung der Aufgabe. Eine ganz allgemeine, genaue Bestimmung der Spannungen und der Formänderung bei gegebener Form des Körpers und gegebener Belastungsweise ist zur Zeit noch nicht geglückt. Wir müssen daher auch hier solche Voraussetzungen über die Form und Belastungsweise machen, welche eine genaue Theorie zulassen.

Wir machen zunächst die Annahme, dass die äusseren Kräfte nur auf die Endquerschnitte, nicht aber auf die Mantelfläche und das Innere des Körpers wirken und dass die Mittelkraft der auf eine Endfläche wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt derselben gehe.

Ferner machen wir die Annahme, dass auf eine zur Axe des Körpers parallele Ebene keine andere Spannung wirke, als eine zur Axe des Körpers parallele Schubspannung, dass also die einzelnen Fasern auf einander keinen Druck, sondern nur einen Schub in der Längsrichtung ausüben. Für eine solche Ebene ist nach dem in §. 60 gewählten Coordinatensysteme $\alpha = 90^0$, $\cos\alpha = 0$; für die auf die Ebene wirkende Spannung muss $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$ (siehe §. 10), also $R = K$, nach 5 (§. 10) also $Y = 0$, $Z = 0$ sein. Dies tritt nach 4 nur ein, wenn

$$1. \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 0, \quad T_1 = 0$$

ist. Dies wäre unmöglich, wenn äussere Kräfte auf die Mantelfläche des Körpers wirkten.

Endlich setzen wir voraus, dass der Körper prismatisch und symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene sei, in welcher die Mittelkräfte der auf die Endflächen wirkenden Kräfte liegen, und aus einer isotropen Masse bestehe. Indess lässt sich die Theorie in gleicher Weise auch für einen Körper mit drei Elasticitätsaxen durchführen.

Die zu entwickelnde strenge Theorie ist unter dem Namen „De Saint-Venant'sches Problem" bekannt.

Digitized by Google

§. 248. Gleichgewichtsbedingungen. Die anfängliche Axe des Körpers nehmen wir als Axe der x und eine auf der deformirten Axe senkrechte, durch ein Ende der Axe gehende Ebene als Ebene der y z an; die Kraftebene sei die Ebene der y.

Damit die auf einen Querschnitt wirkenden Spannungen mit den äusseren Kräften im Gleichgewichte sind, müssen die Bedingungen 5, 6 (§. 63) erfüllt sein, nämlich

$$2.\quad \int N\,df = P;\quad \int T_3\,df = Q,\quad \int T_2\,df = 0;$$
$$3.\quad \int N\,y\,df = 0,\quad \int N\,z\,df = 0.$$

Für die Spannungen an der Mantelfläche des Körpers gilt die Gleichung 7 (§. 63), nämlich, wenn wir beachten, dass $\cos\gamma = \sin\beta$ ist,

$$4.\quad T_3'\cos\beta + T_2'\sin\beta = 0,$$

wobei β der Winkel zwischen der Normale der Querschnittsperipherie und der Axe der y ist.

Für die Spannungen in einem beliebigen Punkte gelten die Beziehungen 3 (§. 9); setzen wir $N_2 = N_3 = 0$, $T_1 = 0$, $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$, so gehen dieselben über in

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

§. 249. Verrückungen der Punkte. Da $N_2 = N_3 = 0$ ist, so ist nach 49 (§. 27) $\sigma_1 = \frac{N}{E}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{1}{m}\sigma_1$ oder

$$6.\quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{N}{E},$$

$$7.\quad \frac{\partial\eta}{\partial y} = -\frac{1}{m}\frac{\partial\xi}{\partial x},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Die dritte der Gleichungen 1 und die beiden letzten der Gleichungen 5 geben, wenn man für T_1, T_2, T_3 die Ausdrücke 58 (§. 29) setzt,

$$8.\quad \frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0,$$

$$9.\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial z} = 0.$$

Die erste der Gleichungen 5 giebt mit Berücksichtigung der Ausdrücke 58 (§. 29) und wenn man für N den Ausdruck aus 6 einsetzt,

$$E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Nun aber ist nach 7 $\frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$. Setzen wir ausserdem nach 54 (§. 28) $E - \frac{2}{m}G = \frac{2(m+1)}{m}G - \frac{2}{m}G = 2G$, so geht die vorige Gleichung über in

$$10.\quad 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = 0.$$

Digitized by Google

Endlich giebt die Gleichung 4 für einen Punkt der Mantelfläche

$$11.\quad \left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\sin\beta=0.$$

Wegen der Symmetrie des Körpers gegen die Kraftebene muss für jeden Punkt in der Kraftebene oder für jeden Punkt, dessen $z=0$ ist,

$$12.\quad \zeta=0,\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}=0$$

sein. Für den Punkt, welcher im Coordinatenanfange liegt, wird ausserdem nach der Fixirung des Coordinatensystems

$$13.\quad \xi=0,\quad \eta=0,\quad \frac{d\eta}{dx}=0.$$

§. 250. Umgestaltung der Gleichungen. Die Hauptgleichungen 9 und 10 lassen eine für die weitere Benützung bequeme Umgestaltung zu. Differenziiren wir die erste, zweite, dritte dieser Gleichungen bezüglich nach y, z, x, so ergiebt sich:

$$\text{a.}\quad \begin{cases} \frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial y}=0, \\ \frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial z}+\frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial z^2}=0, \\ 2\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial z^2}=0. \end{cases}$$

Die Subtraction der beiden ersten Gleichungen von der letzten giebt

$$2\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}-\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial z}=0.$$

Nach 7 aber wird $\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial y}=-\frac{1}{m}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial z}=-\frac{1}{m}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}$, mithin wird

$$14.\quad \frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}=0.$$

Differenziirt man ferner die Gleichungen 9 bezüglich nach z und y, und addirt sie sodann, so ergiebt sich

$$2\frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial z}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial y}=0.$$

Nach 8 aber ist die Summe der beiden letzten Glieder $=0$, mithin

$$15.\quad \frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=0.$$

Nach 7 wird $\frac{\partial^3\eta}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial z}=-\frac{1}{m}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}=0$, daher wird nach den beiden ersten der Gleichungen a

$$16.\quad \frac{\partial^3\xi}{\partial x\,\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3\zeta}{\partial x\,\partial z^2}=0.$$

Bezeichnen wir wie früher die relative Längenänderung $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ einer Faser mit σ, so lassen sich die Gleichungen 14, 15, 16 auch schreiben:

Digitized by Google

$$17.\quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2\sigma}{\partial y\,\partial z}=0.$$

§. 251. Integration. Drücken wir σ durch eine Summe von Gliedern aus, welche beliebige Potenzen und Produkte der Variabelen x, y, z enthalten, so darf zur Erfüllung der drei ersten der Gleichungen 17 keine höhere Potenz von x, y, z vorkommen, als die erste; zur Erfüllung der vierten Gleichung darf auch das Produkt yz nicht vorkommen. Der Symmetrie wegen muss σ für dasselbe x und y und für gleiche positive und negative z gleich gross sein, was nur möglich ist, wenn z gar nicht vorkommt. Demnach ist

$$\sigma=\frac{\partial\xi}{\partial x}=a+by+x(a_1+cy).$$

Die Faserspannung wird $N=E\sigma=E[a+by+x(a_1+b_1y)]$. Die erste der Gleichgewichtsbedingungen 2 giebt daher $P=E[(a+a_1x)\int df+(b+cx)\int y\,df]=EF(a+a_1x)$. Da aber der über die Belastung gemachten Annahme zufolge P nach x constant ist, so kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn $a_1=0$ ist. Demnach ist nun

$$18.\quad \sigma=\frac{\partial\xi}{\partial x}=a+by+cxy.$$

Nach 7 wird nun

$$19.\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial\zeta}{\partial z}=-\frac{1}{m}(a+by)-\frac{c}{m}xy.$$

Die Integration nach x, y, z giebt

$$20.\quad \xi=x(a+by)+\tfrac{1}{2}cx^2y+f(y,z),$$

$$21.\quad \begin{cases}\eta=-\dfrac{1}{m}y(a+\tfrac{1}{2}by)-\dfrac{c}{2m}xy^2+\varphi(x,z),\\ \zeta=-\dfrac{1}{m}z(a+by)-\dfrac{c}{m}xyz,\end{cases}$$

wobei f, φ vor der Hand noch unbekannte Funktionen der eingeklammerten Variabelen bezeichnen. Zum Ausdrucke von ζ ist keine Funktion von x, y hinzuzufügen, weil nach 12 für $z=0$ auch $\zeta=0$ sein muss.

Nach 9 wird

$$22.\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}=-b-cx,\\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}=0.\end{cases}$$

Die einmalige Integration giebt

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-bx-\tfrac{1}{2}cx^2-\varphi'(y,z),\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x}=\psi'(y,z)$$

und die nochmalige Integration

$$\begin{cases}\eta=-\tfrac{1}{2}bx^2-\tfrac{1}{6}cx^3+\varphi'(y,z)+\varphi''(y,z),\\ \zeta=x\psi'(y,z)+\psi''(y,z).\end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Ausdrücken 21 zeigt, dass $\varphi''(y,z)=-\frac{1}{m}y(a+\frac{1}{2}by)+$ einer in $\varphi(x,z)$ enthaltenen Funktion

von z, $\varphi'(y,z) = -\frac{c}{2m}y^2 +$ einer in $\varphi(x,z)$ enthaltenen Funktion von z, $\psi''(y,z) = -\frac{1}{m}z(a+by)$ und endlich $\psi'(y,y) = -\frac{c}{m}yz$ ist. Demnach wird

$$23.\quad \begin{cases} \eta = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{6}cx^3 - \frac{1}{m}y(a+\frac{1}{2}by) \\ \qquad\qquad -\frac{c}{2m}xy^2 + \varphi_1(z) + x\varphi_2(z), \\ \zeta = -\frac{1}{m}z(a+by) - \frac{c}{m}xyz. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung 8 giebt

$$\frac{d\varphi_1(z)}{dz} + x\frac{d\varphi_2(z)}{dz} - \frac{bz}{m} - \frac{cxz}{m} = 0.$$

Diese Gleichung kann für jedes z nur erfüllt werden, wenn folgende Beziehungen bestehen:

$$\frac{d\varphi_1(z)}{dz} = \frac{b}{m}z, \quad \frac{d\varphi_2(z)}{dz} = \frac{c}{m}z.$$

Die Integration dieser Gleichungen giebt

$$\varphi_1(z) = b' + \frac{b}{2m}z^2, \quad \varphi_2(z) = c' + \frac{c}{2m}z^2.$$

Da für $x=0$, $y=0$, $z=0$ nach 13 auch $\eta = 0$ und $\frac{d\eta}{dx} = 0$ werden muss, so giebt die Einsetzung von $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ in 23, dass $b'=0$, $c'=0$ ist. Demnach wird nun nach 23 endlich:

$$24.\quad \begin{cases} \eta = -\frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{6}cx^3 \\ \qquad\qquad -\frac{1}{m}[ay + \frac{1}{2}b(y^2 - z^2)] - \frac{c}{2m}x(y^2 - z^2), \\ \zeta = -\frac{1}{m}z(a+by) - \frac{c}{m}xyz. \end{cases}$$

Die vorkommenden Constanten a, b, c sind durch die noch unberücksichtigten Gleichgewichtsbedingungen 2, 3 zu bestimmen.

§. 252. Bestimmung von f(y, z). Für den Ausdruck von ξ bleibt noch f(y, z) zu bestimmen übrig, was mit Hilfe der noch unberücksichtigten Gleichung 10 geschehen kann. Nach 20 wird

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = cy, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2},$$

daher nach 10:

$$2cy + \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} = 0.$$

Wir setzen, um diese Gleichung bequemer zu gestalten,

$$f(y,z) = -cyz^3 + c\Theta,$$

worin Θ eine neue Funktion von y und z bedeutet. Alsdann wird

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial y^2} = c\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} = -2cy + c\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2},$$

mithin wird

$$25. \quad \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0.$$

Der Ausdruck 20 für ξ geht nun über in:

$$26. \quad \xi = x(a + by) + \tfrac{1}{2}cx^2y - cyz^2 + c\Theta.$$

Die nur für Punkte in der Mantelfläche giltige Gleichung 11 geht durch Einführung der Ausdrücke für ξ, η, ζ über in

$$27. \quad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{2m+1}{m}yz\right)\sin\beta = 0.$$

Für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ muss $\xi = 0$ und für jeden Punkt, dessen $z = 0$ ist, $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0$ werden. Dies giebt noch für Θ die Bedingungen

$$28. \quad \Theta_{y=0,\,z=0} = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial z}_{z=0} = 0.$$

Durch die Gleichungen 25, 27 und 28 ist die Funktion Θ vollständig bestimmt. Wie man sieht, ist Θ nur von der Form des Querschnittes abhängig und lässt sich sonach nur nach Fixirung der Querschnittsform bestimmen.

§. 253. Spannungen. Als Spannungen ergeben sich nun nach der Formel $N = E\sigma$ und den Ausdrücken 58 (§. 29) für T_3, T_2:

$$29. \quad \begin{cases} N = E(a + by + cxy), \\ T_3 = Gc\left[\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m}\right], \\ T_2 = Gc\left[\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{2m+1}{m}yz\right]. \end{cases}$$

Um den vorausgesetzten Zustand, nach welchem $N_2 = N_3 = 0$, $T_1 = 0$ ist, vollständig herbeizuführen, müssen die äusseren Kräfte genau nach diesem Gesetze über die Endquerschnitte vertheilt sein, was natürlich in Wirklichkeit nie der Fall sein wird.

Die ersten der Gleichgewichtsbedingungen 2, 3 geben, wenn man beachtet, dass $\int df = F$, $\int y\,df = 0$, $\int y^2 df = W$ ist,

$$30. \quad EFa = P, \quad EW(b + cx) = M.$$

Daher wird die Faserspannung

$$31. \quad N = \frac{P}{F} + \frac{My}{W},$$

was genau der Gleichung 22 (§. 67) entspricht. Ferner wird nach der zweiten der Gleichungen 30: $EWc = \frac{dM}{dx} = Q$, also $c = \frac{Q}{EW}$, mithin nach 29:

$$32. \quad \begin{cases} T_3 = \frac{GQ}{EW}\left[\frac{y^2 + (2m-1)z^2}{2m} - \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right] \\ T_2 = \frac{GQ}{EW}\left[\frac{2m+1}{m}yz - \frac{\partial\Theta}{\partial z}\right], \end{cases}$$

Digitized by Google

so dass T_2, T_3, entsprechend dem früher gefundenen Resultate, nur von Q, nicht von P und M abhängen.

§. 254. Formänderung. Die Verrückungen eines Punktes der Axe nach Richtung der x, y seien ξ_0, η_0. Nach 24 (§. 251) wird

$$33. \quad \eta_0 = -\tfrac{1}{2} b x^2 - \tfrac{1}{6} c x^3.$$

Demnach ist die Krümmung der deformirten Axe sehr nahe

$$34. \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\eta_0}{dx^2} = -b - c x = -\frac{M}{E W}.$$

was mit dem früher gefundenen Ausdrucke (45, §. 79) übereinstimmt.

Bezeichnen wir den Abstand des deformirten Querschnittes im Punkte y z von der Normalebene der deformirten Axe mit δ, so ist

$$\begin{aligned} \delta &= \xi - \xi_0 + y \frac{d\eta_0}{dx} \\ &= x(a + b y) + \tfrac{1}{2} c x^2 y - c y z^2 + c \Theta \\ &\quad - a x - c \Theta_0 - x y (b + \tfrac{1}{2} c x) \\ &= -c y z^2 + c \Theta - c \Theta_0, \end{aligned}$$

d. i., da nach 28 $\Theta_0 = 0$ ist,

$$35. \quad \delta = -c y z^2 + c \Theta = \frac{Q(\Theta - y z^2)}{E W}.$$

Bezeichnen wir die Verrückungen eines Punktes des Querschnittes nach Richtung der Axen der v, w, die letzteren als fest gedacht, mit ν, ω, so ist $\nu = \eta - \eta_0$, $\omega = \zeta$, d. i. nach 25 und 33

$$36. \quad \begin{cases} \nu = -\dfrac{P y}{m E F} - \dfrac{M(y^2 - z^2)}{2 m E W}, \\ \omega = -\dfrac{P z}{m E F} - \dfrac{M y z}{m E W}. \end{cases}$$

Für $P = 0$ wird

$$36\,a. \quad \nu = -\frac{M(y^2 - z^2)}{2 m E W}, \quad \omega = -\frac{M y z}{m E W}.$$

Hiernach bleiben Parallele zur Axe der v gerade; bezeichnet man den Abstand ihres Durchschnittes mit der Axe der v mit a, so ist $\frac{z}{a} = \frac{d\zeta}{dy} = \frac{M z}{m E W}$, also $a = \frac{m E W}{M}$. Parallele zur Axe der w gehen in Parabeln oder Kreise über, für deren Krümmungsradius r die Beziehung gilt:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{M}{m E W}, \quad \text{also} \quad r = \frac{m E W}{M} = a.$$

Die Parallelen zu den Axen der v, w schneiden sich hiernach nach wie vor der Formänderung unter rechtem Winkel (Taf. X Fig. 1), wie es in der That sein muss, da die Schubspannungen T_1, welche ein Schiefstellen veranlassen würden, nicht vorhanden sind.

§. 255. Anwendung auf beliebige Belastung. Die entwickelten Regeln gelten auch noch bei beliebiger Belastung, jedoch nur für ein zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten liegendes Stück,

wenn wir die Annahme machen, dass die Belastung der Mantelfläche und das Eigengewicht dieses Stückes keinen Einfluss ausübt. Als die Kräfte, welche auf die Endflächen des Körpers wirken, treten hier die zwischen dem Körperelemente und den angrenzenden Körpertheilen wirkenden Spannungen auf.

Nehmen wir als Coordinatenanfang den Schwerpunkt des einen der beiden benachbarten Querschnitte an, so ist in den Ausdrücken 29 für die Spannungen $x = 0$ zu setzen. Die Coefficienten a, b, c sind allerdings nur innerhalb des betrachteten Körperelementes constant, im Allgemeinen also mit x variabel. Bestimmt man diese Coefficienten nach den Gleichgewichtsbedingungen 2, 3 (§. 248), so ergeben sich für N, T_3, T_2 genau die Ausdrücke 31, 32; nur ist hier P, Q, M als mit x variabel anzunehmen und stets für den fraglichen Querschnitt zu bestimmen.

Auch der Ausdruck 34 für die Krümmung, sowie der Ausdruck 35 für die Formänderung des Querschnittes behalten ihre Giltigkeit.

Die gleichförmige Belastung erzeugt insbesondere eine transversale Normalspannung, welche bewirkt, dass die entwickelten Regeln nicht ganz genau werden. Die grösste Normalspannung, welche hierdurch entstehen kann, ist bei der Last q pro Längeneinheit und der Breitendimension b $= \frac{q\,dx}{b\,dx} = \frac{q}{b}$. Wie in §. 75 lässt sich zeigen, dass diese Spannung gegen die Faserspannung in Beziehung auf das Verhältniss $\frac{h}{l}$ der Höhe zur Länge des Stabes von der zweiten Ordnung, also zu vernachlässigen ist.

XXIX. Kapitel.

Anwendung auf bestimmte Querschnittsformen.

§. 256. Bestimmung der Funktion Θ im Allgemeinen.

Die Funktion Θ ergiebt sich durch Integration der Gleichung 25. Derselben wird genügt durch die Funktion

$$37.\quad \Theta = \varphi(y + i\,z) + \psi(y - i\,z),$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ und φ und ψ beliebige Funktionen bedeuten. Nehmen wir φ und ψ als Summe von Potenzen von $y + i\,z$ und $y - i\,z$, multiplicirt mit beliebigen Coefficienten an, so wird

$$\begin{aligned}\Theta = {} & \alpha + \alpha_1 y + \beta z + \alpha_2 (y^2 - z^2) + \beta_2 y z \\ & + \alpha_3 (y^2 - 3 z^2) y + \beta_3 (3 y^2 - z^2) z \\ & + \alpha_4 (y^4 - 6 y^2 z^2 + z^4) + \beta_4 (y^3 - z^3) y z + \ldots .\end{aligned}$$

Die Coefficienten sind durch die Gleichungen 27 und 28 bestimmt. Nach 28 wird für $y = 0$, $z = 0$ $\Theta = 0$, mithin $\alpha = 0$. Da für dasselbe y und gleiche positive und negative z Θ gleich gross werden muss, so können ungerade Potenzen von z nicht vorkommen. Bildet man $\frac{\partial \Theta}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial z}$, setzt die erhaltenen Ausdrücke in 27 ein und beachtet, dass

Digitized by Google

wegen der Symmetrie in Beziehung auf die Axe der z für gleiche positive und negative y, $\cos\beta$ und $\sin\beta$ gleichen absoluten Werth, $\cos\beta$ dasselbe Vorzeichen, $\sin\beta$ aber entgegengesetztes Vorzeichen hat, so ergiebt sich, dass die geraden Potenzen von y in Θ verschwinden müssen; daher ist $\alpha_2 = \alpha_4 = \ldots 0$. Demnach wird nun einfacher

$$38.\quad \Theta = A\,y + B\,(y^2 - 3\,z^2)\,y + C\,(y^4 - 10\,y^2 z^2 + 5\,z^4)\,y + \ldots$$

Die Anwendung auf Punkte des Umfanges mit Berücksichtigung von 27 giebt die Constanten.

§. 257. Elliptischer Querschnitt. Die Halbaxen seien a, b, die Gleichung der Ellipse also

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1.$$

$$\frac{y_1\,dy_1}{a^2} + \frac{z_1\,dz_1}{b^2} = 0,$$

$$\tan\beta = -\frac{dy_1}{dz_1} = \frac{a^2 z_1}{b^2 y_1}.$$

Die Gleichung 27 wird daher

$$\left[\frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{y_1^2 + (2\,m-1)\,z_1^2}{2\,m}\right]\frac{y_1}{a^2} + \left[\frac{\partial\Theta}{\partial z} - \frac{2\,m+1}{m}\,y_1 z_1\right]\frac{z_1}{b^2} = 0.$$

Setzt man für Θ den Ausdruck 38 ein, so ergiebt sich, dass die Coefficienten aller Glieder von der vierten Ordnung an verschwinden müssen. Demnach wird nun einfacher

$$\Theta = A\,y + B\,(y^2 - 3\,z^2)\,y,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = A + 3\,B\,(y^2 - z^2), \quad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = -6\,B\,y\,z.$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\frac{\partial\Theta}{\partial y}$ und $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$ in die vorige Gleichung ein und multiplicirt dabei, um die Gleichung homogen zu machen, A mit $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{a^2}$, was ja $= 1$ ist, so ergiebt sich

$$\left[A\left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2}\right) + 3\,B\,(y_1^2 - z_1^2) - \frac{y_1^2 + (2\,m-1)\,z_1^2}{2\,m}\right]\frac{y_1}{a^2} - \left[6\,B + \frac{2\,m+1}{m}\right]\frac{y_1 z_1^2}{b^2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich, indem man die Coefficienten von y_1^3 und $y\,z_1^2 = 0$ setzt, die folgenden zwei einzelnen Gleichungen

$$\left(\frac{A}{a^2} + 3\,B - \frac{1}{2\,m}\right)\frac{1}{a^2} = 0,$$

$$\left(\frac{A}{b^2} - 3\,B - \frac{2\,m-1}{m}\right)\frac{1}{a^2} - \left(6\,B + \frac{m+1}{m}\right)\frac{1}{b^2} = 0$$

und hieraus

$$A = \frac{a^2[2\,(m+1)\,a^2 + m\,b^2]}{m\,(3\,a^2 + b^2)},$$

$$B = -\frac{(4\,m+1)\,a^2 + (2\,m-1)\,b^2}{6\,m\,(3\,a^2 + b^2)}.$$

Somit wird nun

$$39.\quad \Theta = \frac{6\,a^2[2\,(m+1)\,a^2+m\,b^2]-[(4\,m+1)\,a^2+(2\,m-1)\,b^2]\,(y^2-3\,z^2)}{6\,m\,(3\,a^2+b^2)}\,y.$$

Für einen Kreis mit dem Radius r wird einfacher

$$40.\quad \Theta = \frac{3\,m+2}{4\,m}\,r^2 y - \tfrac{1}{4}\,(y^2-3\,z^2)\,y.$$

Nach 32 ergiebt sich nun leicht mit Berücksichtigung des Werthes 54 (§. 28) von G:

$$41.\quad \begin{cases} T_3 = -\dfrac{Q}{2\,(m+1)\,W}\left[\dfrac{2\,(m+1)\,a^2+m\,b^2}{3\,a^2+b^2}\,(a^2-y^2)-\dfrac{(m-2)\,a^2}{3\,a^2+b^2}\,z^2\right], \\ T_2 = \dfrac{Q}{(m+1)\,W}\,\dfrac{(m+1)\,a^2+b^2}{3\,a^2+b^2}\,y\,z. \end{cases}$$

Setzen wir $m = 4$, so wird

$$\begin{cases} T_3 = -\dfrac{Q}{3\,W}\left[\dfrac{3\,a^2+1{,}2\,b^2}{3\,a^2+b^2}\,(a^2-y^2)-\dfrac{3\,a^2}{5\,(3\,a^2+b^2)}\,z^2\right], \\ T_2 = \dfrac{Q}{3\,W}\cdot\dfrac{3\,a^2+0{,}6\,b^2}{3\,a^2+b^2}\,y\,z. \end{cases}$$

d. i. nahezu

$$T_3 = -\frac{Q}{3\,W}\,(a^2-y^2),\quad T_2 = \frac{Q}{3\,W}\,y\,z,$$

was aber mit den Näherungsausdrücken 33 (§. 202) genau übereinstimmt. Dort wurde T_3 nach z constant angenommen; man sieht, dass dies nicht ganz richtig ist, jedoch ist das Glied mit z gegen die übrigen nur klein.

Für den kreisförmigen Querschnitt wird für $m = 4$

$$T_3 = -\frac{Q}{3\,W}\,[1{,}05\,(r^2-y^2)-0{,}15\,z^2],\quad T_2 = \frac{Q}{3\,W}\cdot 0{,}90\,.\,y\,z.$$

Die Punkte, in welchen T_3 constant ist, liegen in Ellipsen, welche mit der gegebenen concentrisch sind und deren Axen nach Richtung der y und z sich wie

$$\sqrt{(m-2)\,a^2} : \sqrt{2\,(m+1)\,a^2+m\,b^2}$$

verhalten; beim Kreise ist das Verhältniss $\sqrt{m-2} : \sqrt{3\,m+2}$, oder $1 : \sqrt{\frac{3\,m+2}{m-2}}$, d. i. 1 : 2,65 bis 1 : 3,32. Die Punkte, in welchen T_2 constant ist, liegen in gleichseitigen Hyperbeln, welche die Axen der gegebenen Ellipse zu Asymptoten haben. (Taf. X Fig. 4).

Die Formänderung der Querschnitte lässt sich nach 35 leicht bestimmen.

§. 258. Querschnitt für eine gegebene Form von Θ.

Nimmt man die Form der Funktion Θ an, so bildet die Gleichung 27 (§. 252), wenn man darin $-\frac{dy}{dz}$ für $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ setzt, die Differenzialgleichung der Peripherie des entsprechenden Querschnittes. Wir wollen annehmen, dass Θ durch die einfache Form

$$42.\quad \Theta = A\,y + B\,(y^2 - 3\,z^2)\,y$$

dargestellt werde. Die Gleichung 27 giebt alsdann als Differenzialgleichung der Peripherie, wenn y_1, z_1 die Coordinaten eines Punktes der Peripherie bedeuten,

$$\left[A + 3\,B\,(y_1^2 - z_1^2) - \frac{y_1^2 + (2\,m - 1)\,z_1^2}{2\,m}\right] dz_1 + \left(6\,B + \frac{2\,m + 1}{m}\right) y_1\,z_1\,dy_1 = 0.$$

Wir setzen zur Integration

$$\frac{2\,m\,A}{6\,m\,B - 1} + y_1^2 = u,\quad 2\,y_1\,dy_1 = du;\quad z_1^2 = v,\quad 2\,z_1\,dz_1 = dv.$$

Die vorige Gleichung geht hierdurch über in

$$[(6\,m\,B - 1)\,u - (6\,m\,B + 2\,m - 1)\,v]\,dv + 2\,(6\,m\,B + 2\,m + 1)\,v\,du = 0.$$

Um die Variabelen sondern zu können, setzen wir $u = v\,w$, worin w eine neue Variabele bezeichnet. Dadurch wird

$$[(6\,B\,m - 1)\,w - (6\,m\,B + 2\,m - 1)]\,dv + 2\,(6\,m\,B + 2\,m + 1)\,du = 0$$

oder, weil $du = v\,dw + w\,dv$ ist, nach Sonderung der Variabelen

$$\frac{dv}{v} = \frac{c\,dw}{a - b\,w},$$

wenn wir zur Abkürzung setzen $6\,m\,B + 2\,m - 1 = a$, $18\,m\,B + 4\,m + 1 = b$, $2\,(6\,m\,B + 2\,m + 1) = c$. Die Integration giebt, wenn C eine willkührliche Constante bezeichnet, lognat $C\,v = -\frac{c}{b}$ lognat $(a - b\,w)$ oder lognat $C\,v^{-\frac{b}{c}} =$ lognat $(a - b\,w)$, also $C\,v^{-\frac{b}{c}} = a - b\,w = a - b\,\frac{u}{v}$ oder

$$C\,v^{\frac{c-b}{c}} = a\,v - b\,u,$$

d. i. wenn wir für u, v, a, b, c ihre Werthe einsetzen,

$$C\,z_1^{\frac{1-6\,m\,B}{1+2\,m+6\,m\,B}} + (18\,m\,B + 4\,m + 1)\,y_1^2 - (6\,m\,B + 2\,m - 1)\,z_1^2 + \frac{2\,m\,A\,(18\,m\,B + 4\,m + 1)}{6\,m\,B - 1} = 0.$$

Wenn man $C = 0$ setzt, so entspricht dieser Gleichung eine Ellipse. Bezeichnen wir die von der Curve auf der Axe der y und z abgeschnittenen Stücke oder die Halbaxen des Querschnittes mit a, b, so muss $y = a$ für $z = 0$ und $z = b$ für $y = 0$ werden. Diese beiden Gleichungen geben

$$\text{a.}\quad \begin{cases} A = -\dfrac{6\,m\,B - 1}{2\,m}\,a^2, \\ C\,b^{\frac{1-6\,m\,B}{1+2\,m+6\,m\,B}} = (6\,m\,B + 2\,m - 1)\,b^2 - \dfrac{2\,m\,A\,(18\,m\,B + 4\,m + 1)}{6\,m\,B - 1}. \end{cases}$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung der Curve leicht auf folgende Form bringen:

Digitized by Google

$$43.\quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + J\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + (1-J)\left(\frac{z_1}{b}\right)^n = 1,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$b.\quad n = \frac{1-6\,m\,B}{1+2\,m+6\,m\,B},\quad J = \frac{(6\,m\,B+2\,m-1)\,b^2}{(18\,m\,B+4\,m+1)\,a^2}.$$

Hierbei ist $\left(\frac{z_1}{b}\right)^n$ stets positiv zu nehmen, da sonst das obige lognat $v^{-\frac{b}{c}}$ imaginär würde. Sieht man n als gegeben an, so giebt die erste der Gleichungen a und die beiden Gleichungen b folgende Werthe für A, B, J:

$$44.\quad A = \frac{n\,(1+m)}{m\,(1+n)}\,a^2,\quad B = \frac{1-n\,(1+2\,m)}{6\,m\,(1+n)},$$

$$45.\quad J = \frac{(n-m)\,b^2}{(1+m)\,(2-n)\,a^2}.$$

Für $m = 4$ wird

$$A = \frac{5\,n}{4\,(n+1)}\,a^2,\quad B = -\frac{9\,n-1}{24\,(n+1)},\quad J = \frac{(n-4)\,b^2}{5\,(2-n)\,a^2}.$$

In der Folge wollen wir in der Regel voraussetzen, dass $m = 4$ sei.

§. 259. Discussion dieser Linie. Durch Aenderung des Werthes von n kann man Querschnittsformen von verschiedenem Charakter erzeugen. Ganz beliebig kann indess n nicht gewählt werden. Offenbar muss sich für ein z, was kleiner als b ist, ein reelles y ergeben, wenn die Curve einen anwendbaren Querschnitt repräsentiren soll. Setzen wir daher $\frac{z_1}{b} = 1-\alpha$, wobei α einen sehr kleinen positiven echten Bruch bezeichnet, so wird $\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = 1-2\,\alpha$, $\left(\frac{z_1}{b}\right)^n = 1-n\,\alpha$. Dies in die Gleichung 43 eingesetzt, giebt, wenn man auch den Ausdruck für J einführt,

$$\frac{y_1}{a} = \sqrt{\alpha\,\frac{(m+1)\,n\,a^2-(m-n)\,b^2}{(m+1)\,a^2}}.$$

Damit y_1 reell wird, muss $(m+1)\,n\,a^2 > (m-n)\,b^2$ sein, oder

$$46.\quad n > \frac{m\,b^2}{(m+1)\,a^2+b^2},\quad \text{d. i.} > \frac{4\,b^2}{5\,a^2+b^2}.$$

Jedenfalls muss also n positiv sein.

1. Hat n genau diesen Grenzwerth, so wird $J = -\frac{2\,b^2}{5\,a^2+b^2}$ und die Gleichung der Curve

$$47.\quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{2\,b^2}{5\,a^2+b^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{5\,a^2+3\,b^2}{5\,a^2+b^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^{\frac{4\,b^2}{5\,a^2+b^2}} = 1.$$

Auf Taf. X ist in Fig. 2 diese Curve für $\frac{a}{b} = 0{,}5\quad 1\quad 1{,}5$ dargestellt. Diesem entspricht $n = \frac{16}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{16}{49}$.

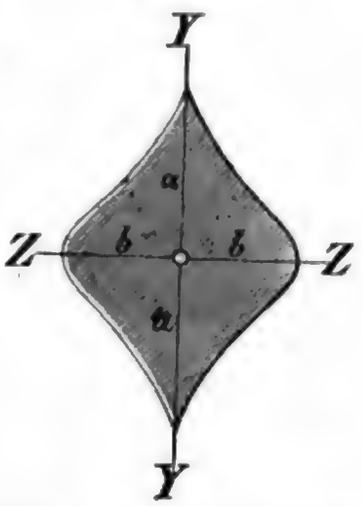
Digitized by Google

2. Der Exponent $n = \frac{1}{2}$ ist nur möglich, wenn $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{9}{5}}$, d. i. $> 1{,}342$ ist. Es wird $J = -\frac{7\,b^2}{12\,a^2}$ und die Gleichung der Curve

$$48.\quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{7\,b^2}{15\,a^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{15\,a^2 + 7\,b^2}{15\,a^2}\sqrt{\frac{z_1}{b}} = 1.$$

Der Querschnitt weicht in diesem Falle wenig vom Rhombus ab (Fig. 89 für $m = 4$, $a = 1{,}5\,b$) und kann für diesen substituirt werden, da sich die Funktion Θ für den Rhombus nur in complicirter transscendenter Form darstellen lässt.

Fig. 89.



3. Der Exponent $n = 1$ ist nur möglich, wenn $\frac{a}{b} > \sqrt{\frac{3}{5}}$, d. i. $> 0{,}775$ ist. Es wird $J = -\frac{3\,b^2}{5\,a^2}$ und die Gleichung der Curve

$$49.\quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{3\,b^2}{5\,a^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{5\,a^2 + 3\,b^2}{5\,a^2}\frac{z_1}{b} = 1.$$

Der Querschnitt wird von zwei Hyperbeln eingeschlossen, deren Scheitel in den Enden der Axen b liegen (Taf. X Fig. 2, c). Die reelle Axe einer Hyperbel wird $\frac{5\,a^2 - 3\,b^2}{6\,b}$. Wenn $\frac{a}{b}$ den kleinst möglichen Werth, d. i. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ hat, so wird diese reelle Axe 0; die Hyperbel geht in ihre Asymptoten über und der Querschnitt bildet genau einen Rhombus. Für diesen Fall ist also die genaue Behandlung des Rhombus leicht möglich.

4. Für $n = 2$ wird $J = \infty$, wesshalb hier eine besondere Untersuchung nöthig wird. Wir setzen $n = 2 + \alpha$, wobei α eine sehr kleine Zahl bedeutet. Alsdann wird $J = \frac{(2-\alpha)\,b^2}{5\,\alpha\,a^2}$ und die Gleichung der Curve

$$\left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^{2+\alpha} - \frac{(2-\alpha)\,b^2}{5\,\alpha\,a^2}\left[\left(\frac{z_1}{b}\right)^{2+\alpha} - \left(\frac{z_1}{b}\right)^2\right] = 1.$$

Nun aber ist $a^{x+\alpha} - a^x = \frac{\alpha}{dx}\,d\,a^x = \alpha\,a^x \operatorname{lognat} a$, also

$$\left(\frac{z_1}{b}\right)^{2+\alpha} - \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 = \alpha\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 \operatorname{lognat}\left(\frac{z_1}{b}\right).$$

Setzt man dies ein und setzt sodann nachträglich $\alpha = 0$, so ergiebt sich

$$50.\quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 - \frac{2\,b^2}{5\,a^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 \operatorname{lognat}\left(\frac{z_1}{b}\right) = 1.$$

Die Curve (Taf. X Fig. 2, d) weicht von der Ellipse wenig ab.

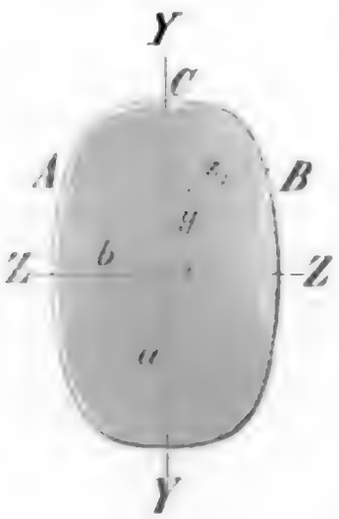
5. Setzt man $J = 1$, so wird

$$51.\quad n = 2\,\frac{5\,a^2 + 2\,b^2}{5\,a^2 + b^2}.$$

Für $\frac{a}{b} = 0{,}5\ \ 1\ \ 1{,}5\ \ 2\ \ 3$ wird bezüglich $n = 4{,}33\ \ 2{,}80\ \ 2{,}16\ \ 2{,}09\ \ 2{,}04$. Dieser Werth von n ist stets grösser, als der kleinste zulässige Werth von n. Die Curve bildet in diesem Falle eine reine Ellipse (Taf. X Fig. 2, e).

6. Setzt man $n = m$, also $n = 4$, so wird $J = 0$, folglich die Gleichung der Curve

Fig. 90.



$$52. \quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^4 = 1.$$

Man nennt diese Curve auch wohl eine falsche Ellipse (Fig. 90). Sie liegt ganz ausserhalb der reinen Ellipse mit denselben Halbaxen.

7. Wählt man n unendlich gross, so wird $J = -\frac{b^2}{5a^2}$ also die Gleichung der Curve

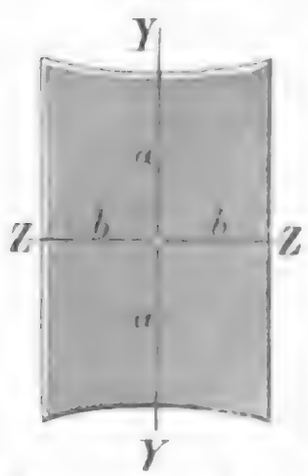
$$53. \quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{5a^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \frac{5a^2 + b^2}{5a^2}\left(\frac{z_1}{b}\right)^\infty = 1.$$

Für $\frac{z_1}{b} = \pm 1$ wird $\left(\frac{z_1}{b}\right)^\infty$ unbestimmt, da $(\pm 1)^\infty$ jeden Werth zwischen -1 und $+1$ annehmen kann. Daher wird auch $\frac{y_1}{a}$ unbestimmt. Die Curve hat also zwei gerade Theile, welche der Axe der y parallel sind. Ist $\frac{z}{b} < 1$, so wird $\left(\frac{z_1}{b}\right)^\infty = 0$, mithin

$$54. \quad \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 = 1.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Hyperbel mit der reellen Halbaxe a und der imaginären Axe $a\sqrt{5}$. Als Krümmungsradius im Scheitel ergiebt sich leicht 5 a. Sonach bildet der Querschnitt eine Art Rechteck mit zwei geraden und zwei concav gekrümmten Seiten (Fig. 91 für $a = 1{,}5\,b$).

Fig. 91.



Wählt man n nicht $= \infty$, aber sehr gross, so erhält man Curven, welche vom Rechtecke wenig verschieden sind. Für $n = 10$ ergiebt sich z. B. die Curve Taf. X Fig. 2, g. Je kleiner n wird, desto mehr nähert sich die Curve der Ellipse.

Für den genau rechteckigen Querschnitt lässt sich Θ nicht durch eine algebraische Funktion ausdrücken, weil die Anwendung der Gleichung 27 (Seite 240) auf die beiden Paare der parallelen Seiten auf zwei zwar nahezu gleiche, aber sich doch widersprechende Werthe von B führt. Die genaue Behandlung, die nur durch complicirte transscendente Funktionen möglich ist, übergehen wir. Mit hinreichender Genauigkeit können wir aber für das Rechteck die Curve substituiren, welche sich für $n = \infty$ ergiebt.

§. 260. Schubspannungen. Da die genaue Theorie für die Normalspannungen denselben Ausdruck giebt, wie die früher entwickelte Näherungstheorie, so gehen wir hier nur auf die Schubspannungen ein. Die Ausdrücke 32 für dieselben gehen durch Einführung der Werthe für A und B in die Funktion Θ über in:

Digitized by Google

$$55.\quad \begin{cases} T_3 = -\dfrac{n(m+1)(a^2-y^2)-(n-m)z^2}{2(m+1)(n+1)}\dfrac{Q}{W}, \\ T_2 = \dfrac{yz}{n+1}\dfrac{Q}{W}. \end{cases}$$

Hat n den kleinst möglichen Werth 46, so wird

$$56.\quad \begin{cases} T_3 = \dfrac{m(a^2b^2-b^2y^2-a^2z^2)Q}{2(m+1)(a^2+b^2)W}, \\ T_2 = \dfrac{[(m+1)a^2+b^2]yzQ}{(m+1)(a^2+b^2)W}. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass T_3 in Ellipsen, deren Axen in Richtung der y und z sich wie a : b verhalten, constant ist. Wenn $a = b$ ist, so ist T_3 in Kreisen constant (Taf. X Fig. 3). Dies ist allerdings eine starke Abweichung von der Näherungstheorie, welche T_3 in Geraden constant annimmt, welche der Axe der z parallel sind.

Für $n = \frac{1}{2}$ (Rhombus) wird für $m = 4$

$$57.\quad T_3 = \frac{5(a^2-y^2)+7z^2}{30}\cdot\frac{Q}{W},\quad T_2 = \frac{2yz}{3}\cdot\frac{Q}{W}.$$

Für die falsche Ellipse, d. i. für $n = m = 4$ wird sehr einfach

$$58.\quad T_3 = \frac{2(a^2-y^2)Q}{5W},\quad T_2 = \frac{yzQ}{5W},$$

so dass T_3 von z unabhängig, also in Parallelen zur Axe der z constant ist (Taf. X Fig. 5). Für diesen Querschnitt stimmt demnach die genaue Theorie genau mit der Näherungstheorie überein.

T_3 wird, wenn $n < m$ ist, in concentrischen Ellipsen mit demselben Axenverhältniss, wenn $n > m$ ist, in concentrischen Hyperbeln mit demselben Axenverhältniss oder mit denselben Asymptoten constant. T_2 wird stets in gleichseitigen Hyperbeln, welche die Axen der y, z zu Asymptoten haben, constant. (Taf. X Fig. 3—6.)

T_3 wird, wenn $n > m$ ist, zum Maximum für $y = 0$, $z = 0$, also im Schwerpunkte; wenn aber $n < m$ ist, für $y = 0$, $z = \pm b$, also an den Enden der Halbaxen b. T_2 wird am grössten in denjenigen Punkten der Peripherie, in welchen dieselbe von den, die Winkel zwischen den Coordinatenaxen halbirenden, Geraden geschnitten wird. Es ist für $n > m$:

$$\max T_3 = -\frac{na^2Q}{2(n+1)W}.$$

Für sehr grosse n (Rechteck) wird

$$59.\quad T_3 = \left(a^2 - y^2 - \frac{1}{m+1}z^2\right)\frac{Q}{2W},\quad T_2 = 0.$$

Die reelle und imaginäre Axe der Hyperbeln, in welchen T_3 constant ist, verhalten sich zu einander wie $1 : \sqrt{2(m+1)}$, d. i. wie 1 : 3,2. Die Hyperbeln weichen innerhalb des Querschnittes wenig von Geraden ab.

261. Vergleich mit der Näherungstheorie. Nach 27 (Seite 58) ist annähernd

$$T_3 = \frac{Q\Omega}{2Wz_1},\quad T_2 = T_3\frac{z}{z_1}\frac{dz_1}{dy}.$$

Digitized by Google

Nun aber ergiebt sich durch Zerlegung des Abschnittes A C B (Fig. 90), dessen statisches Moment $\mathfrak{Q}$ in Frage kommt, in Elemente, welche der Axe der y parallel sind,

$$\mathfrak{Q} = 2\int_0^{z_1}(y_1 - y)\,dz\,\frac{y_1 + y}{2} = \int_0^{z_1}(y_1^2 - y^2)\,dz.$$

$$= \int_0^{z_1}\left[a^2 - J\,\frac{a^2}{b^2}\,z_1^2 - \frac{(1-J)\,a^2}{b^n}\,z_1^n - y^2\right]dz_1.$$

Integrirt man, wobei y als constant anzusehen ist, und setzt sodann $\frac{z_1^n}{b^n}$ aus der Gleichung des Umfanges, sowie für J seinen Werth 45 ein, so wird

$$\mathfrak{Q} = \frac{n}{n+1}(a^2 - y^2)\,z_1 - \frac{n-m}{3(m+1)(n+1)}\,z_1^3.$$

Daher wird

$$\text{a.}\quad T_3 = \frac{n(m+1)(a^2 - y^2) + \frac{1}{3}(n-m)\,z_1^2}{2(m+1)(n+1)}\,\frac{Q}{W}.$$

Nach der Gleichung 43 ist, wenn man nach der Differenziation für $(1-J)\,\frac{z_1^n}{b^n}$ den Ausdruck aus der Gleichung 43 setzt, und für J seinen Werth einführt,

$$\frac{dz_1}{dy} = \frac{2(m+1)\,y\,z_1}{n(m+1)(a^2 - y^2) + (n-m)\,z_1^2}.$$

Setzt man dies und ausserdem den Ausdruck a für T_3 in den Näherungsausdruck für T_2 ein, so ergiebt sich

$$\text{b.}\quad T_2 = \frac{n(m+1)(a^2 - y^2) + \frac{1}{3}(n-m)\,z_1^2}{n(m+1)(a^2 - y^2) + (n-m)\,z_1^2}\cdot\frac{y\,z}{n+1}\cdot\frac{Q}{W}.$$

Die Vergleichung dieser Näherungsausdrücke für T_3 und T_2 mit den genauen zeigt eine grosse Aehnlichkeit. Der genaue Ausdruck für T_3 enthält das Glied $(n-m)\,z^2$, wobei z die Abscisse eines beliebigen Punktes des Querschnittes bedeutet; der Näherungsausdruck enthält dafür das Glied $\frac{1}{3}(n-m)\,z_1^2$, wobei z_1 aber die Abscisse des der Ordinate y entsprechenden Punktes des Umfanges bedeutet. Der Ausdruck für T_2 stimmt mit dem genauen Ausdrucke nur wegen der Verschiedenheit der Glieder $\frac{1}{3}(n-m)\,z_1^2$ und $(n-m)\,z_1^2$ in Zähler und Nenner nicht ganz überein.

Je kleiner die Axe b, je kleiner also auch z und z_1 ist, desto genauer sind die Näherungsausdrücke.

Wenn $n = m$ ist, so verschwinden die Glieder mit z und z_1 und die Näherungsausdrücke stimmen mit den genauen ganz überein.

§. 262. Formänderung der Querschnitte. Setzt man den Ausdruck 42 von Θ mit Berücksichtigung der Werthe von A und B in den Ausdruck 35, so ergiebt sich als Abweichung des deformirten Querschnittes von der Normalebene zur deformirten Axe des Körpers:

$$60.\quad \delta = \frac{6n(m+1)a^2 - (2mn+n-1)y^2 - 3(2m-n+1)z^2}{6m(n+1)}\cdot\frac{Qy}{EW}.$$

Es ist zunächst bemerkenswerth, dass in diesem Ausdrucke die Axe b

Digitized by Google

nicht vorkommt. Demnach werden die deformirten Querschnitte verschiedener Körper mit gleicher Axe a, oder verschiedener Axe b, congruent sein, vorausgesetzt, dass n, sowie $\frac{Q}{W}$ für beide Körper denselben Werth hat.

Die Schnitte, welche parallel der x z Ebene sind, bilden gemeine Parabeln und die Schnitte, welche parallel der x y Ebene sind, Parabeln dritten Grades. Die Axe der z bleibt gerade, weil für $y = 0$ auch $\delta = 0$ wird. Die Schnitte, welche parallel zur Normalebene der deformirten Axe des Körpers sind, oder die Linien, in welchen δ constant ist, sind Linien dritten Grades. In einer Linie zweiten Grades (Ellipse, wenn $n < 9$, Hyperbel, wenn $n > 9$ ist) wird ebenfalls $\delta = 0$.

Wenn $2m - n + 1 = 0$, also

$$61. \quad n = 2m + 1 = 9$$

ist, so verschwindet das Glied mit z, d. h. die Abweichung δ ist in Parallelen zur Axe der z constant.

Für $n = \infty$ (Rechteck) wird für $m = 4$

$$62. \quad \delta = \frac{(10a^2 - 3y^2 + z^2)\, y\, Q}{8\, E\, W}.$$

Die Näherungstheorie giebt nach 28 (Seite 191), wenn man 2 a, 2 b, y, z für h, b, v, w setzt, genau denselben Ausdruck.

Als Beispiel sei noch der Kreis erwähnt. Für denselben wird nach 51 $n = \frac{7}{3}$, mithin

$$63. \quad \delta = \frac{7a^2 - 2(y^2 + z^2)}{8} \cdot \frac{Q\, y}{E\, W}.$$

Für Punkte des Umfanges ist $y^2 + z^2 = a^2$, mithin

$$64. \quad \delta = \frac{5}{8} \frac{Q\, a^2 y}{E\, W},$$

woraus folgt, dass der Umfang des Querschnittes eben bleibt. Ebenso bleiben auch alle concentrischen Kreise des Querschnittes eben.

Auf Taf. X ist Fig. 7—9 für verschiedene Fälle die Deformation des Querschnittes dargestellt.

§. 263. I-förmiger Querschnitt. Für jede Seitenfläche der Mittelrippe giebt die Gleichung 27 (Seite 240), wenn δ die Dicke der Mittelrippe bedeutet

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)_{z = \pm \frac{1}{2}\delta} \mp \frac{2m + 1}{2m} \delta y = 0.$$

Setzt man für Θ den Ausdruck 38 (Seite 243), so ergiebt sich

$$\pm 3\, B\, y\, \delta \pm 10\, C (y^2 - \tfrac{1}{4}\delta^2)\, y\, \delta \pm \ldots \mp \frac{2m + 1}{2m} \delta y = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Coefficienten von C an Null sein müssen und als Werth für den Coefficient B

$$B = \frac{2m + 1}{6m} = \frac{3}{8}.$$

Also wird

Digitized by Google

$$65.\quad \Theta = A\,y + \frac{2\,m+1}{6\,m}(y^2 - 3\,z^2)\,y,$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial y} = A + \frac{2\,m+1}{2\,m}(y^2 - z^2),\quad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{2\,m+1}{m}\,y\,z.$$

Als Schubspannungen in der Mittelrippe ergeben sich daher nach 32 (Seite 240) $T_2 = 0$ und, wenn wir z als sehr klein gegen y vernachlässigen,

$$T_3 = -\frac{m\,Q}{2\,(m+1)\,W}(A + y^2).$$

Die Gurte setzen wir als so niedrig voraus, dass wir die Faserspannung in derselben als constant annehmen können. Diese Spannung N ist bei dem Abstande h der Gurte nach 31 (Seite 240)

$$N = \frac{P}{F} + \frac{M\,h}{2\,W}.$$

Die Summe aller Spannungen in einem Gurtquerschnitte ist N f, wenn f den Flächeninhalt desselben bedeutet. Daher ist der Unterschied in der Spannung auf die Länge $dx = f\,dN$, also die Schubspannung T_3' am Uebergange der Mittelrippe in die Gurte $= \frac{f\,dN}{\delta\,dx}$, d. i. wenn P constant ist, da $\frac{dN}{dx} = Q$ ist,

$$T_3' = \frac{Q\,f\,h}{2\,W\,\delta}.$$

Nach dem obigen Ausdrucke für T_3 aber ist

$$T_3' = -\frac{m\,Q}{2\,(m+1)\,W}(A + \tfrac{1}{4}\,h^2).$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke giebt $A = -\frac{1}{4}\,h^2 - \frac{m+1}{m}\frac{f\,h}{\delta}$, mithin

$$66.\quad T_3 = \frac{Q}{W}\left[\frac{f\,h}{2\,\delta} + \frac{m}{8\,(m+1)}(h^2 - 4\,y^2)\right],$$

was mit dem Näherungsausdrucke 133 (Seite 214) nahe übereinstimmt.

Für die Formänderung der Querschnitte ergiebt sich nach 35 (Seite 241) für $m = 4$:

$$67.\quad \delta = -\frac{Q\,y}{8\,E\,W}\left(10\,\frac{f\,h}{\delta} + 2\,h^2 - 3\,y^2\right).$$

Bei kleiner Dicke der Mittelrippe und grossem Querschnitte ist annähernd, wenn wir $W = \frac{1}{2}\,f\,h^2$, setzen,

$$68.\quad \delta = -\frac{5\,Q\,y}{2\,E\,h\,\delta},$$

so dass die Querschnitte nahezu eben bleiben, jedoch nicht senkrecht auf der Axe.

Digitized by Google

VIII. Abschnitt.

Normalelasticität einfach gekrümmter Stäbe.

XXX. Kapitel.

Allgemeine Theorie.

§. 264. Einleitung. Die reine Normalelasticität tritt nach §. 47 nur dann ein, wenn sich die Entfernung zweier benachbarter Querschnitte an allen Stellen derselben relativ um gleich viel ändert, ohne dass sich die Querschnitte gegenseitig verschieben oder verdrehen. Die relative Längenänderung der Fasern, sowie die zum Querschnitte senkrechte Spannung, die wir auch hier Faserspannung nennen, sind alsdann an allen Punkten desselben Querschnittes gleich gross. Eine Aenderung der Krümmung der Axe findet nicht statt.

Diese Beanspruchung tritt ein, wenn die Richtung der auf einen Körpertheil wirkenden Kraft durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und auf diesem senkrecht steht. Wir wollen indess annehmen, dass die Kraft nicht unbedingt senkrecht zum Querschnitte wirkt, wohl aber in der Krümmungsebene der Axe des Körpers, die wir als einfach gekrümmt voraussetzen. Wir haben es alsdann eigentlich mit zusammengesetzter Normal- und Schubelasticität zu thun. Von den Kräften P, Q_1, Q_2 und Momenten M, M_1, M_2 (§. 46) existirt nur P, d. i. die sogenannte Axialkraft oder die in Richtung der Tangente der Axe fallende Componente und Q_1, d. i. die sogenannte Transversalkraft, oder die senkrecht zur Tangente wirkende Componente der äussern Kräfte. Für letztere werden wir Q setzen.

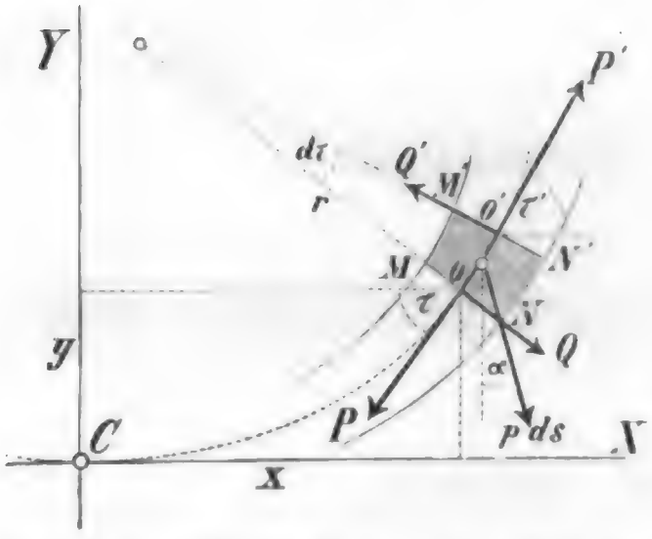
Es ist klar, dass zur blossen Beanspruchung auf Normalelasticität eine gewisse Beziehung zwischen der Form der Axe des Körpers und der Belastung existiren müsse. Die Axe nennt man in diesem Falle häufig die Stützlinie. Schlaffe Körper, wie Ketten, Seile u. s. w. nehmen die Form dieser Linie von selbst an, wesshalb man dieselbe auch Kettenlinie nennt.

§. 265. Gleichgewichtsbedingungen. Wir denken uns zwei unendlich nahe Querschnitte MN und M'N', (Fig. 92). Die Axialkraft und Transversalkraft für beide Querschnitte sei bezüglich P, Q, P', Q'.

Digitized by Google

Diese Kräfte für beide Querschnitte entgegengesetzt genommen, sind die auf das Körperelement MN, M'N', von den anstossenden Körpertheilen ausgeübten Kräfte. Auf den Körper wirke die gleichförmig vertheilte Kraft p pro Längeneinheit der Axe des Körpers und zwar unter dem Winkel α gegen die Verticale oder gegen die Axe der y. Der Winkel, welchen die Tangente mit der Horizontalen oder der Axe der x bildet, sei τ.

Fig. 92.



Damit das Körperelement gegen Drehung im Gleichgewichte ist, muss $Q \cdot \frac{1}{2} ds + Q' \cdot \frac{1}{2} ds = 0$, d. i. $Q + Q' = 0$, mithin, da Q' von Q nur um dQ verschieden ist, $Q = 0$ sein, d. h. Transversalkräfte dürfen nicht existiren.

Hierbei wurde allerdings stillschweigend vorausgesetzt, dass der Angriffspunkt der gleichmässig vertheilten Last im Schwerpunkte des Elementes liege. Wirkt aber p auf die Oberfläche des Körpers, so ist die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung, wenn δ die normale Höhe des Körpers bezeichnet, $Q \cdot \frac{1}{2} ds + Q' \cdot \frac{1}{2} ds + p\, ds \cdot \frac{1}{2} \delta \sin(\tau - \alpha)$, also, da $Q' = Q$ zu setzen ist

$$1. \quad Q = \tfrac{1}{2} p \delta \sin(\tau - \alpha).$$

Wir setzen voraus, dass die Höhe des Körpers gegen seine Längenausdehnung nur klein sei. Dann aber wird $\frac{1}{2} p \delta$ gegen die gesammte Belastung sehr klein. Aus der Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht eines endlichen Körpertheiles geht aber sofort hervor, dass die Axialkraft P der Gesammtlast proportional ist, so dass wir Q gegen P vernachlässigen können.

Die Bedingungen für das Gleichgewicht des Elementes MNM'N' gegen Verschiebung in horizontaler und verticaler Richtung sind alsdann $P \cos\tau - P' \cos\tau' - p\, ds \sin\alpha = 0$ und $P \sin\tau - P' \sin\tau' + p\, ds \cos\alpha = 0$ oder

$$2. \quad d(P \cos\tau) = -p\, ds \sin\alpha.$$

$$3. \quad d(P \sin\tau) = p\, ds \cos\alpha.$$

Die Integration giebt

$$P \cos\tau = -\int p\, ds \sin\alpha, \quad P \sin\tau = \int p\, ds \cos\alpha.$$

Die Division beider Gleichungen giebt

$$4. \quad \tan\tau = -\frac{\int p\, ds \cos\alpha}{\int p\, ds \sin\alpha}.$$

Wenn man die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschiebung in Richtung des Radius für die Mitte des Elementes aufstellt, so ergiebt sich $P \sin(\frac{1}{2} d\tau) + P' \sin(\frac{1}{2} d\tau) - p\, ds \cos(\tau - \alpha) = 0$. Da $\sin(\frac{1}{2} d\tau) = \frac{1}{2} d\tau$ zu setzen ist, so wird

Digitized by Google

$$5.\quad P\,d\tau = p\,ds\cos(\tau - \alpha).$$

Ist r der Krümmungsradius der Axe des Körpers, so ist $ds = r\,d\tau$, daher nach 5

$$6.\quad P = p\,r\cos(\tau - \alpha).$$

Ebenso ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung für Verschiebung in Richtung der Tangente für die Mitte des Elementes $P\cos\frac{1}{2}d\tau - P'\cos\frac{1}{2}d\tau + p\,ds\sin(\tau - \alpha) = 0$, d. i.

$$7.\quad dP = p\,ds\sin(\tau - \alpha).$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht auch aus 2 und 3 ableiten, indem man $d(P\sin\tau)$ und $d(P\cos\tau)$ auflöst.

§. 266. Belastung durch Verticalkräfte. Für den Fall, dass die gleichförmig vertheilte Last nur in verticaler Richtung wirkt, bezeichnen wir die Last pro Längeneinheit für die Horizontalprojection mit q. Alsdann ist $p\,ds = q\,dx$. Da ausserdem $\alpha = 0$ ist, so wird nach 2 und 3

$$8.\quad d(P\cos\tau) = 0, \qquad d(P\sin\tau) = q\,dx.$$

Die Integration der ersten Gleichung giebt $P\cos\tau = \text{Const.}$ Nennen wir $P\cos\alpha$ die Horizontalkraft, so sagt diese Gleichung, dass die Horizontalkraft constant sei. Wir wollen dieselbe mit H bezeichnen, also

$$9.\quad P\cos\tau = H$$

setzen. Demnach wird $P\sin\tau = \frac{H\sin\tau}{\cos\tau} = H\tan\tau = H\frac{dy}{dx}$, also $d(P\sin\tau) = d\left(H\frac{dy}{dx}\right) = H\frac{d^2y}{dx^2}dx$, folglich nach der zweiten der Gleichungen 8,

$$10.\quad H\frac{d^2y}{dx^2} = q.$$

Die Gleichung 7 giebt

$$11.\quad P = q\,r\cos\tau.$$

Die Axialkraft P ist ein Zug oder Druck, je nachdem die Axe des Körpers nach oben zu concav (⌣) oder convex (⌢) gekrümmt ist, so dass r im ersten Falle als positiv, im letzten als negativ einzuführen ist.

Wir nehmen in der Folge in der Regel den tiefsten oder höchsten Punkt C (Fig. 92), für welchen die Tangente eine horizontale Lage hat, den sogenannten Scheitel, als Coordinatenanfang an. Im Scheitel ist $P = H$. Ist der Radius und die Last pro Längeneinheit im Scheitel r_0, q_0, so wird nach 10, da $\tau = 0$ ist,

$$12.\quad H = q_0 r_0.$$

Die einmalige Integration von 10 giebt mit Rücksicht darauf, dass für $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ werden muss, $H\frac{dy}{dx} = \int_0^x q\,dx$; das Integral ist die Last, welche auf den ganzen Theil CO (Fig. 92) wirkt. Bezeichnen wir diese mit V, so ist also

$$13.\quad \tan\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H}.$$

Digitized by Google

Diese Bedingung ergiebt sich auch sofort durch die Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht des Körpertheiles CO.

§. 267. Belastung durch Normalkräfte. Wenn die gleichförmig vertheilte Last senkrecht auf die Axe des Körpers wirkt, so ist $\alpha = \tau$ oder $\alpha - \tau = 0$, mithin ergiebt sich nach 6 die sehr einfache Beziehung

$$14. \quad P = q r.$$

Die Gleichung 7 giebt $dP = 0$, also

$$P = \text{Const.}$$

Die Axialkraft ist also constant und gleich dem Produkte aus der Last pro Längeneinheit der Axe und dem Krümmungsradius.

§. 268. Einfluss isolirter Lasten. In irgend einem Punkte wirke eine isolirte Last R unter dem Winkel α gegen die Verticale. Die Axialkräfte in den anstossenden Körpertheilen seien P, P′ und die Tangentenwinkel dieser Körpertheile τ, τ'. Alsdann sind die Gleichgewichtsbedingungen für ein Körperelement

$$15. \quad \begin{cases} P\cos\tau - P'\cos\tau' + R\sin\alpha = 0, \\ P\sin\tau - P'\sin\tau' - R\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Wenn $\tau = \tau'$ wäre, so würden sich beide Gleichungen widersprechen. Am Angriffspunkte einer isolirten Last muss daher die Axe des Körpers stets eine Ecke bilden.

Sind nur verticale isolirte Lasten G_1, G_2, G_3, ... vorhanden, so sind die Gleichgewichtsbedingungen, wenn die Axialkräfte in den einzelnen Theilen P_1, P_2, P_3, ... sind,

$$\begin{aligned} P_1\cos\tau_1 - P_2\cos\tau_2 &= 0, & P_1\sin\tau_1 - P_2\sin\tau_2 &= G_1, \\ P_2\cos\tau_2 - P_3\cos\tau_3 &= 0, & P_2\sin\tau_2 - P_3\sin\tau_3 &= G_2, \\ P_3\cos\tau_3 - P_4\cos\tau_4 &= 0, & P_3\sin\tau_3 - P_4\sin\tau_4 &= G_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{aligned}$$

Nach den ersten Gleichungen ist $P_1\cos\tau_1 = P_2\cos\tau_2 = P_3\cos\tau_3 = \ldots$, also $P\cos\tau$ constant. Setzen wir $P\cos\tau = H$, so wird $P_1\sin\tau_1 = H\tan\tau_1$, $P_2\sin\tau_2 = H\tan\tau_2$, ..., mithin

$$16. \quad \begin{cases} H(\tan\tau_1 - \tan\tau_2) = G_1, \\ H(\tan\tau_2 - \tan\tau_3) = G_2, \\ H(\tan\tau_3 - \tan\tau_4) = G_3, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lässt sich entweder ein Winkel aus dem benachbarten bestimmen, oder aus einem beliebigen anderen, indem man die zwischenliegenden Winkel durch Addition der betreffenden Gleichungen eliminirt.

§. 269. Formänderung. Wir bezeichnen die Länge der Axe, von einem beliebigen Punkte aus gerechnet, mit s und die Längenänderung eines Bogenelementes ds mit Δ ds. Alsdann ist

Digitized by Google

$$17.\quad \frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{P}{E\,F}.$$

Ist s_1 der Werth von s nach der Formänderung, so ist $\Delta\, ds = ds_1 - ds = d\,(s_1 - s) = d\,\Delta\, s$, also auch $\frac{d\,\Delta\, s}{d\, s} = \frac{P}{E\,F}$, mithin

$$18.\quad \Delta s = \frac{1}{E}\int \frac{P}{F}\, ds.$$

Bei Belastung durch Verticalkräfte ist nach 9: $P = H \sec\tau$; ausserdem ist $ds = dx \sec\tau$, also $P\, ds = H\, dx \sec^2\tau$, mithin ist auch

$$19.\quad \Delta s = \frac{H}{E}\int \frac{dx}{F} \sec^2\tau.$$

Hat der Körper constante Festigkeit, so ist $\frac{P}{F}$ constant, nämlich $= K$; daher wird $\Delta\, s = \frac{K}{E}\int ds$, d. i.

$$20.\quad \Delta s = \frac{K\, s}{E} = \frac{P\, s}{E\,F}.$$

Hiernach ist es nun leicht, die Verrückung Δh des Scheitels zu bestimmen. Es ist nämlich s eine Funktion von a und h und zwar sei $s = f\,(a, h)$; alsdann ist $ds = \frac{\partial\, f\,(a, h)}{\partial\, h}\, dh$, also auch annähernd $\Delta s = \frac{\partial\, f\,(a, h)}{\partial\, h}\, \Delta h = \frac{\partial s}{\partial h}\, \Delta h$, mithin

$$21.\quad \Delta h = \frac{\partial h}{\partial s}\, \Delta s.$$

XXXI. Kapitel.

Anwendung auf verschiedene Belastungsweisen und Körperformen.

A. Belastung durch Verticalkräfte.

§. 270. Gleichmässige Belastung. Wir nehmen jetzt an, dass die verticale Last q pro horizontale Längeneinheit constant sei. Nach 9 (§. 266) ist $H\frac{d^2y}{dx^2} = q$. Die zweimalige Integration giebt

$$H\frac{dy}{dx} = q\,x + A,$$

$$H\,y = \tfrac{1}{2}\,q\,x^2 + A\,x + B.$$

Als Anfang der x nehmen wir den Scheitel C an (Fig. 93). Alsdann ist für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$, mithin $A = 0$ und für $x = 0$ auch $y = 0$, also $B = 0$, mithin

Digitized by Google

$$\text{a.}\quad y = \frac{q\,x^2}{2\,H}.$$

Die Axe bildet also eine Parabel.

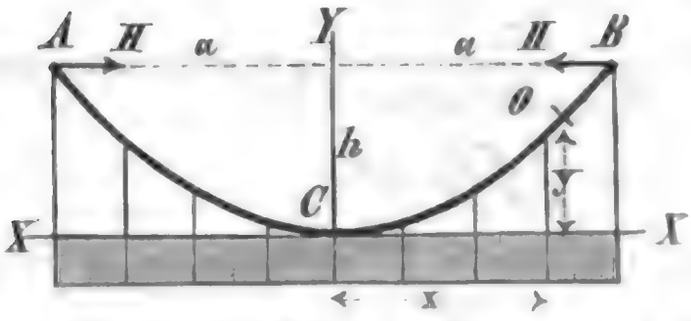
Die halbe Bogensehne oder Spannweite bezeichnen wir mit a, die Pfeil- oder Stichhöhe mit h. Alsdann muss für $x = a$ $y = h$ werden, also $h = \frac{q\,x^2}{2\,H}$, mithin die Horizontalkraft

$$22.\quad H = \frac{q\,a^2}{2\,H},$$

folglich nach a:

$$23.\quad y = \frac{h\,x^2}{a^2}.$$

Fig. 93.



Die Axialkraft ist nach 9:

$$P = H \sec\tau = H\sqrt{1 + \tan^2\tau},\quad \text{d. i.}$$

$$24.\quad P = H\sqrt{1 + 4\left(\frac{h\,x}{a^2}\right)^2},$$

so dass H vom Scheitel aus nach den Kämpfern hin zunimmt. Je nachdem die Curve nach unten oder nach oben convex ist, ist H und P positiv oder negativ, d. h. ein Zug oder ein Druck.

Die Axialkraft im Scheitel, d. i. H, ist $\frac{1}{2}\frac{q\,a^2}{h}$, d. i. ebenso gross als die grösste Gesammtspannung der Gurte eines Trägers mit zwei horizontalen Gurten mit derselben Spannweite und derselben Höhe.

Anwendung bei Kettenbrücken, Gewölben, hölzernen und eisernen Bögen.

§. 271. Formänderung. Die Längenänderung Δs des Bogens und Verrückung Δh des Scheitels lässt sich nach §. 269 genau in endlicher Form ausführen. Wir begnügen uns indessen zum Theil mit einer leichter anwendbaren Näherungsbestimmung. Es ist $\tan\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{2\,h\,x}{a^2}$, $\sec^2\tau = 1 + \frac{4\,h^2x^2}{a^4}$, daher nach 19, wenn der Querschnitt constant ist, die Längenänderung des halben Bogens:

$$\Delta s = \frac{H}{E\,F}\int_0^a \left(1 + \frac{4\,h^2x^2}{a^4}\right) dx,$$

d. i. wenn wir für H den Werth 22 einsetzen und die Integration ausführen,

$$25.\quad \Delta s = \frac{q\,a^3}{2\,E\,F\,h}\left(1 + \frac{4\,h^2}{3\,a^2}\right).$$

Die halbe Bogenlänge ist $s = \int dx \sec\tau = \int dx\sqrt{1 + \frac{4\,h^2x^2}{a^4}}$ $= \int dx\left(1 + \frac{2\,h^2x^2}{a^4} - \frac{2\,h^4x^4}{a^8} + \ldots\right)$, d. i.

Digitized by Google

$$a.\quad s = a\left(1 + \frac{2h^2}{3a^2} - \frac{2h^4}{5a^4} + \ldots\right).$$

Daher ist die Längenänderung bei constanter Festigkeit nach 20:

$$26.\quad \Delta s = \frac{K a}{E}\left(1 + \frac{2h^2}{3a^2} - \ldots\right).$$

Nach a wird $\frac{\partial s}{\partial h} = \frac{4h}{3a}\left(1 - \frac{6}{5}\frac{h^2}{a^2} + \ldots\right)$, daher nach 21 $\Delta h = \frac{3a}{4h}\Delta s\left(1 + \frac{6}{5}\frac{h^2}{a^2} + \ldots\right)$, d. i. bei constantem Querschnitte

$$27.\quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{3 q a^4}{8 E F h^3}\left(1 + \frac{38 h^2}{15 a^2} - \ldots\right)$$

und bei constanter Festigkeit

$$28.\quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{3 K a^2}{4 E h^2}\left(1 + \frac{28 h^2}{15 a^2} - \ldots\right).$$

§. 272. Körper mit kreisförmiger Axe. Ist r der Radius der Axe und nehmen wir wiederum den Scheitel C (Fig. 94) als Coordinatenanfang an, so wird $x = r\sin\tau$, $y = r(1 - \cos\tau)$. Nach 10 (Seite 255) wird

$$q = H\frac{d\tan\tau}{dx} = H\sec^2\tau\frac{d\tau}{dx},$$

d. i. da $dx = r\cos\tau\, d\tau$, also $\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{r}\sec\tau$ ist,

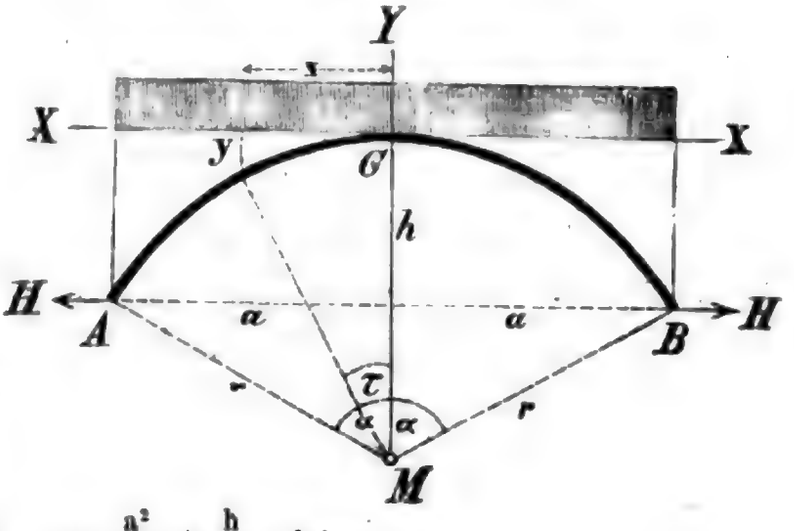
$$q = \frac{H}{r}\sec^3\tau.$$

Ist die Last im Scheitel $= q_0$, so ist $q_0 = \frac{H}{r}$, mithin auch

$$29.\quad q = q_0\sec^3\tau,$$

wonach sich auch leicht q construiren lässt (Taf. XI Fig. 1). Ist a, h die halbe Spannweite und Bogenhöhe, so ist $a^2 = h(2r - h)$, $r = \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2}$, daher

Fig. 94.



$$30.\quad H = q_0 r = q_0\left(\frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2}\right).$$

Die Axialkraft ist nach 9 und 30:

$$31.\quad P = q_0 r\sec\tau,$$

wonach sich auch P leicht construiren lässt (Taf. XI Fig. 1).

Anwendung bei Gewölben.

Digitized by Google

§. 273. Formänderung. Nach 19 (Seite 257) wird, da $dx = r\cos\tau\, d\tau$ ist, bei constantem Querschnitte $\Delta s = \frac{H r}{E F}\int_0^{\alpha} \sec\tau\, d\tau = \frac{H r}{E F}[\text{lognat}\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha) - \text{lognat}\tan\frac{1}{4}\pi]$, d. i. da $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$, $\text{lognat}\,1 = 0$, $H = q_0 r$ ist,

$$32.\quad \Delta s = \frac{q_0 r^2}{E F}\,\text{lognat}\tan(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Da $s = r\alpha$ ist, so wird bei constanter Festigkeit nach 20

$$33.\quad \Delta s = \frac{K r \alpha}{E}.$$

Ferner ist $r(1 - \cos\alpha) = h$, $r\sin\alpha = a$, $r\alpha = s$. Die Differenziation nach r, α, h, s giebt $(1 - \cos\alpha)\,dr + r\sin\alpha\, d\alpha = dh$, $r\cos\alpha\, d\alpha + \sin\alpha\, dr = 0$, $r\, d\alpha + \alpha\, dr = ds$. Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen dr und $d\alpha$, so ergiebt sich

$$\frac{ds}{dh} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Daher wird nach 21:

$$34.\quad \Delta h = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}\Delta s.$$

§. 274. Körper mit elliptischer Axe. Die horizontale und verticale Halbaxe sei a und h. Zur Construction der Ellipse schlagen wir aus dem Mittelpunkte M (Taf. XI Fig. 2) zwei Kreise mit den Radien a, h, ziehen einen Radius, welcher die Kreise in D, E schneidet und legen durch D und E Parallelen zu den Axen. Der Durchschnittspunkt F derselben ist ein Punkt der Ellipse. Setzen wir $\angle DMC = \varphi$, und nehmen den Mittelpunkt M als Coordinatenanfang an, so ist

$$x = a\sin\varphi,\quad y = h\cos\varphi,$$

daher $dx = a\cos\varphi\, d\varphi$, $dy = -h\sin\varphi\, d\varphi$, $\tan\tau = -\frac{dy}{dx} = \frac{h}{a}\tan\varphi$, $d\tan\tau = \frac{h}{a}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\frac{d\tan\tau}{dx} = \frac{h\, d\varphi}{a\cos^2\varphi\, a\cos\varphi\, d\varphi} = \frac{h}{a^3}\sec^3\varphi$. Demnach wird nach 10 (Seite 255)

$$35.\quad q = H\frac{h}{a^2}\sec^3\varphi.$$

Ist die Last pro Längeneinheit im Scheitel q_0, so ist $q_0 = H\frac{h}{a^2}$, mithin

$$36.\quad q = q_0\sec^3\varphi,$$

wie beim Kreisbogen. Hiernach lässt sich q in gleicher Weise construiren (Taf. XI Fig. 2). Die Axialkraft wird nach 9 $P = H\sec\tau = H\sqrt{1 + \tan^2\tau} = H\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}\tan^2\varphi}$ oder

$$37.\quad P = \frac{H\sqrt{a^2\cos^2\varphi + h^2\sin^2\varphi}}{a\cos\varphi},$$

wonach sich auch P leicht construiren lässt (Taf. XI Fig. 2).

§. 275. Die gemeine Kettenlinie. Wir setzen voraus, der Körper habe einen constanten Querschnitt und sei nur durch sein eigenes

Digitized by Google

Gewicht belastet. In diesem Falle befindet sich ein gewöhnliches Seil oder eine Kette, wesshalb man diese Stützlinie auch eine **gemeine Kettenlinie** nennt.

Als Coordinatenanfang wählen wir den Scheitel, d. i. den tiefsten oder höchsten Punkt. Ist g das Gewicht für die Längeneinheit der Axe des Körpers, so ist $q\,dx = g\,ds$, $q = g\frac{ds}{dx} = g\sec\tau$. Daher wird nach 10 (Seite 255)

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = g\sec\tau = g\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Setzt man $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx}\,d\frac{dy}{dx}$ und reducirt auf dx, so wird

$$dx = \frac{H}{p}\,\frac{d\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Die Integration giebt, wenn wir $\frac{H}{g}$, d. i. den sogenannten **Parameter** der Kettenlinie, $= \frac{1}{c}$ setzen,

$$x = \frac{1}{c}\,\text{lognat}\left[\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right].$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ werden muss. Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx}+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = e^{cx},$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = e^{2cx} - 2\frac{dy}{dx}e^{cx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2cx}-1}{2\,e^{cx}} = \tfrac{1}{2}(e^{cx}-e^{-cx}),$$

wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Die nochmalige Integration giebt

$$y = \frac{1}{2c}(e^{cx}+e^{-cx}+C)$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$, also $0 = 1+1+C$, $C = -2$, mithin

$$38.\quad y = \frac{1}{2c}(e^{cx}+e^{-cx}-2).$$

Diese Gleichung lässt sich auch leicht auf x reduciren. Es ist $2(cy+1) = e^{cx}+e^{-cx}$; die Multiplication mit e^{cx} giebt $(e^{cx})^2 - 2(cy+1)e^{cx}+1 = 0$ also $e^{cx} = cy+1 \pm \sqrt{c^2y^2+2cy}$. Da $cy+1-\sqrt{c^2y^2+2cy} < 1$ ist, e^{cx} also negativ, x also imaginär werden würde, so kann nur das Zeichen + genommen werden. Demnach ist

$$39.\quad x = \frac{1}{c}\,\text{lognat}\,(1+cy+\sqrt{2cy+c^2y^2}).$$

Digitized by Google

Wichtig ist noch die Kenntniss der Bogenlänge. Nach 13 ist, da das Gewicht V des Theiles CO = g s ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\,s}{H} = c\,s, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{c\,s},$$

Da $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ist, so wird

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{1}{c^2 s^2}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{c\,s}{\sqrt{1 + c^2 s^2}}$$

$$y = \int \frac{c\,s\,ds}{\sqrt{1 + c^2 s^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + c^2 s^2} + C.$$

Für $y = 0$ wird $s = 0$, mithin $0 = \frac{1}{c} + C$, folglich

$$40. \quad y = \frac{1}{c}(\sqrt{1 + c^2 s^2} - 1).$$

Die Reduction auf s giebt

$$41. \quad s = \frac{1}{c}\sqrt{2\,c\,y + c^2 y^2}.$$

Da nach dem Obigen $dy = c\,s\,dx$ ist, so liesse sich auch hieraus leicht die Gleichung der Kettenlinie ableiten. Setzen wir in 40 nach dem Obigen $c\,s = \tan\tau$, so wird $c\,y = \sqrt{1 + \tan^2\tau} - 1$, d. i.

$$42. \quad c\,y = \sec\tau - 1.$$

Die Axialkraft ist nach 9 (Seite 255) $P = H \sec\tau = H(1 + c\,y)$, d. i.

$$43. \quad P = H + g\,y,$$

d. i. gleich der Spannung im Scheitel plus dem Gewichte eines Kettenstückes von der Länge y.

Für die Anwendung ist noch folgende Umformung von Nutzen. Nach 39 wird mit Rücksicht auf 41

$$x = \frac{1}{c}\,\text{lognat}\,[1 + c\,(y + s)].$$

Nach 41 wird $c\,s^2 = 2\,y + c\,y^2$, daher $c = \frac{2\,y}{s^2 - y^2} = \frac{2\,y}{(s+y)(s-y)}$, mithin $x = \frac{1}{c}\,\text{lognat}\left(1 + \frac{2\,y}{s-y}\right)$ oder

$$44. \quad x = \frac{1}{c}\,\text{lognat}\,\frac{s+y}{s-y}.$$

Nach dem Obigen ist $c\,s = \tan\tau$, $c\,y = \sec\tau - 1$, mithin

$$c\,x = \text{lognat}\,\frac{\tan\tau + \sec\tau - 1}{\tan\tau - \sec\tau + 1}$$

$$= \text{lognat}\,\frac{\sin\tau + 1 - \cos\tau}{\sin\tau - 1 + \cos\tau}.$$

Durch Multiplication des Zählers und Nenners mit $\sin\tau + 1 - \cos\tau$ ergiebt sich leicht folgender Ausdruck

$$45. \quad c\,x = \text{lognat}\,\frac{1 + \sin\tau}{\cos\tau}.$$

Digitized by Google

Bei einer numerischen Berechnung würde man am besten für verschiedene y nach 41 die zugehörigen s und sodann nach 44 die zugehörigen x oder für verschiedene τ nach 45, 42 und nach der Formel $c\,s = \tan\tau$ die zugehörigen x, y, s berechnen. Für den letzten Zweck sind Tabellen vorhanden; einen Auszug derselben enthält die folgende Tabelle:

τ Grad	c x	c y	c s	$\frac{s}{x}$	τ Grad	c x	c y	c s	$\frac{s}{x}$
0	0	0	0	1,000	45	0,88	0,41	1,00	1,13
5	0,087	0,004	0,088	1,001	50	1,01	0,56	1,19	1,18
10	0,175	0,015	0,176	1,005	55	1,15	0,74	1,43	1,24
15	0,265	0,035	0,268	1,012	60	1,32	1,00	1,73	1,31
20	0,356	0,064	0,364	1,021	65	1,51	1,36	2,14	1,42
25	0,451	0,103	0,466	1,034	70	1,74	1,92	2,75	1,58
30	0,549	0,155	0,577	1,051	75	2,03	2,86	3,73	1,84
55	0,653	0,221	0,700	1,073	80	2,44	4,76	5,67	2,33
40	0,763	0,305	0,839	1,100	85	3,13	10,47	11,43	3,65

Beispiel. Die Spannweite L sei $= 100$, die Kettenlänge $S = 104$. Es wird $\frac{S}{L} = 1{,}04$. Nach der Tabelle ist für $\tau = 25°$ $\frac{s}{x} = 1{,}034$, für $\tau = 30°$ $\frac{s}{x} = 1{,}051$. Durch Interpolation findet man, dass für $\tau = 26{,}76° = 26°\,46'$ $\frac{s}{x} = 1{,}04$ wird. Der Tangentenwinkel am Ende ist daher $26°\,46'$. Für $\tau = 26{,}76°$ ergiebt sich durch Interpolation $c\,x = 0{,}485$, d. i. da $x = 50$ ist, $50.c = 0{,}485$, $c = \frac{0{,}485}{50} = 0{,}0097$, $\frac{1}{c} = 103{,}1$. Es kann nun nach der Tabelle für beliebige τ das zugehörige x, y, s berechnet werden; z. B. für $\tau = 15°$ $x = \frac{0{,}265}{c} = 0{,}265.103{,}1 = 27{,}3$; $y = \frac{0{,}035}{c} = 0{,}035.103{,}1 = 3{,}61$; $s = \frac{0{,}268}{c} = 0{,}268.103{,}1 = 27{,}6$. Die Pfeilhöhe, d. i. y für $\tau = 26{,}76°$ wird $= \frac{0{,}126}{c} = 0{,}121.103{,}1 = 12{,}48$.

§. 276. Die Kettenbrückenlinie. Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass die Kette ausser ihrem eigenen Gewicht noch eine auf die Horizontalprojection gleichmässig vertheilte Last zu tragen habe. Das Eigengewicht pro Längeneinheit der Kette sei g, die angehangene Last pro horizontale Längeneinheit $= p$. Alsdann ist $q\,dx = g\,ds + p\,dx$, mithin $q = g\frac{ds}{dx} + p = g\sec\tau + p$, also nach 9, §. 266

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = p + g\sec\tau = p + g\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Wir wollen hier nur denjenigen Fall näher untersuchen, in welchem der Querschnitt der Kette an jeder Stelle der hier wirkenden Axialkraft proportional ist. Ist f der Querschnitt der Kette, K der Sicherheitscoefficient, γ das Gewicht der Volumeneinheit, so ist $f = \frac{P}{K} = \frac{H\sec\tau}{K}$, $g = f\gamma = \frac{H\gamma}{K}\sec\tau$, mithin

Digitized by Google

$$H\frac{d^2y}{dx^2} = p + \frac{H\gamma}{K}\sec^2\tau$$

oder, wenn wir $\frac{p}{H} = c$, $\frac{\gamma}{K} = m$, $\sec^2\tau = 1 + \tan^2\tau = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$ setzen,

$$\frac{dy'}{dx} = m + c + m\,y'^2$$

$$dx = -\frac{dy'}{m + c + m\,y'^2}.$$

Die Integration nach der bekannten Regel $\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\operatorname{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}x$ giebt mit Rücksicht auf den Umstand, dass für $y' = 0$ auch $x = 0$ werden muss

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\,(m + c)}}\operatorname{Arctan} y'\sqrt{\frac{m}{m + c}}.$$

oder, wenn man auf y' reducirt,

$$46.\quad y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{m + c}{m}}\tan\left[x\sqrt{m\,(m + c)}\right].$$

Die nochmalige Integration giebt nach der bekannten Formel $\int \tan m\,x\,dx = -\frac{1}{m}\operatorname{lognat}\cos m\,x = \frac{1}{m}\operatorname{lognat}\sec m\,x$

$$47.\quad y = \frac{1}{m}\operatorname{lognat}\sec\left[x\sqrt{m\,(m + c)}\right].$$

Ist h die Pfeilhöhe, a die halbe Spannweite, so ist

$$48.\quad m\,h = \operatorname{lognat}\sec\left[a\sqrt{m\,(m + c)}\right]$$

durch welche Gleichung c und somit H bestimmt ist. Zur numerischen Berechnung von c setzen wir, wenn φ einen Hilfswinkel bezeichnet,

$$49.\quad \operatorname{lognat}\sec\varphi = m\,h.$$

Alsdann wird

$$\operatorname{lognat}\sec\varphi = \operatorname{lognat}\sec\left[a\sqrt{m\,(m + c)}\right],\ \text{d. i.}\ \varphi = a\sqrt{m\,(m + c)},$$

mithin

$$50.\quad c = \frac{\varphi^2 - a^2m^2}{a^2m},\quad H = \frac{p}{c} = \frac{p\,a^2m}{\varphi^2 - a^2m^2}.$$

Die Gleichung für y und y' geht hierdurch gleichzeitig über in

$$51.\quad y = \frac{1}{m}\operatorname{lognat}\sec\frac{\varphi x}{a},$$

$$52.\quad \tan\tau = y' = \frac{\varphi}{a\,m}\tan\frac{\varphi x}{a}.$$

Die Axialkraft und der nöthige Querschnitt sind endlich, nachdem man τ berechnet hat, $P = H\sec\tau$, $f = \frac{P}{K}$.

Digitized by Google

Zur Erleichterung der Rechnung existiren Tabellen. Einen Auszug bildet die folgende:

z	lognat sec z	tan z	z	lognat sec z	tan z
0,01	0,00015	0,00000	0,11	0,00606	0,11044
0,02	0,00020	0,00000	0,12	0,00722	0,12058
0,03	0,00045	0,03001	0,13	0,00847	0,13074
0,04	0,00080	0,04002	0,14	0,00983	0,14092
0,05	0,00125	0,05004	0,15	0,01129	0,15114
0,06	0,00180	0,06007	0,16	0,01286	0,16137
0,07	0,00245	0,07011	0,17	0,01452	0,17166
0,08	0,00320	0,08017	0,18	0,01629	0,18196
0,09	0,00406	0,09025	0,19	0,01816	0,19232
0,10	0,00501	0,10034	0,20	0,02014	0,20271

Beispiel. Es sei $p = 5$ Tonnen pro Meter, $a = 60$ Met., $h = \frac{1}{6} a = 10$ Met., $K = 13000$ Tonnen pro □Met., $\gamma = 7{,}7$ Tonnen pro Cubikmet., also $m = \frac{7.7}{13000} = \frac{1}{1688}$, lognat sec $\varphi = \frac{10}{1688} = 0{,}005924$ Der Modulus der gemeinen Logarithmen ist 0,43429, mithin ist $\log \sec \varphi = 0{,}43429 \,.\, 0{,}005924 = 0{,}002573$, $\log \cos \varphi = -0{,}002573 = 0{,}997427 - 1$, $\varphi = 6° 14' = 0{,}1088$, $H = \frac{5 \;\; 60^2 \,.\, 1688}{0{,}1088^2 \,.\, 1688^2 - 60^2} = 1008$, $\frac{\varphi}{a} = \frac{0{,}1088}{60} = 0{,}001813$, mithin

$$y = 1688 \,.\, \text{lognat sec}\,(0{,}001813 \,.\, x),$$

$$\tan \tau = 3{,}060 \,.\, \tan\,(0{,}001813 \,.\, x).$$

Z. B. wird für $x = 30$, $y = 1688 \,.\, \text{lognat sec}\, 0{,}054 = 1688 \,.\, 0{,}00147 = 2{,}49$, $\tan \tau = 3{,}060 \,.\, 0{,}05405 = 0{,}1654$, $\tau = 9° 24'$, $P = 1008 \,.\, \sec 9° 24' = 1021$, $f = \frac{1021}{13000} = 0{,}0785$ □Met. $= 785$ □Cent.

§. 277. Kettenlinie für eine beliebige Belastung. Nach 13 Seite 255

$$53. \quad y = \frac{1}{H} \int_0^x V \, dx,$$

worin V die Last vom Scheitel bis zu dem beliebigen Punkte x y bezeichnet. Hierbei ist

$$54. \quad V = \int_0^x q \, dx.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, für einen Kämpfer angewendet,

$$55. \quad H = \frac{1}{h} \int_0^h V \, dx.$$

Ist kein bestimmtes einfaches Gesetz für die Abhängigkeit von q und x bekannt, so können die Integrale leicht durch eine Näherungsregel, am

Digitized by Google

besten durch die Simpson'sche Regel berechnet oder graphisch construirt werden.

Beispiel. Es sei $a = 6^m$, $h = 3^m$. Die halbe Spannweite sei in 10 gleiche Theile getheilt; q sei für jeden Theilpunkt durch die Rubrik 2 gegeben

x 1	q 2	V 3	y 4	y 5
0	2,0	0	0	0
0,1	2,0	1,20	0,36	0,02
0,2	2,1	2,42	1,44	0,10
0,3	2,3	3,74	3,28	0,22
0,4	2,5	5,18	5,96	0,40
0,5	2,7	6,74	9,53	0,65
0,6	3,0	8,44	14,07	0,88
0,7	3,4	9,91	19,52	1,33
0,8	3,8	12,52	26,18	1,78
0,9	4,3	14,92	34,39	2,34
1,0	5,0	17,72	44,18	3,00
. a	Klgr. pro M.	Klgr.	$\cdot\frac{1}{H}$	Met.

Für $x = 0{,}4\,a$ z. B. ergiebt sich nach der Simpson'schen Regel $V = \frac{0,6}{3}[2{,}0 + 2{,}5 + 4(2{,}0 + 2{,}3) + 2 \cdot 2{,}1] = 5{,}18$. Für $x = 0{,}6\,a$ ist daher $V = 5{,}18 + \frac{0,6}{3} \cdot (2{,}5 + 4 \cdot 2{,}7 + 3{,}0) = 5{,}18 + 3{,}26 = 8{,}44$ und für $x = 0{,}5\,a$ $V = 5{,}18 + \frac{0,6}{12}(5 \cdot 2{,}5 + 8 \cdot 2{,}7 - 3{,}0) = 5{,}18 + 1{.}56 = 6{,}74$ u. s. f. Ferner wird für $x = 0{,}4\,a$ $H\,y = \frac{0,6}{3}[0 + 5{,}18 + 4(1{.}20 + 3{.}74) + 2 \cdot 2{,}42] = 5{,}96$ u. s. f. Hiernach wird für den Kämpfer $3 = 44{,}18 \cdot \frac{1}{H}$, also $H = \frac{44,18}{3} = 14{,}73$. $\frac{1}{H} = 0{,}0679$. Für $x = 0{,}4\,a$ z. B. ist daher $y = 6{,}96 \cdot 0{,}0679 = 0{,}405$.

Anwendung bei Gewölben und Kettenbrücken.

B. Normale Belastung.

§. 278. Kreisring. Wenn bei normaler Belastung die Axe eine kreisförmige Gestalt hat, so muss die Belastung q pro Längeneinheit der Axe constant sein, da nach §. 267 das Produkt q r constant ist. Die Axialkraft ist nach demselben § $P = q\,r$, mithin die nöthige Querschnittsfläche F

$$56. \quad F = \frac{q\,r}{K}.$$

Die vorzüglichste Anwendung findet diese Formel zur Berechnung der Dicke von Röhren, die einem inneren Drucke ausgesetzt sind. Ist der Druck pro Flächeneinheit $= g$ und betrachten wir ein Röhrenstück, welches von zwei zur Axe der Röhre senkrechten Ebenen, deren Entfernung $= 1$ ist, begrenzt wird, so ist $q = g$, und, wenn δ die Wanddicke der Röhre ist, $F = 1 \cdot \delta = \delta$ zu setzen. Daher wird

$$57. \quad \delta = \frac{g\,r}{K},$$

so dass bei constantem g die Dicke δ dem Radius r proportional sein muss.

Anwendung bei Wasserröhren, Schwungringen etc.

Digitized by Google

§. 279. Röhren mit geschlossenen Enden. Ist die Röhre wie gewöhnlich an den Enden geschlossen, so findet auch eine Spannung in Richtung der Axe der Röhre statt. Die Gesammtkraft in Richtung der Axe ist $g r^2 \pi$; der Flächeninhalt des Querschnittes der Röhre ist $2 r \pi \delta$, also die Normalspannung N_2 in Richtung der Röhrenaxe $\frac{g r^2 \pi}{2 r \pi \delta} = \frac{g r}{2 \delta}$. Die Normalspannung N_1 in Richtung der Tangente des Querschnittes der Röhre ist nach dem Vorigen $\frac{P}{F} = \frac{g r}{\delta}$. Also

$$58. \quad N_1 = \frac{g r}{\delta}, \quad N_2 = \frac{g r}{2 \delta} = \frac{1}{2} N_1.$$

Die Normalspannung N_3 in Richtung des Radius ist im Maximum $= g$; da aber g gegen $\frac{g r}{\delta}$ nur klein ist, so können wir N_3 vernachlässigen. Schubspannungen wirken in den von N_1, N_2, N_3 afficirten Ebenen nicht. Daher sind N_1, N_2, N_3 zugleich Hauptspannungen. Die grösste ideale Hauptspannung wird nach 77 (Seite 32) $S = N_1 - \frac{1}{m} N_2$, d. i. für $m = 4$:

$$S = \frac{7}{8} \frac{g r}{\delta}.$$

Die Festigkeitsbedingung ist $S = K$, also wird

$$59. \quad \delta = \frac{7 g r}{8 K}.$$

Anwendung bei Wasser-, Gas- und Dampfröhren, sowie Dampfkesseln. — Eine genaue Theorie folgt im II. Theile.

Digitized by Google

IX. Abschnitt.

Biegungselasticität einfach gekrümmter Stäbe.

XXXII. Kapitel.

Allgemeine Theorie.

§. 280. Annahmen. Wir setzen wiederum einen Stab mit einfach gekrümmter Axe voraus, in dessen Krümmungsebene auch die äusseren Kräfte (besser die Resultanten der auf die einzelnen Scheiben wirkenden Kräfte) thätig sind. Diese Ebene nehmen wir als Ebene der x y an, wobei wir unter x, y die Coordinaten eines Punktes O der Axe des Stabes verstehen.

Wir setzen ferner voraus, dass eine Hauptaxe jedes Querschnittes in der Kraftebene liege.

Wir bezeichnen mit

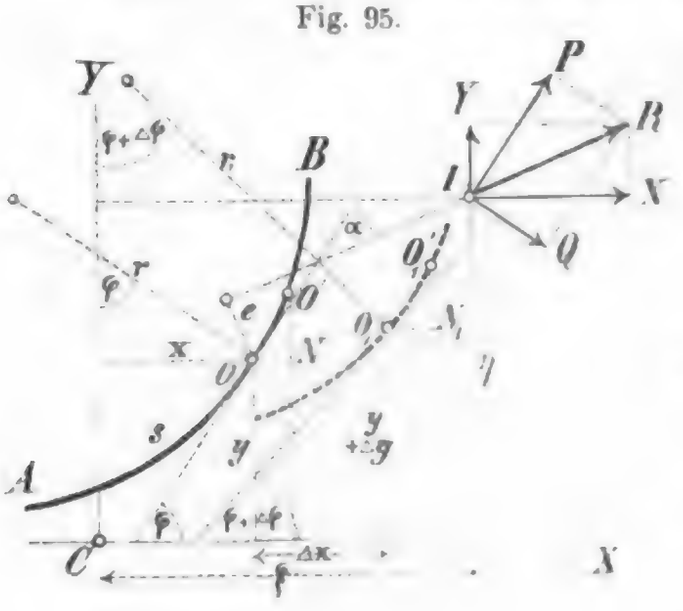
r den Krümmungsradius der Axe des Stabes im beliebigen Punkte x y,

φ den Winkel, welchen der Radius mit der Axe der y oder die Tangente mit der Axe der x bildet,

s die Länge der Axe, von irgend einem Punkte an gerechnet.

§. 281. Die äusseren Kräfte. Es bezeichne

Fig. 95.



R die Resultante der äusseren Kräfte, welche auf den durch O getrennten Stabtheil O B wirken (Fig. 95).

P, Q die in Richtung der Tangente und des Radius von O wirkenden Componenten von R oder die sogenannte Axialkraft und Transversalkraft;

M das statische Moment von R in Beziehung auf die durch O gehende Normale zur Kraftebene oder das sog. Biegungsmoment;

X, Y die Componenten von R nach Richtung der x, y;

ξ, η die Coordinaten des Angriffspunktes von R;
p, q die in O nach Richtung der Tangente und des Radius wirkende gleichförmig vertheilte Kraft pro Längeneinheit der Axe.
Alsdann ist offenbar

$$1.\quad \begin{cases} P = X\cos\varphi + Y\sin\varphi, \\ Q = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \\ M = X(\eta - y) - Y(\xi - x). \end{cases}$$

Verrückt man den Punkt O um ds, so sind hiernach die Aenderungen von P, Q und M

$$\begin{cases} dP = -X\sin\varphi\, d\varphi + Y\cos\varphi\, d\varphi - p\, ds, \\ dQ = -X\cos\varphi\, d\varphi - Y\sin\varphi\, d\varphi - q\, ds, \\ dM = -X\, dy + Y\, dx - \frac{1}{2} q\, ds^2. \end{cases}$$

Setzt man hierin $dx = ds\cos\varphi$, $dy = ds\sin\varphi$, $d\varphi = \frac{ds}{r}$ und ds^2 (gegen dx, dy) $= 0$, so ergiebt sich mit Beachtung der Ausdrücke 1 für P, Q, M:

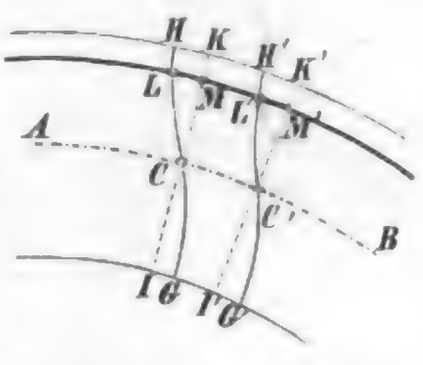
$$2.\quad \frac{dP}{ds} = \frac{Q}{r} - p, \quad \frac{dQ}{ds} = -\frac{P}{r} - q.$$

$$3.\quad \frac{dM}{ds} = Q.$$

§. 282 Die Spannungen. Das in §. 62 und 63 über die Spannungen in Stäben mit gerader Axe Gesagte ist hier direct anzuwenden. Alle dort gemachten Bezeichnungen behalten wir bei. Es behalten dann auch die Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften, d. i. die Gleichungen 5, 6, 7 ihre volle Giltigkeit.

§ 283 Bestimmung der Faserspannung N. Wir gehen auch hier genau in der Weise vor, wie in §. 64 für Stäbe mit gerader Axe. Bezeichnet ds_v die Länge einen Faser zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten vor der Formänderung, Δds_v die Längenänderung derselben, so ist die Länge derselben nach der Formänderung LL' (Fig. 96) $= ds_v + \Delta ds_v$. Machen wir auch hier die Annahme, dass die Abweichungen LM, L'M' der Querschnitte von den Normalebenen IK, I'K' der Axe des Stabes gleich gross seien, so ist LL' = MM', so dass wir in Beziehung auf die Längenänderung der Fasern statt der deformirten Querschnitte die Normalebenen zur deformirten Axe des Stabes setzen können.

Fig. 96.



Vor der Formänderung ist, da der Winkel zwischen beiden Querschnitten $d\varphi$ ist,

$$ds_v = ds + v\, d\varphi.$$

Bei der Formänderung gehe ds in $ds + \Delta ds$, $d\varphi$ in $d\varphi + \Delta d\varphi$ über; die geringe Aenderung von v vernachlässigen wir. Wir setzen voraus, dass die Axe des Körpers in ihrer anfänglichen Krümmungsebene bleibe; unter

welcher Bedingung dies eintritt, werden wir nachher untersuchen. Alsdann ist

$$ds_v + \Delta ds_v = ds + \Delta ds + v(d\varphi + \Delta d\varphi).$$

Die Subtraction dieser beiden letzten Gleichungen giebt

$$\Delta ds_v = \Delta ds + v \Delta d\varphi.$$

Daher ist die relative Längenänderung der Faser

$$\frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \frac{\Delta ds + v \Delta d\varphi}{ds + v d\varphi}.$$

Da $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$ ist, so können wir auch setzen

$$4. \quad \frac{\Delta ds_v}{ds_v} = \left(\frac{\Delta ds}{ds} + v \frac{\Delta d\varphi}{ds}\right) \frac{r}{r+v},$$

also ist die Faserspannung N:

$$5. \quad N = E\left(\frac{\Delta ds}{ds} + v \frac{\Delta d\varphi}{ds}\right) \frac{r}{r+v}.$$

Die ersten der Gleichgewichtsbedingungen 5 und 6 (Seite 50) geben

$$\frac{P}{E} = r \frac{\Delta ds}{ds} \int \frac{df}{r+v} + r \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{v\,df}{r+v},$$

$$\frac{M}{E} = r \frac{\Delta ds}{ds} \int \frac{v\,df}{r+v} + r \frac{\Delta d\varphi}{ds} \int \frac{v^2\,df}{r+v}.$$

Bezeichnen wir die Querschnittsfläche $\int df$ mit F und setzen das Integral

$$6. \quad \int \frac{r\,v^2\,df}{r+v} = \mathfrak{W},$$

so wird

$$r \int \frac{df}{r+v} = \int df - \int \frac{v\,df}{r+v}$$

$$= \int df - \frac{1}{r} \int v\,df + \frac{1}{r} \int \frac{v^2\,df}{r+v} = F + \frac{\mathfrak{W}}{r^2},$$

$$r \int \frac{v\,df}{r+v} = \int v\,df - \int \frac{v^2\,df}{r+v} = -\frac{\mathfrak{W}}{r},$$

$$r \int \frac{v^2\,df}{r+v} = \mathfrak{W}.$$

Daher geben die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left| \begin{array}{l} \frac{P}{E} = \frac{\Delta ds}{ds} F - \left(\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\Delta ds}{r\,ds}\right) \frac{\mathfrak{W}}{r}, \\ \frac{M}{E\,r} = \left(\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{\Delta ds}{r\,ds}\right) \frac{\mathfrak{W}}{r}. \end{array} \right.$$

Hieraus findet sich leicht

$$7. \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r},$$

$$8. \quad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = -\frac{M}{E\,\mathfrak{W}} + \frac{M}{E\,F\,r^2} + \frac{P}{E\,F\,r}.$$

Digitized by Google

Dies in 5 eingesetzt, giebt als Faserspannung

$$9.\quad N = \frac{P}{F} + \frac{M}{F r} + \frac{M r v}{\mathfrak{W}(r + v)}.$$

§. 284. Interpretation. Wenn man $r = \infty$ setzt, so geht dieser Ausdruck in den für gerade Stäbe giltigen Ausdruck 22 (Seite 55) über. Genau genommen ist jetzt N nicht mehr linear in Beziehung auf v. Stellt man N graphisch dar (Taf. IX Fig. 13), so bildet die Curve eine Hyperbel, deren eine Asymptote durch den Krümmungsmittelpunkt geht.

N wird 0 für

$$10.\quad v = -\frac{\frac{P}{F} + \frac{M}{F r}}{\frac{P}{F} + \frac{M}{F r} + \frac{M r}{\mathfrak{W}}}$$

und, wenn $P = 0$ ist, für

$$11.\quad v = -\frac{\mathfrak{W} r}{\mathfrak{W} + F r^2}.$$

Hier geht also die neutrale Axe nicht genau durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Verwandeln wir $\frac{r}{r+v}$ in eine unendliche Reihe, so ergiebt sich $\mathfrak{W} = \int\left(v^2 - \frac{v^3}{r} + \frac{v^4}{r^2} - . + \ldots\right) df$ oder, wenn wie früher W das Trägheitsmoment $\int v^2 df$ des Querschnittes in Beziehung auf die Axe der w bezeichnet,

$$12.\quad \mathfrak{W} = W - \frac{1}{r}\int v^3\left(1 - \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} - . + \ldots\right) df.$$

Ist der Querschnitt in Beziehung auf die Axe der w symmetrisch, so verschwinden die Glieder mit v^3, v^5, . . ., also wird

$$13.\quad \mathfrak{W} = W + \frac{1}{r^2}\int v^4\left(1 - \frac{v^2}{r^2} + \frac{v^4}{r^4} - . + \ldots\right) df.$$

Man kann aber ausser W alle Glieder vernachlässigen, wenn der Radius gegen die Höhe des Querschnittes sehr gross ist. Die wichtigste Anwendung findet diese Theorie bei den Bogenträgern. Hier aber ist r gegen v so gross, dass wir stets für $\mathfrak{W}$ das Trägheitsmoment W setzen können.

Die Ausdrücke 7, 8 und 9 nehmen in dem Falle, in welchem r gegen v sehr gross ist, die für gerade Stäbe streng richtige Form

$$14.\quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{P}{E F}; \qquad 15.\quad \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{E W}$$

$$16.\quad N = \frac{P}{F} + \frac{M v}{W}$$

an. Indess kommen wohl auch Fälle vor, in welchen die genaueren Formeln anzuwenden sind.

§. 285. Bedingungen für das Verbleiben in der Kraftebene. Der Ausdruck 5 für N setzt speciell voraus, dass die Axe des Körpers bei der Formänderung in ihrer anfänglichen Krümmungsebene

Digitized by Google

oder in der Kraftebene verbleibe. Dies wird eintreten, wenn auch noch die zweite der Gleichgewichtsbedingungen 6 (Seite 50) realisirt wird. Diese giebt

$$\frac{\Delta\, ds}{ds}\int w\,\frac{df}{r+v}+\frac{\Delta\, d\varphi}{ds}\int\frac{v\,w\,df}{r+v}=0.$$

Nun aber ist $\int\frac{w\,df}{r+v}=\frac{1}{r}\int w\,df-\frac{1}{r}\int\frac{v\,w\,df}{r+v}=0-\frac{1}{r}\int\frac{v\,w\,df}{r+v}$.

Hierdurch geht die vorige Bedingung über in

$$17.\quad \int\frac{v\,w\,df}{r+v}=0.$$

Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn der Querschnitt in Beziehung auf die Axe der v symmetrisch ist. Ist r gegen v sehr gross, so geht diese Bedingung über in $\int v\,w\,df=0$, d. h. nach §. 65: Die Axe der v muss eine Hauptaxe sein.

Ist die Axe der v, wie wir vorausgesetzt haben, eine Hauptaxe, so wird die Bedingung 17 allgemein wenigstens sehr nahe erfüllt, auch wenn r gegen v nicht sehr gross ist.

§. 286. Schubspannungen. Die Schubspannungen T_3 und T_2 lassen sich genau in derselben Weise ermitteln, wie wir dies für gerade Stäbe gethan haben. Die dort ermittelten Ausdrücke 27. 28 (Seite 58, 59) lassen sich hier als Näherungsformeln direct anwenden, wenn der Krümmungsradius gegen die Höhe des Querschnittes sehr gross ist.

Bei den Bogenträgern wird die Transversalkraft Q gegen die Axialkraft P stets so klein, dass wir die Schubspannungen ganz vernachlässigen können. In andern praktischen Fällen ist dagegen die Querschnittsform eine solche, dass die Schubspannungen gegen die Faserspannung sehr klein ausfallen. Aus diesen Gründen wollen wir auch auf eine genauere Bestimmung derselben nicht eingehen, obwohl dieselbe mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist.

Eine genaue Theorie, entsprechend dem De Saint-Venant'schen Probleme, folgt im zweiten Theile als Anwendung der Theorie der Rotationskörper.

§. 287 Festigkeitsbedingungen. In den Fällen, in welchen die Schubspannungen nicht zu vernachlässigen sind, sind die in §. 83 aufgestellten Festigkeitsbedingungen maassgebend. In den meisten Fällen aber können nach dem vorigen §. die Schubspannungen vernachlässigt werden. In diesem Falle ist die ideale Hauptspannung S gleich der Faserspannung N, also die Festigkeitsbedingung $\max(+N)=K$, $\max(-N)=K$. N erreicht das Maximum in den am weitesten von der Axe der w entfernten Fasern. Sind dieselben für die ausgedehnte und zusammengedrückte Seite bezüglich a und a, so sind die Festigkeitsbedingungen nach 9:

$$18.\quad \begin{cases} K=\dfrac{P}{F}+\dfrac{M}{F\,r}+\dfrac{M\,r\,a}{\mathfrak{W}(r+a)}, \\ \mathfrak{K}=\dfrac{P}{F}+\dfrac{M}{F\,r}+\dfrac{M\,r\,a}{\mathfrak{W}(r+a)}. \end{cases}$$

Digitized by Google

wobei natürlich die rechten Seiten absolut zu nehmen sind. Kommt im ganzen Querschnitte entweder nur Zug, oder nur Druck vor, so ist in beiden Gleichungen bezüglich K oder $\mathfrak{K}$ einzuführen. Allgemeiner werden die Festigkeitsbedingungen, wenn wir die Sicherheitscoefficienten K_1, K_2 einführen und für diese entweder K oder $\mathfrak{K}$ wählen, je nachdem auf der betreffenden Seite Zug oder Druck stattfindet. Die entsprechenden Abstände der gespanntesten Fasern von der Schweraxe bezeichnen wir mit a_1, a_2. Alsdann werden die Festigkeitsbedingungen, wenn r gegen a_1, a_2 und P r gegen M sehr gross ist,

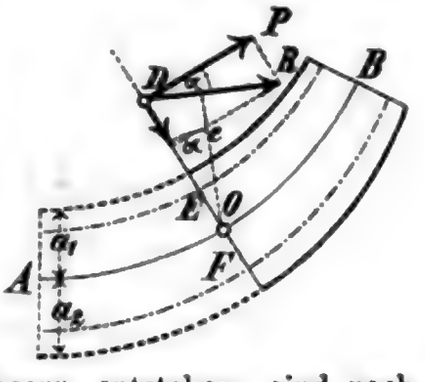
$$19.\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{P}{F} + \dfrac{M a_1}{W}, \\ K_2 = \dfrac{P}{F} - \dfrac{M a_2}{W}. \end{cases}$$

Bezeichnet man (Fig. 97) den Winkel, welchen die Kraft R (§. 281) mit der Tangente bildet, mit α und den Abstand des Durchschnittspunktes D der Richtung der Kraft R mit dem Querschnitte vom Schwerpunkte des Querschnittes mit e, so ist $P = R\cos\alpha$, $M = R\,e\cos\alpha = P\,e$; mithin können wir statt der vorigen Gleichungen auch setzen:

$$20.\quad \begin{cases} K_1 = \dfrac{P}{F}\left(1 + \dfrac{F a_1 e}{W}\right), \\ K_2 = \dfrac{P}{F}\left(1 - \dfrac{F a_2 e}{W}\right). \end{cases}$$

§. 288. Stützlinie. Verbindet man die Punkte D aller Querschnitte, in welchen die Richtung der Kraft R den betreffenden Querschnitt schneidet (Fig. 97), so erhält man eine Linie, welche man häufig die Stützlinie nennt.

Fig. 97.



Bei den nur auf Normalfestigkeit beanspruchten Körpern fällt die Stützlinie mit der Mittellinie oder mit der Axe des Körpers zusammen.

Die Stützlinie erhält in so fern eine Bedeutung, als ihre Entfernung e von der Axe von grossem Einflusse auf die Grösse der Spannungen ist.

Die grössten Spannungen, welche in den von der Schweraxe am weitesten entfernten Fasern entstehen, sind nach dem vorigen §.:

$$\frac{P}{F}\left(1 + \frac{F a_1 e}{W}\right), \quad \frac{P}{F}\left(1 - \frac{F a_2 e}{W}\right).$$

Haben diese beiden Spannungen gleiche Vorzeichen, so haben überhaupt alle Spannungen dasselbe Vorzeichen. Hiernach sind, falls $R\cos\alpha$ positiv ist, alle Spannungen positiv, und, falls $R\cos\alpha$ negativ ist, alle Spannungen negativ, wenn $1 + \dfrac{F a_1 e}{W} > 0$, $1 - \dfrac{F a_2 e}{W} > 0$, oder

$$e > -\frac{W}{F a_1}, \quad e < \frac{W}{F a_2}$$

Digitized by Google

ist. Wir nennen die Fläche der Kraftebene, welche von zwei Linien (Fig. 97) begrenzt wird, die von der Axe den Abstand $OE = k_1$, $OF = k_2$ haben, wobei

$$21. \quad k_1 = \frac{W}{F a_2}, \quad k_2 = \frac{W}{F a_1}$$

ist, den Kern. Die beiden Begrenzungslinien nennen wir die Kernlinien. Alsdann können wir das eben erhaltene Resultat auch folgendermaassen ausdrücken:

Sämmtliche Spannungen für einen Querschnitt haben dasselbe Vorzeichen, wenn für diesen Querschnitt die Stützlinie innerhalb des Kernes liegt.

Liegt die Stützlinie ausserhalb des Kernes, so findet gleichzeitig Zug und Druck statt.

Bezeichnet man die Abstände DE und DF der Stützlinie von den Grenzen des Kernes mit e_1 und e_2, so wird $e_1 = e - \frac{W}{F a_2}$, $e_2 = e + \frac{W}{F a_1}$, wodurch die Ausdrücke 20 für die grössten Spannungen oder die Festigkeitsbedingungen in folgende einfachere übergehen:

$$22. \quad K_1 = \frac{P a_1 e_2}{W}, \quad K_2 = \frac{P a_2 e_1}{W}.$$

§. 289. Aenderung der Länge, Lage und Krümmung der Axe. 1. Nach 7 ist die Längenänderung Δs der Axe des Stabes

$$23. \quad \Delta s = \frac{1}{E} \int \left(\frac{P}{F} + \frac{M}{F r} \right) ds,$$

und wenn r gegen v sehr gross ist,

$$24. \quad \Delta s = \frac{1}{E} \int \frac{P}{F} ds.$$

2. Die Grösse des Winkels $\Delta\varphi$, um welchen sich die Tangente oder der Krümmungsradius der Axe verdreht, ist nach 8:

$$25. \quad \Delta\varphi = \frac{1}{E} \int \left(\frac{M}{\mathfrak{W}} + \frac{M}{F r^2} + \frac{P}{F r} \right) ds = \frac{1}{E} \int \frac{M}{\mathfrak{W}} ds + \frac{\Delta s}{r}$$

und wenn r gegen v sehr gross ist,

$$26. \quad \Delta\varphi = \frac{1}{E} \int \frac{M}{W} ds.$$

3. Ist r_1 der Krümmungsradius der Axe nach der Formänderung, so ist

$$\frac{1}{r_1} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds},$$

daher ist die Aenderung der Krümmung

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\frac{\Delta ds}{ds}}{1 + \frac{\Delta ds}{ds}},$$

d. i. sehr nahe

Digitized by Google

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\frac{\Delta ds}{ds},$$

d. i. nach Einsetzung der Ausdrücke 7 und 8:

$$27. \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{M}{E\mathfrak{W}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht auch aus der Theorie gerader Stäbe ableiten. Das Moment M_0, welches nöthig ist, um den Stab gerade zu biegen, ist nahe eben so gross, als um einem geraden Stab den Krümmungsradius r zu geben, d. i. $M_0 = \frac{E\,W}{r}$. Um nun diesem gerade gebogenen Stab den Krümmungsradius r_1 zu geben, ist abermals ein Moment $M_1 = \frac{E\,W}{r_1}$ anzuwenden. Das resultirende Moment M ist daher $M_0 - M_1 = E\,W\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$, was mit dem vorigen Ausdrucke übereinstimmt, wenn man W für $\mathfrak{W}$ setzen kann.

§. 290. Verrückungen der Punkte für ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Wir bezeichnen die Verrückungen eines beliebigen Punktes O der Axe, dessen Coordinaten x, y sind, nach Richtung der x und y mit Δx, Δy (Fig. 95). Die Aenderungen von dx, dy, ds seien entsprechend Δdx, Δdy, Δds. Alsdann ist $O_1N_1 = dx + \Delta dx = (ds + \Delta ds)\cos(\varphi + \Delta\varphi)$, $O_1'N_1 = dy + \Delta dy = (ds + \Delta ds)\sin(\varphi + \Delta\varphi)$, mithin, da $\Delta dx = d\Delta x$, $\Delta dy = d\Delta y$ ist,

$$28. \quad \begin{cases} d\Delta x = (ds + \Delta ds)\cos(\varphi + \Delta\varphi) - dx, \\ d\Delta y = (ds + \Delta ds)\sin(\varphi + \Delta\varphi) - dy. \end{cases}$$

Substituirt man für Δds und $\Delta\varphi$ die Ausdrücke 7 und 25 und integrirt sodann die rechte Seite, so ist hierdurch Δx und Δy bestimmt. Die Integration wird freilich in den meisten Fällen nicht ausführbar sein. Für den Fall jedoch, dass es sich nur um sehr kleine Verrückungen handelt, kann man mit hinreichender Genauigkeit folgendes Näherungsverfahren anwenden. Es ist $\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \cos\varphi\cos\Delta\varphi - \sin\varphi\sin\Delta\varphi$, $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin\varphi\cos\Delta\varphi + \cos\varphi\sin\Delta\varphi$ oder, wenn wir $\cos\Delta\varphi = 1$, $\sin\Delta\varphi = \Delta\varphi$, $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$ setzen,

$$\cos(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{dx}{ds} - \Delta\varphi\frac{dy}{ds},$$

$$\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{dy}{ds} + \Delta\varphi\frac{dx}{ds}.$$

Dies in die Gleichungen 28 eingesetzt, giebt

$$d\Delta x = (dx - \Delta\varphi\,dy)\left(1 + \frac{\Delta ds}{ds}\right) - dx,$$

$$d\Delta y = (dy + \Delta\varphi\,dx)\left(1 + \frac{\Delta ds}{ds}\right) - dy,$$

oder, wenn wir die Parenthesen auflösen und Glieder, welche in Beziehung auf $\Delta\varphi$ und $\frac{\Delta ds}{ds}$ vom zweiten Grade sind, vernachlässigen

Digitized by Google

$$\begin{cases} \mathrm{d}\Delta x = -\Delta\varphi\,\mathrm{d}y + \dfrac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}\Delta y = +\Delta\varphi\,\mathrm{d}x + \dfrac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

mithin

$$29.\quad \begin{cases} \Delta x = -\int \Delta\varphi\,\mathrm{d}y + \int \dfrac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x, \\ \Delta y = +\int \Delta\varphi\,\mathrm{d}x + \int \dfrac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Für $\Delta\varphi$ und $\frac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$ sind die Ausdrücke 25 oder 26 und 7 zu substituiren. Die dadurch entstehenden Doppelintegrale lassen sich durch partielle Integration in einfache zerlegen. Bekanntlich ist nämlich:

$$\int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{f}(x) - \int x\,\mathrm{d}\mathrm{f}(x).$$

Dies auf die Gleichungen 29 angewendet, giebt

$$30.\quad \begin{cases} \Delta x = -y\,\Delta\varphi + \int y\,\mathrm{d}\Delta\varphi + \int \dfrac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x, \\ \Delta y = +x\,\Delta\varphi - \int x\,\mathrm{d}\Delta\varphi + \int \dfrac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}y. \end{cases}$$

Wenn der Krümmungsradius r gegen die Höhe des Körpers sehr gross ist, und wir ausserdem die relative Längenänderung $\frac{\Delta\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}$ der Axe vernachlässigen, so ergiebt sich sehr einfach

$$31.\quad \begin{cases} \Delta x = -\int \Delta\varphi\,\mathrm{d}y = -\dfrac{1}{E}\iint \dfrac{M}{W}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y, \\ \Delta y = +\int \Delta\varphi\,\mathrm{d}x = +\dfrac{1}{E}\iint \dfrac{M}{W}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x, \end{cases}$$

oder

$$32.\quad \begin{cases} \Delta x = -y\,\Delta\varphi + \int y\,\mathrm{d}\Delta\varphi = -\dfrac{y}{E}\int \dfrac{M}{W}\,\mathrm{d}s + \dfrac{1}{E}\int \dfrac{M}{W}\,y\,\mathrm{d}s, \\ \Delta y = +x\,\Delta\varphi - \int x\,\mathrm{d}\Delta\varphi = +\dfrac{x}{E}\int \dfrac{M}{W}\,\mathrm{d}s - \dfrac{1}{E}\int \dfrac{M}{W}\,x\,\mathrm{d}s. \end{cases}$$

Noch mehr vereinfachen sich diese Gleichungen bei constantem Querschnitte, da alsdann W vor das Integralzeichen genommen werden kann.

XXXIII. Kapitel.

Anwendung auf einige Querschnittsformen.

§. 291. Der rechteckige Querschnitt. Bezeichnen wir (Fig. 98) die Breite mit b, die Höhe mit h, so ist

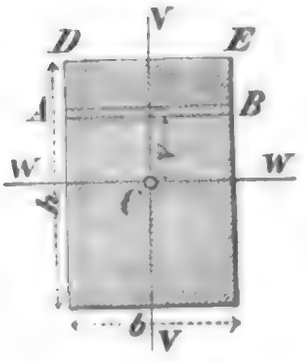
Digitized by Google

$$\mathfrak{W} = b\,r \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \frac{v^2 dv}{r+v} = b\,r \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \left(v - r + \frac{r^2}{r+v} \right) dv$$

d. i.

$$33.\quad \mathfrak{W} = b\,r^2 \left(r \operatorname{lognat} \frac{2r+h}{2r-h} - h \right).$$

Fig. 98.



Die Verwandlung des Logarithmus in eine unendliche Reihe giebt

$$34.\quad \mathfrak{W} = \tfrac{1}{12}\, b\,h^3 \left(1 + \frac{3\,h^2}{20\,r^2} + \frac{3\,h^4}{112\,r^4} + \ldots \right).$$

Sobald die Höhe h nur einigermassen klein gegen den Radius ist, kann man hiernach $\mathfrak{W} = W = \frac{1}{12}\, b\,h^3$ setzen. So wird z. B. für r = b, 2 b, 3 b, 4 b, 5 b: $\mathfrak{W}$ = 1,153 1,038 1,017 1,009 1,006 . W.

Der Abstand der Kernlinien von der Axe wird nach 21 (§. 288), da $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}\,h$, $F = b\,h$, $W = \frac{1}{12}\, b\,h^3$ ist, $k_1 = k_2 = \frac{1}{6}\,h$, so dass der Kern das mittlere Drittheil der Querschnittshöhe einnimmt.

Die Festigkeitsbedingungen werden nach 18 (§. 287), wenn man die dabei auftretenden Divisionen mit $r - \frac{1}{2}\,h$ in Reihen ausführt,

$$35.\quad (K_1, K_2)\, b\,h = P \left[1 \pm 6\,\frac{e}{h} - 2\,\frac{e}{r} \pm \ldots . \right].$$

Anwendung bei hölzernen Bogenbrücken etc.

§. 292. Gewölbe. Der rechteckige Querschnitt findet ausser bei den hölzernen Bogenträgern insbesondere bei den steinernen Gewölben Anwendung. Hier wirkt, wie bei allen nach oben gekrümmten Bögen, P drückend.

Liegt der Durchschnittspunkt D (Fig. 97) der Kraft R mit dem Querschnitte ausserhalb des letzteren, so muss hier, wenn die Fugen nicht mit Mörtel ausgefüllt sind oder wenn die Zugfestigkeit des Mörtels vernachlässigt wird, eine Drehung des einen Gewölbtheiles um die der Kraft R am nächsten liegende Kante des Querschnittes eintreten. Das Gewölbe ist daher nur stabil, wenn die Stützlinie ganz innerhalb des Gewölbes liegt.

Druck findet an allen Stellen eines Querschnittes oder einer Fuge nur statt, wenn die Stützlinie durch das mittlere Drittheil der Höhe geht. Ist dies nicht der Fall, so tritt, wenn kein Mörtel vorhanden ist, ein Oeffnen der Fugen auf der einen Seite ein, so dass sich die Steine nicht an allen Stellen der Fuge berühren. Ist Mörtel vorhanden, so kann derselbe wegen seiner geringen Zugfestigkeit zerrissen werden, daher ist hier die Annahme gerechtfertigt, dass die Stützlinie ganz innerhalb des mittleren Drittheils der Gewölbdicke liegen soll.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so würde das Gesetz 9 oder 16 für die Spannung N nicht mehr richtig sein.

Auf weitere Erörterungen verzichten wir in diesem Werke.

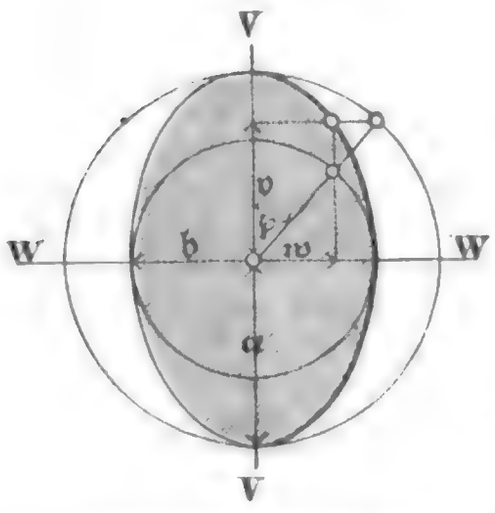
§. 293. Elliptischer Querschnitt. Entsprechend der in §. 203 gemachten Entwickelung wird für die Coordinaten v, w des Umfanges

Digitized by Google

(Fig. 99) $v = a\cos\varphi$, $w = b\sin\varphi$ und $dF = 2w\,dv = -2ab\sin^2\varphi\,d\varphi$. Daher wird nach 13 (Seite 271):

$$\mathfrak{W} = W - \frac{2a^5 b}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^4\varphi\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\cos^2\varphi + \frac{a^4}{r^4}\cos^4\varphi - \ldots\right)d\varphi.$$

Fig. 99.



Wenn m eine gerade Zahl ist, so ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^m\varphi\,d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots(m+2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Ausserdem ist nach 31 (Seite 192) $W = \frac{1}{4}\pi a^3 b$; mithin wird

36. $$\mathfrak{W} = \frac{\pi}{4}a^3 b\left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{5a^4}{16r^4} + \ldots\right).$$

Der Abstand der Kernlinien von der Axe wird nach 21 (§. 288), da $a_1 = a_2 = a$, $F = \pi ab$, $W = \frac{1}{4}\pi a^3 b$ ist, $k_1 = k_2 = \frac{1}{4}a$, so dass der Kern das mittlere Viertheil der Querschnittshöhe einnimmt.

Die Festigkeitsbedingungen werden nach 18 (§. 287), wenn wir auch hier die Divisionen mit $r - a$ in Reihen ausführen,

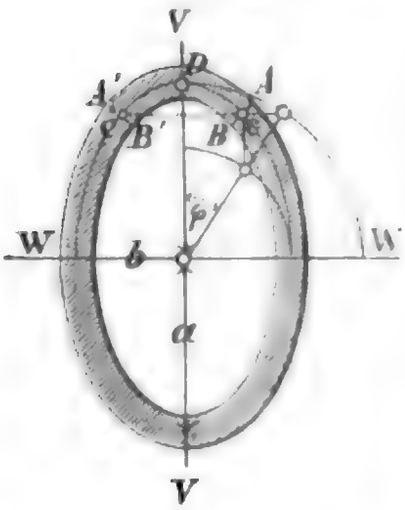
37. $$(K_1, K_2)\,\pi ab = P\left(1 \pm 4\frac{e}{a} - 3\frac{e}{r} \pm \ldots\right).$$

Anwendung bei Kettenhaken, Kettenringen u. s. w.

§. 294. Elliptischer Ringquerschnitt.

(Fig. 100). Die Dicke des Ringes sei constant und zwar $= \delta$. Der äussere und innere Umfang sind alsdann nahezu Ellipsen mit den Halbaxen $a + \frac{1}{2}\delta$, $b + \frac{1}{2}\delta$, $a - \frac{1}{2}\delta$, $b - \frac{1}{2}\delta$, wenn a, b die mittleren Halbaxen bezeichnen (vergl. §. 207). Differenziiren wir den Ausdruck 36 für das $\mathfrak{W}$ der vollen Ellipse nach a und b, so ergiebt sich

Fig. 100.



$$d\mathfrak{W} = \frac{\pi}{4}a^2\left[a\,db + 3b\,da + \frac{a^3 db + 5a^2 b\,da}{2r^2} + \frac{5(a^5 db + 7a^4 b\,da)}{16r^4} + \ldots\right].$$

Dieser Ausdruck für $d\mathfrak{W}$ gilt annähernd auch für das $\mathfrak{W}$ des elliptischen Ringes, wenn wir δ für da und db setzen. Daher ist sehr nahe

38. $$\mathfrak{W} = \frac{\pi}{4}a^2(a+3b)\,\delta\left[1 + \frac{(a+5b)a^2}{2(a+3b)r^2} + \frac{5(a+7b)a^4}{16(a+3b)r^4} + \ldots\right].$$

Für einen Kreisring mit dem mittleren Radius a wird daher

39. $$\mathfrak{W} = \pi a^3\delta\left(1 + \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5a^4}{8r^4} + \ldots\right).$$

Digitized by Google

Der Abstand der Kernlinien von der Axe wird nach 21 (§. 288), da $a_1 = a_2 = a + \frac{1}{2}\delta$, d. i. sehr nahe $= a$, $F = \pi(a + \frac{1}{2}\delta)(b + \frac{1}{2}\delta) - \pi(a - \frac{1}{2}\delta)(b - \frac{1}{2}\delta)$, d. i. sehr nahe $= \pi(a + b)\delta$ und $W = \frac{1}{4}\pi a^2 (a + 3b)\delta$ ist,

$$40. \quad k_1 = k_2 = \frac{a(a + 3b)}{4(a + b)}.$$

Ist b gegen a sehr gross, so wird $k = \frac{3}{4}a$. Ist b gegen a sehr klein, so wird $k = \frac{1}{4}a$, so dass k immer zwischen den Ganzen $\frac{3}{4}a$ und $\frac{1}{4}a$ liegt. Für $a = b$, d. i. für den Kreisring, wird $k = \frac{1}{2}a$, so dass hier der Kern die mittlere Hälfte der Querschnittshöhe einnimmt.

Als genaue Festigkeitsbedingungen ergeben sich nach 18 (§. 287), wenn wir die dabei auftretenden Divisionen wieder in Reihen ausführen,

$$41. \quad (K_1, K_2)\pi(a + b)\delta = P\left[1 \pm \frac{4(a + b)}{a + 3b}\frac{e}{a} - \frac{3a + b}{a + 3b}\frac{e}{r} \pm \ldots\right]$$

und für den Kreisring

$$42. \quad (K_1, K_2)\pi r\delta = P\left[1 \pm 2\frac{e}{a} - \frac{e}{r} \pm \ldots\right].$$

Anwendung bei Röhren-Bogenbrücken.

§. 295. Idealer I-förmiger Querschnitt. (Fig. 80, Seite 210). Wir bezeichnen, wie in §. 222 die beiden Gurte mit f_1, f_2. Alsdann wird nach 6 (Seite 270):

$$\mathfrak{W} = \frac{r a_1^2 f_1}{r + a_1} + \frac{r a_2^2 f_2}{r - a_2}.$$

Setzt man für a_1 und a_2 die Ausdrücke 117 (§. 222), nämlich $a_1 = \frac{f_2 h}{F}$, $a_2 = \frac{f_1 h}{F}$, so ergiebt sich leicht:

$$43. \quad \mathfrak{W} = \frac{f_1 f_2 h^2}{F} \cdot \frac{F^2 r^2}{(F r - f_1 h)(F r + f_2 h)}.$$

Der Nenner des zweiten Factors ist auch $= F^2 r^2\left(1 - \frac{f_1 h}{F r}\right)\left(1 + \frac{f_2 h}{F r}\right)$ $= F^2 r^2\left(1 - \frac{f_1 - f_2}{F}\frac{h}{r} - \frac{f_1 f_2 h^2}{F^2 r^2}\right)$. Führt man nun die Division in einer Reihe aus, so ergiebt sich der einfache Ausdruck:

$$44. \quad \mathfrak{W} = \frac{f_1 f_2 h^2}{F}\left[1 + \frac{f_1 - f_2}{F}\frac{h}{r} + \ldots\right].$$

Als Abstand der Kernlinien von der Axe ergiebt sich nach 21 (Seite 274), da nach 118 mit Berücksichtigung von 117 in §. 223 $W = F a_1 a_2$ ist,

$$k_1 = a_1, \quad k_2 = a_2.$$

Der Kern nimmt also hier die ganze Höhe des Querschnittes ein. Aus §. 288 folgt daher:

Die Spannungen beider Gurte haben nur dasselbe Vorzeichen, wenn die Stützlinie innerhalb der Gurte liegt.

Sind e_1, e_2 die Abstände der Stützlinie von den beiden Gurten f_1, f_2, so sind die Spannungen in beiden Gurten nach 22 (Seite 274) $= \frac{P a_1 e_2}{W}$

Digitized by Google

und $-\frac{P a_2 e_1}{W}$, oder, da $W = F a_1 a_2 = f_1 a_1 h = f_2 a_2 h$ ist, $\frac{P e_2}{f_1 h}$ und $-\frac{P e_1}{f_2 h}$. Bezeichnen wir die Gesammtspannungen in beiden Gurten, welche man durch Multiplication der vorstehenden Spannungen pro Flächeneinheit mit f_1, f_2 erhält, mit S_1, S_2, so wird

$$45. \quad S_1 = P\frac{e_2}{h}. \quad S_2 = -P\frac{e_1}{h}.$$

Die Spannungen verhalten sich also umgekehrt, wie die Abstände der Stützlinie von den Gurten.

Dies lässt sich auch in ganz elementarer Weise nachweisen. Die Kraft R, welche wir nach dem Punkte D des Querschnittes (Fig. 97) verlegen, zerlegen wir dort in die Componenten P und Q. Q überträgt sich unmittelbar auf die Gurte und erzeugt in diesen Schubspannungen. P lässt sich in zwei in den Gurten wirkende Componenten S_1, S_2 zerlegen, welche sich nach dem Hebelgesetze wie $e_2 : e_1$ verhalten. S_1 und S_2 selbst ergeben sich leicht durch die zweite Bedingung, dass $S_1 + S_2 = P$ sein muss oder direkt, indem man für jeden Gurt als Momentenaxe die Summe der Momente gleich Null setzt.

Die Festigkeitsbedingungen sind nun $K_1 f_1 = S_1$, $K_2 f_2 = S_2$ oder

$$46. \quad K_1 f_1 h = P e_2, \quad K_2 f_2 h = P e_1,$$

wodurch bei gegebener Belastung die Grösse der Querschnitte f_1, f_2 bestimmt ist.

In Beziehung auf die Anwendung dieser Gleichungen können wir folgende Hauptfälle unterscheiden.

1. Die Stützlinie liegt zwischen den Gurten und hat eine constante Form. In diesem Falle ist $K_1 = K_2$. Ist K der Sicherheitscoefficient, so wird

$$47. \quad f_1 = \frac{P e_2}{K h}, \quad f_2 = \frac{P e_1}{K h}, \quad F = \frac{P(e_1 + e_2)}{K h} = \frac{P}{K},$$

so dass in diesem Falle die Lage der Stützlinie auf die Gesammtfläche ohne Einfluss ist. Es verhält sich $f_1 : f_2 = e_2 : e_1 = a_2 : a_1$. Da $e_2 + e_1 = a_2 + a_1 = h$ ist, so muss $e_1 = a_1$, $e_2 = a_2$ sein, d. h. Die Stützlinie soll mit der Axe des Körpers zusammenfallen.

2. Die Stützlinie liegt ausserhalb der Gurte und hat eine constante Form. Alsdann wird

$$48. \quad f_1 = \frac{P e_2}{K_1 h}, \quad f_2 = \frac{P e_1}{K_2 h}, \quad F = \frac{P}{h}\left(\frac{e_2}{K_1} + \frac{e_1}{K_2}\right),$$

wobei einer der Coefficienten K_1, $K_2 = K$, der andere $= \mathfrak{K}$ ist. Je weiter die Stützlinie vom Körper entfernt ist, desto grösser wird (bei constantem P) f_1 und f_2, also auch F. Ist $K = \mathfrak{K}$, so wird $f_1 : f_2 = e_2 : e_1$. Da auch $f_1 : f_2 = a_2 : a_1$ ist, so wird

$$a_1 : a_2 = e_1 : e_2.$$

3. Die Stützlinie liegt innerhalb der Gurte, hat aber eine veränderliche Lage. Dieser Fall tritt stets bei veränderlicher Belastung ein. Die vorige Bedingung ist dann nicht für jede Belastung zu erfüllen. Alsdann sind natürlich f_1, f_2 für diejenigen Belastungen zu berechnen, für welche bezüglich die Momente $P e_2$, $P e_1$ den grössten

Digitized by Google

Werth haben. Sind diese Momente $P' e_2'$, $P'' e_1''$, so wird

$$49. \quad f_1 = \frac{P' e_2'}{K h}, \quad f_2 = \frac{P'' e_1''}{K h}, \quad F = \frac{P' e_2' + P'' e_1''}{K h}.$$

4. **Die Stützlinie liegt ausserhalb der Gurte und hat eine veränderliche Form.** Bei derselben Belastung, bei welcher $P e_1$ seinen grössten Werth hat, hat auch $P e_2$ seinen grössten Werth, vorausgesetzt, dass die Stützlinie nur auf der einen Seite des Körpers liegen kann. Sind nun die grössten Werthe von $P e_1$, $P e_2$, wenn die Stützlinien auf der einen Seite A liegt, $P' e_1'$, $P' e_2'$, und wenn sie auf der andern Seite B liegt, wobei das Vorzeichen der Spannungen wechselt, $P'' e_1''$, $P'' e_2''$, so wird

$$50. \quad \begin{cases} \text{für A:} & f_1 = \dfrac{P' e_2'}{K_1}, & f_2 = \dfrac{P' e_1'}{K_2}. \\ \text{für B:} & f_1 = \dfrac{P'' e_2''}{K_2}, & f_2 = \dfrac{P'' e_1''}{K_1}. \end{cases}$$

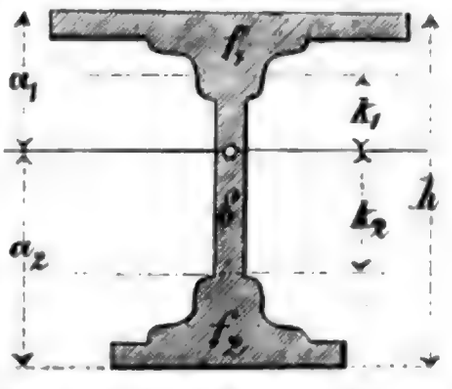
Der grösste der sich für f_1 und f_2 ergebenden beiden Werthe ist beizubehalten.

In praktischen Fällen weiss man oft in Voraus, ob die grösste Beanspruchung durch Zug oder Druck eintreten wird; tritt z. B., wie fast stets bei Bogenträgern, die grösste Beanspruchung durch Druck ein, so ist jeder Gurt nur für dasjenige Moment zu berechnen, welches in ihm den grössten Druck erzeugt. Dann aber stimmen die Ausdrücke in diesem und im vorigen Falle genau überein.

Anwendung bei Bogen-Gitterträgern.

§. 296. I-förmiger Querschnitt. Da im Allgemeinen, selbst bei gleicher Zug- und Druckfestigkeit, ein unsymmetrischer Querschnitt zweckmässiger ist, als ein symmetrischer, so setzen wir sogleich einen unsymmetrischen I-förmigen Querschnitt voraus. Wir bezeichnen die gesammte Höhe mit h (Fig. 101), den Flächeninhalt des Ober- und Untergurtes mit f_1, f_2 und die Dicke der verticalen Wand oder des Steges mit δ.

Fig. 101.



In den Fällen, in welchen dieser Querschnitt zur Anwendung kommt, namentlich bei Bogenträgern, wird es in der Regel nicht nöthig sein, $\mathfrak{W}$ von W verschieden anzunehmen, obwohl sich $\mathfrak{W}$ nach 12 (Seite 271) leicht bestimmen lässt. Wir setzen daher $\mathfrak{W} = W$. Nach 174 (§. 238) und 170 (§. 237) wird, wenn die Höhe der Gurte gegen die gesammte Höhe klein ist, sehr nahe:

$$51. \quad W = \tfrac{1}{4} F h^2 - \tfrac{1}{6} h^3 \delta - \frac{(f_1 - f_2)^2 h^2}{4 F},$$

$$52. \quad a_1 = \frac{F - (f_1 - f_2)}{2 F} h, \quad a_2 = \frac{F + (f_1 - f_2)}{2 F} h.$$

Digitized by Google

Hiernach ist $a_1 a_2 = \frac{F^2 - (f_1 - f_2)}{F^2} h^2$, wesshalb der Ausdruck für W auch folgendermaassen geschrieben werden kann:

$$53. \quad W = F a_1 a_2 - \tfrac{1}{6} h^3 \delta.$$

Als Abstände der Kernlinien von der Schweraxe ergeben sich nach 21 (Seite 274),

$$54. \quad k_1 = a_1 - \frac{h^3 \delta}{6 F a_2}, \quad k_2 = a_2 - \frac{h^3 \delta}{6 F a_1},$$

oder, wenn man in den zweiten Gliedern für a_1, a_2 obige Ausdrücke setzt,

$$54\,a. \quad k_1 = a_1 - \frac{h^2 \delta}{3 [F - (f_1 - f_2)]}, \quad k_2 = a_2 - \frac{h^2 \delta}{3 [F + (f_1 - f_2)]}.$$

Wenn kein Steg vorhanden oder $\delta = 0$ ist, so wird $k_1 = a_1$, $k_2 = a_2$. Sind dagegen keine Gurte vorhanden, so dass der Querschnitt ein Rechteck bildet, so ist $F = h \delta$, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} h$, daher $k_1 = k_2 = \frac{1}{6} h = \frac{1}{3} a$. Sonach liegt stets k_1 zwischen $\frac{1}{3} a_1$ und a_1, k_2 zwischen $\frac{1}{3} a_2$ und a_2.

Für die Berechnung des Querschnittes ist es in praktischen Fällen bequemer, den Abstand der Kraftrichtung von den Gurten, anstatt von den Kernlinien einzuführen, weil die Lage der Gurte direkt gegeben ist, während sich die Lage der Kernlinien nach der sich ergebenden Querschnittsform richtet. Wir bezeichnen den Abstand der Stützlinie von den Gurten mit c_1, c_2 und unterscheiden folgende Fälle:

1. Die Stützlinie liegt innerhalb des Kernes und hat eine constante Form. Der Sicherheitscoefficient sei K. Da die Spannung an den am weitesten von der Schweraxe entfernten Fasern gleich gross, nämlich $= K$ sein soll, so ist die Spannung im ganzen Querschnitte constant. Dies aber ist nur möglich, wenn die Kraft R durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, oder wenn die Stützlinie mit der Axe zusammenfällt. Die nöthige Grösse der Gesammtfläche ist

$$55. \quad F = \frac{P}{K}.$$

Setzen wir nun in 52 c_1 für a_1, c_2 für a_2 und eliminiren aus den so erhaltenen Gleichungen F, so ergiebt sich

$$f_1 - f_2 = - \frac{F (c_1 - c_2)}{h}.$$

Ausserdem ist $f_1 + f_2 = F - h \delta = F - (c_2 - c_1) \delta$. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$56. \quad f_1 = F \frac{c_2}{h} - \tfrac{1}{2} h \delta, \quad f_2 = F \frac{c_1}{h} - \tfrac{1}{2} h \delta.$$

2. Die Stützlinie liegt ausserhalb des Kernes und hat eine constante Lage. Alsdann muss, wenn $K_1 = K$, $K_2 = \mathfrak{K}$ ist,

$$K W = P a_1 e_2, \quad \mathfrak{K} W = P a_2 e_1$$

sein. Nun aber ist $e_1 = c_1 + (a_2 - k_1)$, $e_2 = c_2 - (a_2 - k_2)$, d. i. nach 54:

$$e_1 = c_1 + \frac{h^3 \delta}{6 F a_2}, \quad e_2 = c_2 - \frac{h^3 \delta}{6 F a_1}.$$

Dies eingesetzt giebt

Digitized by Google

$$57.\quad K\,W = P\,a_1\,c_2 - \frac{P\,h^3\,\delta}{6\,F},\quad \mathfrak{K}\,W = P\,a_2\,c_1 + \frac{P\,h^3\,\delta}{6\,F}.$$

Reducirt man auf W und setzt beide Ausdrücke für W einander gleich, so ergiebt sich nach Einsetzung der Ausdrücke 52 für a_1, a_2:

$$a.\quad f_1 - f_2 = -\frac{K\,c_1 - \mathfrak{K}\,c_2}{K\,c_1 + \mathfrak{K}\,c_2}\,F - \frac{(K+\mathfrak{K})\,h}{3\,(K\,c_1 + \mathfrak{K}\,c_2)}\,h\,\delta.$$

Dies in den Ausdruck für W gesetzt, giebt nach gehöriger Reduction:

$$W = \frac{K\,\mathfrak{K}\,h^2 c_1\,c_2}{(K\,c_1 + \mathfrak{K}\,c_2)^2}\left[F + \frac{h^2}{6\,c_1\,c_2}\,h\,\delta\right]\left[F - \frac{(K+\mathfrak{K})^2}{6\,K\,\mathfrak{K}}\,h\,\delta\right].$$

Die Addition der Gleichungen 57 giebt $(K+\mathfrak{K})\,W = P\,(a_1\,c_2 + a_2\,c_1)$. Setzt man hierin für a_1, a_2 die Ausdrücke 52 und dabei für $f_1 - f_2$ den Ausdruck a, so wird

$$(K+\mathfrak{K})\,W = \frac{P\,(K+\mathfrak{K})\,c_1\,c_2}{2\,F\,(K\,c_1 + \mathfrak{K}\,c_2)}\left[F + \frac{h^2}{6\,c_1\,c_2}\,h\,\delta\right].$$

Setzt man für W den vorigen Ausdruck, so hebt sich ein Faktor und die Reduction auf F giebt alsdann den sehr einfachen Ausdruck

$$58.\quad F = F_0 + \frac{(K+\mathfrak{K})^2}{6\,K\,\mathfrak{K}}\,h\,\delta,$$

worin zur Abkürzung F_0 gleich der Gesammtfläche für den idealen I-förmigen Querschnitt, d. i. $F_0 = \frac{P\,(K\,c_1 + \mathfrak{K}\,c_2)}{K\,\mathfrak{K}\,h}$ gesetzt ist; f_1 und f_2 ergeben sich nun leicht aus der Gleichung a und der Gleichung $f_1 - f_2 = F - h\,\delta$. Es ergiebt sich nämlich:

$$59.\quad f_1 = f_{01} - \frac{2\,K - \mathfrak{K}}{6\,K}\,h\,\delta,\quad f_2 = f_{02} - \frac{2\,\mathfrak{K} - K}{6\,\mathfrak{K}}\,h\,\delta,$$

wenn wir auch hier f_{01}, f_{02} gleich den nöthigen Gurtquerschnitten für den idealen I-förmigen Querschnitt, d. i. $f_{01} = \frac{P\,c_2}{K\,h}$, $f_{02} = \frac{P\,c_1}{\mathfrak{K}\,h}$ setzen. Hieraus folgt, dass die durch den Steg veranlasste Differenz der Querschnitte zwischen den wirklichen und den idealen I-förmigen Querschnitt von der Lage der Stützlinie unabhängig ist.

Hiernach wird z. B. für

$\mathfrak{K} = K$: $f_1 = f_{01} - \frac{1}{6}\,h\,\delta$, $f_2 = f_{02} - \frac{1}{6}\,h\,\delta$, $F = F_0 + \frac{2}{3}\,h\,\delta$.

$\mathfrak{K} = 3\,K$: $f_1 = f_{01} + \frac{1}{6}\,h\,\delta$, $f_2 = f_{02} - \frac{5}{18}\,h\,\delta$, $F = F_0 + \frac{8}{9}\,h\,\delta$.

$\mathfrak{K} = 6\,K$: $f_1 = f_{01} + \frac{2}{3}\,h\,\delta$, $f_2 = f_{02} - \frac{11}{36}\,h\,\delta$, $F = F_0 + \frac{49}{36}\,h\,\delta$.

3. Die Stützlinie hat eine variabele Lage, wobei aber die grösste Beanspruchung beider Gurte nur entweder durch Zug oder durch Druck eintreten kann. Wir setzen beispielsweise eine Beanspruchung durch Druck voraus. Der grösste Werth von $P\,e_2$ und $P\,e_1$ sei bezüglich $P'\,e_2'$ und $P''\,e_1''$. Die entsprechenden Werthe von c_2, c_1 seien c_2', c_1''. Der obere Gurt f_1 wird nur auf Druck beansprucht, wenn die Kraft R den Querschnitt oberhalb der unteren Kernlinie schneidet, er mag zwischen oder ausserhalb der Kernlinie liegen; alsdann ist $e_2 = c_2 - (a_2 - k_2)$. Ebenso wird der Gurt f_2 nur auf Druck beansprucht, wenn

Digitized by Google

die Kraft $\mathfrak{K}$ den Querschnitt unterhalb der oberen Kernlinie schneidet; alsdann ist $e_1 = c_1 - (a_1 - k_1)$. Die Festigkeitsbedingungen $\mathfrak{K} W = P' e_2' a_1$ und $\mathfrak{K} W = P'' e_1'' a_2$ geben hiernach analog dem vorigen Falle

$$60. \quad \mathfrak{K} W = P' c_2 a_1 - \frac{P' h^3 \delta}{6 F}, \quad \mathfrak{K} W = P'' c_1'' a_2 - \frac{P'' h^3 \delta}{6 F}.$$

Hiernach ist $6 F P' c_2' a_1 - P' h^3 \delta = 6 F P'' c_1'' a_2 - P'' h^3 \delta$; die Einsetzung der Ausdrücke 52 für a_1, a_2 giebt

$$b. \quad f_1 - f_2 = \frac{P' c_2' - P'' c_1''}{P' c_2' + P'' c_1''} F - \frac{(P' - P'') h}{3 (P' c_2' + P'' c_1'')} h \delta.$$

Addirt man die Gleichungen 60 und substituirt man für W, a_1, a_2 die Ausdrücke 51, 52, für $f_1 - f_2$ den Ausdruck b, so ergiebt sich:

$$61. \quad F^2 - F . h \delta \frac{(P' c_2' + P'' c_1'')^2 - (P' c_2' - P'' c_1'') (P' - P'') h}{6 P' P'' c_2' c_1''}$$

$$- (h \delta)^2 \frac{(P' - P'')^2 h^2}{36 P' P'' c_2' c_1''} = F F_0 - F_0 h \delta \frac{(P' + P'') (P' c_2' + P'' c_1'') h}{12 P' P'' c_2' c_1''},$$

wenn wir wieder F_0 gleich der ganzen Querschnittsfläche für den idealen **I**-förmigen Querschnitt, d. i. $F_0 = \frac{P' c_2' + P'' c_1''}{\mathfrak{K} h}$ setzen; f_1 und f_2 ergeben sich aus der Gleichung b und der Gleichung $f_1 + f_2 = F - h \delta$. Wenn $P' = P''$, $c_2' = c_1''$ ist (was bei flachen Bogenbrücken nahezu der Fall ist), so wird einfacher:

$$62. \quad F^2 - \tfrac{3}{5} F . h \delta = F . F_0 - \frac{h}{3 c_1} F_0 . h \delta$$

und nach b $f_1 - f_2 = 0$, also $F = 2 f_1 + h \delta$, $f_1 = f_2 = \frac{1}{2} F - \frac{1}{2} h \delta$. Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

$\frac{c_1}{h}$	$h \delta = 0$		$h \delta = 0{,}5 F_0$		$h \delta = F_0$	
	$F = F_0 +$	$f = f_0 -$	$F = F_0 +$	$f = f_0 -$	$F = F_0 +$	$f = f_0 -$
0,5	0	0,500	0	0,500	0	0,500
0,75	0,222	0,389	0,276	0,362	0,333	0,333
1	0,333	0,333	0,387	0,306	0,434	0,283
1,5	0,444	0,278	0,488	0,256	0,521	0,240
2	0,500	0,250	0,535	0,232	0,560	0,220
5	0,600	0,200	0,616	0,192	0,626	0,187
10	0,633	0,183	0,641	0,179	0,646	0,177
∞	0,667	0,167	0,667	0,167	0,667	0,167
	$. h \delta$		$. h \delta$		$. h \delta$	

Die Tabelle giebt unmittelbar den Unterschied zwischen der nöthigen Fläche beim wirklichen und dem idealen **I**-förmigen Querschnitt, so dass man nach der leichten Berechnung des idealen Querschnittes auch leicht den wirklichen berechnen kann. Der Unterschied ist für die ganze Fläche 0 bis $\frac{3}{5} h \delta$ und für einen Gurtquerschnitt $\frac{1}{2} h \delta$ bis $\frac{1}{6} h \delta$. Wenn $h \delta$ gegen F_0 sehr klein ist, so wird sehr nahe:

Digitized by Google

$$63.\quad F = F_0 + \frac{1}{3}\left(2 - \frac{h}{c_1}\right) h\,\delta, \quad f = f_0 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{h}{c_1}\right) h\,\delta.$$

Anwendung bei Blech-Bogenträgern und gusseisernen Bogenträgern, Blechkrahnen u. s. w.

---

§. 297. Belastungsweise. Wir unterscheiden auch hier, wie bei den geraden Stäben (vergl. §. 92) eine bestimmte und eine bedingte Belastung. Bei ersterer sind alle äusseren Kräfte direkt gegeben, während sie bei letzterer zum Theil durch die Elasticität des Stabes bedingt sind, also durch die Ermittelung der Formänderung erst bestimmt werden müssen.

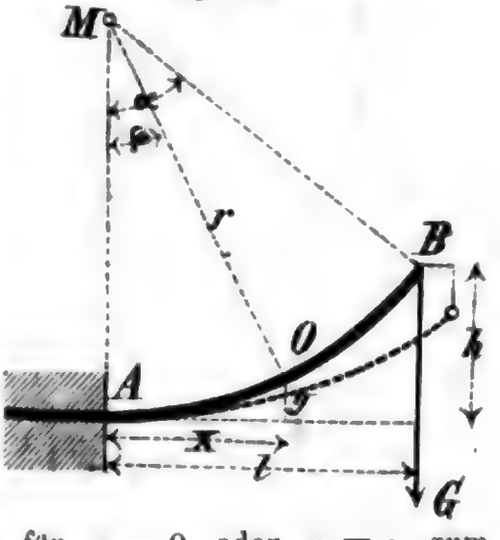
Die bestimmte Belastung kommt bei den gekrümmten Stäben in der Praxis nicht viel vor; Beispiele bieten gekrümmte Federn, Spiralfedern, Kettenhaken, Krahne, Bogenträger mit drei Gelenken etc. Viel häufiger tritt aber die bedingte Belastung auf, insbesondere bei Bogenträgern, Kettenringen u. s. w. Wir geben daher zunächst nur einige Beispiele für die bestimmte Belastung, um alsdann ausführlicher auf die bedingte Belastung einzugehen.

XXXIV. Kapitel.

Beispiele für bestimmte Belastung.

§. 298. Stab, welcher an einem Ende horizontal eingespannt, am andern vertical belastet ist. Wir nehmen den Stab nach oben gekrümmt und das eingespannte Ende A (Fig. 102) als Coordinatenanfang an. Die Länge der Horizontal- und Verticalprojection sei l, h, der Centriwinkel AMB bei kreisförmiger Krümmung $= \alpha$ und das am freien Ende B wirkende Gewicht $= G$. Alsdann ist

Fig. 102.



$$64.\quad \begin{cases} P = -G\sin\varphi, \quad Q = -G\cos\varphi, \\ M = G(l - x) = G\,r\,(\sin\alpha - \sin\varphi). \end{cases}$$

P ist in $A = 0$, in B am grössten; Q ist in A am grössten, nämlich $= G$, und in B am kleinsten, nämlich $= -G\cos\alpha$. M ist in A am grössten, nämlich $= G\,l = G\,r\sin\alpha$. Sowohl P, als M, mithin auch die Faserspannung werden zum analytischen Maximum für $\cos\varphi = 0$, d. i. $\varphi = 90^0$. Ist nun, wie wir voraussetzen, $\alpha < 90^0$, so kann die Faserspannung nur für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \alpha$ zum Maximum werden; der gefährliche Querschnitt liegt also in A und B. In A ist $N = \frac{G\,l\,(a_1, a_2)}{W}$, in B dagegen $N = -\frac{G\sin\alpha}{F}$. Daher kann die Faserspannung nur das Maximum in B erreichen, wenn $l < \frac{W\sin\alpha}{F\,(a_1, a_2)}$ ist.

Digitized by Google

§. 299. Formänderung eines parabolisch gekrümmten Stabes. Wir setzen $y = A x^2$; da für $x = l$ $y = h$ werden muss, so ist $A = \frac{h}{l^2}$, also $y = h \frac{x^2}{l^2}$, $dy = 2 \frac{h x}{l^2} dx$. Ferner wird $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)} = dx \sqrt{1 + 4 \frac{h^2 x^2}{l^4}}$. Die Reihenverwandlung giebt

$$ds = dx \left(1 + 2 \frac{h^2 x^2}{l^4} - 2 \frac{h^4 x^4}{l^8} + \ldots\right).$$

Unter der Voraussetzung eines constanten Querschnittes ergiebt sich zunächst als Lagenänderung der Tangente nach 26 (§. 289):

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{G\,l}{E\,W} \int \left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(1 + 2 \frac{h^2 x^2}{l^4} - 2 \frac{h^4 x^4}{l^8} + \ldots\right) dx \\ &= \frac{G\,l}{E\,W} \int \left(1 - \frac{x}{l} + 2 \frac{h^2 x^2}{l^4} - 2 \frac{h^2 x^3}{l^5} - 2 \frac{h^4 x^4}{l^8} + \ldots\right) dx \\ &= \frac{G\,l\,x}{E\,W} \left(1 - \frac{x}{2\,l} + \frac{2\,h^2 x^2}{3\,l^4} - \frac{2\,h^2 x^2}{3\,l^5} - \frac{2\,h^4 x^4}{6\,l^8} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = 0$ auch $\Delta\varphi = 0$ werden muss. Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergiebt sich nun nach 31 (§. 290), wenn wir dieselben in der positiven Richtung der x und **nach unten als positiv nehmen,**

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{2\,G\,h}{E\,W\,l} \int x^2 \left(1 - \frac{x}{2\,l} + \ldots\right) dx, \\ \Delta y = \frac{G\,l}{E\,W} \int x \left(1 - \frac{x}{2\,l} + \ldots\right) dx. \end{cases}$$

Die Ausführung der Integration giebt:

$$65. \quad \begin{cases} \Delta x = \frac{2\,G\,h\,x^3}{3\,E\,W\,l} \left(1 - \frac{3\,x}{8\,l} + \frac{2\,h^2 x^2}{5\,l^4} - \frac{h^2 x^2}{3\,l^5} - \frac{6\,h^4 x^4}{35\,l^8} + \ldots\right), \\ \Delta y = \frac{G\,l\,x^2}{2\,E\,W} \left(1 - \frac{x}{3\,l} + \frac{h^2 x^2}{3\,l^4} - \frac{4\,h^2 x^3}{15\,l^5} - \frac{2\,h^4 x^4}{15\,l^8} + \ldots\right). \end{cases}$$

Eine Constante ist auch hier nicht hinzuzufügen, weil für $x = 0$ auch $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ werden muss. Bezeichnen wir die Verrückungen des freien Endes B ($x = l$) mit $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, so wird

$$66. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \frac{5\,G\,l^2 h}{12\,E\,W} \left[1 + \frac{8}{75}\left(\frac{h}{l}\right)^2 - \frac{13}{175}\left(\frac{h}{l}\right)^4 + \ldots\right], \\ \Delta_1 y = \frac{G\,l^3}{3\,E\,W} \left[1 + \frac{1}{10}\left(\frac{h}{l}\right)^2 - \frac{2}{35}\left(\frac{h}{l}\right)^4 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Bei kleinem h verhält sich $\Delta_1 x : \Delta_1 y = 5\,h : 4\,l$.

§. 300. Formänderung eines kreisförmig gekrümmten Stabes. Den Querschnitt nehmen wir wieder als constant an. Als Lagenänderung der Tangente in einem beliebigen Punkte ergiebt sich nach 26 (§. 289), da $ds = r\,d\varphi$ ist,

Digitized by Google

$$\Delta\varphi = \frac{G\,r^2}{E\,W}\int(\sin\alpha - \sin\varphi)\,d\varphi$$
$$= \frac{G\,r^2}{E\,W}(\varphi\sin\alpha + \cos\varphi + C).$$

Für $\varphi = 0$ muss der festen Einspannung wegen $\Delta\varphi = 0$ werden; mithin $1 + C = 0$, also

$$\Delta\varphi = \frac{G\,r^2}{E\,W}(\varphi\sin\alpha + \cos\varphi - 1).$$

Nach 31 (§. 290) wird nun, da $x = r\sin\varphi$, $y = r(1 - \cos\varphi)$, $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$, $dy = r\sin\varphi\,d\varphi$ ist,

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\int(\varphi\sin\alpha + \cos\varphi - 1)\sin\varphi\,d\varphi, \\ \Delta y = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\int(\varphi\sin\alpha + \cos\varphi - 1)\cos\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

d. i.

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\left[\sin\alpha(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \cos\varphi + C_1\right], \\ \Delta y = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\left[\sin\alpha(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \sin\varphi + C_2\right]. \end{cases}$$

Für $\varphi = 0$ muss $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ werden, daher $0 = 1 + C_1$, $0 = \sin\alpha + C_2$, mithin

67.
$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\left[\sin\alpha(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \cos\varphi - 1\right], \\ \Delta y = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\left[\sin\alpha(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - 1) + \frac{1}{2}(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \sin\varphi\right]. \end{cases}$$

Als Verrückungen des freien Endes B ergeben sich, indem wir $\varphi = \alpha$ setzen,

68.
$$\begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}(1 - \cos\alpha + \alpha\sin\alpha\cos\alpha - \frac{3}{2}\sin^2\alpha), \\ \Delta_1 y = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}(\frac{1}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \alpha\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha). \end{cases}$$

Für den Viertheilkreis $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ wird

69. $$\Delta x = \frac{1}{2}\frac{G\,r^3}{E\,W}, \quad \Delta y = \frac{3\pi - 8}{4}\frac{G\,r}{E\,W}.$$

Die Verwandlung der goniometrischen Funktionen in Reihen giebt

70.
$$\begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{5\,G\,r^3\alpha^4}{24\,E\,W}\left(1 - \dfrac{40}{150}\alpha^2 + \ldots\right), \\ \Delta_1 y = \dfrac{G\,r^3\alpha^3}{3\,E\,W}\left(1 - \dfrac{9}{20}\alpha^2 + \dfrac{13}{168}\alpha^4 - \ldots\right). \end{cases}$$

Setzen wir $r^3 = \frac{l^3}{\sin^3\alpha}$, multipliciren ausserdem den Ausdruck für $\Delta_1 x$ mit $\frac{h}{h} = \frac{h}{l\tan\frac{1}{2}\alpha}$, so ergiebt sich durch abermalige Reihenverwandlung

Digitized by Google

$$71.\quad \begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{5\,G\,l^2 h}{12\,E\,W}\left(1+\dfrac{77}{300}\alpha^2+\ldots\right), \\ \Delta_1 y = \dfrac{G\,l^3}{3\,E\,W}\left(1+\dfrac{1}{20}\alpha^2-\dfrac{1}{168}\alpha^4-\ldots\right). \end{cases}$$

Für $\alpha = 0,\ 30^0,\ 60^0,\ 90^0$ ergiebt sich genau $E\,W\,\Delta_1 x = 0{,}4167\quad 0{,}4270\quad 0{,}4573\quad 0{,}5000 . G\,l^2 h$ und $E\,W\,\Delta_1 y = 0{,}3333\quad 0{,}3376\quad 0{,}3486\quad 0{,}3562 . G\,l^3$, so dass man für alle Winkel zwischen 0 und 90 sehr nahe

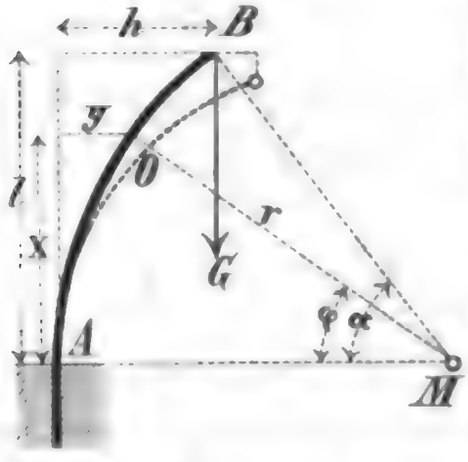
$$72.\quad \Delta_1 x = \frac{5\,G\,l^2 h}{12\,E\,W},\quad \Delta_1 y = \frac{G\,l^3}{3\,E\,W}$$

setzen kann.

Anwendung bei Federn etc.

§. 301. Stab, welcher an einem Ende vertical eingespannt, am anderen vertical belastet ist. Wir nehmen das eingespannte Ende A (Fig. 103) als Coordinatenanfang an und legen die Axe der x vertical, die der y horizontal. Die Länge der Vertical- und Horizontalprojection sei l und h, der Centriwinkel AMB bei kreisförmiger Krümmung $= \alpha$ und das am freien Ende B wirkende Gewicht $= G$. Alsdann ist

Fig. 103.



$$73.\quad \begin{cases} P = -G\cos\varphi, \quad Q = G\sin\varphi; \\ M = G(h-y) = G\,r(\cos\varphi - \cos\alpha). \end{cases}$$

P ist am grössten in A, nämlich $= -G$, am kleinsten in B; Q dagegen ist am grössten in B, nämlich $= G\sin\alpha$ und in A gleich Null. M ist ebenfalls in A am grössten, nämlich $= G\,h = G\,r(1-\cos\alpha)$. Daher wird auch die Faserspannung in A am grössten sein oder der gefährliche Querschnitt in A liegen.

§. 302. Formänderung eines parabolisch gekrümmten Stabes. Wir setzen, wie in §. 299 $y = h\frac{x^2}{l^2}$, $dy = 2\frac{h\,x}{l^2}dx$ und $ds = dx\left(1+2\frac{h^2x^2}{l^4}-2\frac{h^4x^4}{l^8}+\ldots\right)$.

Unter der Voraussetzung eines constanten Querschnittes ergiebt sich als Lagenänderung der Tangente nach 26 (§. 289), wenn wir darin $M = G\,h\left(1-\frac{y}{h}\right) = G\,h\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$ setzen,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{G\,h}{E\,W}\int\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)\left(1+2\frac{h^2x^2}{l^4}-2\frac{h^4x^4}{l^8}+\ldots\right)dx \\ &= \frac{G\,h}{E\,W}\int\left[1-\left(1-2\frac{h^2}{l^2}\right)\frac{x^2}{l^2}-2\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\frac{h^2x^4}{l^6}+\ldots\right]dx \\ &= \frac{G\,h\,x}{E\,W}\left[1-\frac{1}{3}\left(1-2\frac{h^2}{l^2}\right)\frac{x^2}{l^2}-\frac{2}{5}\left(1+\frac{h^2}{l^2}\right)\frac{h^2x^4}{l^6}+\ldots\right]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = 0$ auch $\Delta\varphi = 0$ werden muss. Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergeben sich jetzt nach 31 (§. 290), wenn wir dieselben nach unten und in der positiven Richtung der y als positiv nehmen,

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\,G\,h^2}{E\,W\,l^2}\int x^2\left[1 - \dfrac{1}{3}\left(1 - 2\,\dfrac{h^2}{l^2}\right)\dfrac{x^2}{l^2} + \ldots\right]dx, \\ \Delta y = \dfrac{G\,h}{E\,W}\int x\left[1 - \dfrac{1}{3}\left(1 - 2\,\dfrac{h^2}{l^2}\right)\dfrac{x^2}{l^2} + \ldots\right]dx. \end{cases}$$

Die Ausführung der Integration giebt

$$74.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{2\,G\,h^2 x^3}{3\,E\,W\,l^2}\left[1 - \dfrac{1}{5}\left(1 - 2\,\dfrac{h^2}{l^2}\right)\dfrac{x^2}{l^2} - \dfrac{6}{35}\left(1 + \dfrac{h^2}{l^2}\right)\dfrac{h^2 x^2}{l^4} + \ldots\right], \\ \Delta y = \dfrac{G\,h\,x^2}{2\,E\,W}\left[1 - \dfrac{1}{6}\left(1 - 2\,\dfrac{h^2}{l^2}\right)\dfrac{x^2}{l^2} - \dfrac{2}{15}\left(1 + \dfrac{h^2}{l^2}\right)\dfrac{h^2 x^4}{l^6} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Hiernach sind die Verrückungen $\Delta_1 x$ und $\Delta_1 y$ des freien Endes ($x = l$):

$$75.\quad \begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{8\,G\,l\,h^2}{15\,E\,W}\left[1 + \dfrac{2}{7}\left(\dfrac{h}{l}\right)^2 + \dfrac{13}{21}\left(\dfrac{h}{l}\right)^4 + \ldots\right], \\ \Delta_1 y = \dfrac{5\,G\,l^2 h}{12\,E\,W}\left[1 + \dfrac{6}{25}\left(\dfrac{h}{l}\right)^2 + \dfrac{11}{25}\left(\dfrac{h}{l}\right)^4 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Bei kleinem h verhält sich $\Delta_1 x : \Delta_1 y = 32\,h : 25\,l$, d. i. ebenfalls sehr nahe wie $5\,h : 4\,l$, wie im vorigen Falle.

§. 303. Formänderung eines kreisförmig gekrümmten Stabes.

Unter der Annahme eines constanten Querschnittes wird zunächst nach 26 (§. 289), da $ds = r\,d\varphi$ ist,

$$\Delta\varphi = \frac{G\,r^2}{E\,W}\int(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi$$
$$= \frac{G\,r^2}{E\,W}(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha).$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $\varphi = 0$ auch $\Delta\varphi = 0$ werden muss. Da $x = r\sin\varphi$, $y = r(1 - \cos\varphi)$, $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$, $dy = r\sin\varphi\,d\varphi$ ist, so wird nun nach 31 (§. 290):

$$76.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\int(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha)\sin\varphi\,d\varphi, \\ \Delta y = \dfrac{G\,r^3}{E\,W}\int(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha)\cos\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Die Ausführung der Integration giebt:

$$77.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{G\,r^3}{2\,E\,W}[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - 2\cos\alpha(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)], \\ \Delta y = \dfrac{G\,r^2}{2\,E\,W}[\sin^2\varphi - 2\cos\alpha(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - 1)]. \end{cases}$$

Hierbei sind die Constanten bereits so bestimmt, dass für $\varphi = 0$ auch $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$ wird. Für Δx wird die Constante $= 0$, für Δy

Digitized by Google

aber $= \cos\alpha$. Die Verrückungen $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$ des freien Endes ($\varphi = \alpha$) werden hiernach:

$$78. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{G r^3}{2 E W}(\alpha - 3 \sin\alpha \cos\alpha + 2 \alpha \cos^2\alpha), \\ \Delta_1 y = \dfrac{G r^3}{2 E W}(2 \cos\alpha + 3 \sin^2\alpha - 2 \alpha \sin\alpha \cos\alpha - 2). \end{cases}$$

Für den Viertelkreis ($\alpha = \frac{1}{2}\pi$) wird

$$79. \quad \Delta_1 x = \frac{\pi}{4}\frac{G r^3}{E W}, \quad \Delta_1 y = \frac{1}{2}\frac{G r^3}{E W}.$$

Die Reihenverwandlung giebt:

$$80. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{2 G r^3 \alpha^5}{15 E W}\left(1 - \dfrac{4}{21}\alpha^2 + \ldots\right), \\ \Delta_1 y = \dfrac{5 G r^3 \alpha^4}{24 E W}\left(1 - \dfrac{49}{150}\alpha^2 + \dfrac{107}{560}\alpha^4 - \ldots\right). \end{cases}$$

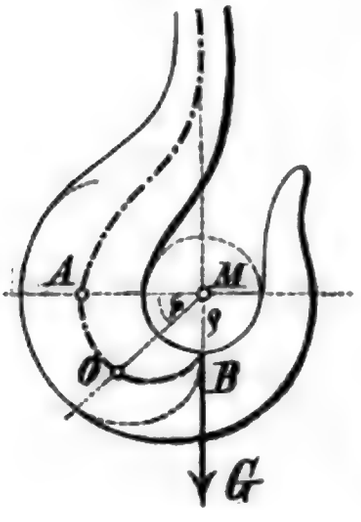
Setzt man in der ersten dieser Formeln $r^3 = r \cdot r^2 = \dfrac{l}{\sin\alpha} \cdot \left(\dfrac{h}{\sin\alpha \cdot \tan\frac{1}{2}\alpha}\right)^2$ $= \dfrac{l h^2}{\sin^3\alpha \tan^2\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{4 l h^2}{\alpha^3}\left(1 + \dfrac{1}{3}\alpha^2 + \dfrac{1}{16}\alpha^4 + \ldots\right)$, und in der zweiten r^3 $= r^2 \cdot r = \left(\dfrac{l}{\sin\alpha}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{\sin\alpha \tan\alpha\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{l^2 h}{\sin^3\alpha \tan\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{2 l^2 h}{\alpha^4}\left(1 + \dfrac{5}{12}\alpha^2 + \dfrac{71}{720}\alpha^4 + \ldots\right)$, so ergiebt sich

$$81. \quad \begin{cases} \Delta_1 x = \dfrac{8 G l h^2}{15 E W}\left(1 + \dfrac{1}{7}\alpha^2 + \ldots\right), \\ \Delta_1 y + \dfrac{5 G l^2 h}{12 E W}\left(1 + \dfrac{9}{100}\alpha^2 + \dfrac{43}{280}\alpha^4 + \ldots\right). \end{cases}$$

Für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0, 90^0 ergiebt sich genau $E W \Delta_1 x = 0{,}5333$, $0{,}5548$, $0{,}6278$, $0{,}7854 \cdot G l h^2$ und $E W \Delta_1 y = 0{,}4167$, $0{,}4370$, $0{,}4573$, $0{,}5000 \cdot G l^2 h$, so dass wir für alle Winkel zwischen 0 und 90^0 sehr nahe setzen können:

$$82. \quad \Delta_1 x = \frac{8}{15}\frac{G l h^2}{E W}, \quad \Delta_1 y = \frac{5}{12}\frac{G l^2 h}{E W}.$$

Fig. 104.



§. 304. Haken. Die Querschnitte des Hakens seien ähnliche Ellipsen mit der Breite b und der Höhe h. Die innere Begrenzung sei ein Kreis mit dem Radius ϱ (Fig. 104). Nahezu werden alle Querschnitte durch den Mittelpunkt M dieses Kreises gehen, was indess nur für den senkrecht zur Richtung der Kraft G stehenden Querschnitt A streng richtig ist. Setzen wir $\angle$ OMA $= \varphi$, so ist

$$P = G \cos\varphi, \quad M = -G(\varrho + \tfrac{1}{2}h)\cos\varphi.$$

Die Festigkeitsbedingung ist nun nach 37 (Seite 278), da hier $a = \frac{1}{2}h$, $e = -(\varrho + \frac{1}{2}h)$ ist:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{4}(K_1, K_2)\,\pi\,b\,h = G\cos\varphi\left[1 \mp 8\,\frac{2\varrho+h}{2\partial} + \frac{3}{2}\,\frac{2\varrho+h}{2r}\right],$$

wobei r der Krümmungsradius der Axe des Hakens ist. K_1 und das obere Zeichen gelten für die äusseren, K_2 und das untere Zeichen für die inneren Fasern. Der rechten Seite zufolge hat die Spannung auf der inneren Seite den grösseren absoluten Werth und zwar findet hier Zug statt. Ist $K = \mathfrak{K}$, so wird daher

$$83.\quad K\,\pi\,b\,h = 2\,G\cos\varphi\,\frac{16\,r\,\varrho + 10\,r\,h + 6\,\varrho\,h + 3\,h^2}{r\,h}.$$

Vorläufig kann man $r = \varrho + \frac{1}{2}h$ setzen. Alsdann wird

$$K\,b\,h^2 = 32\,G\cos\varphi\,\frac{2\varrho^2 + 3\,\varrho\,h + h^2}{2\varrho + h} = 32\,G\,(\varrho + h)\cos\varphi.$$

Bezeichnen wir die Breite und Höhe in A mit b_0, h_0, so ist

$$84.\quad \pi\,K\,b_0\,h_0^2 = 32\,G\,(\varrho + h_0),$$

wonach bei gegebenem Verhältniss zwischen b_0 und h_0 die Höhe h_0 zu bestimmen ist. Die Division der vorigen beiden Gleichungen giebt nun:

$$85.\quad \cos\varphi = \frac{b\,h^2(\varrho + h_0)}{b_0\,h_0^2(\varrho + h)},$$

wonach man am besten für angenommene h die zugehörigen φ bestimmt. Construirt man hiernach den Haken, so kann man aus der Figur r genauer entnehmen und nun die Rechnung nach 83 noch einmal genauer führen.

Ist ∂ die Dicke eines der Kraft G ausgesetzten und auf Zug beanspruchten Stabes mit kreisförmigem Querschnitte, so ist $\frac{1}{4}K\pi\partial^2 = G$; die Division mit dieser Gleichung in die Gleichung 84 giebt

$$86.\quad b_0\,h_0^2 = 8\,(\varrho + h_0)\,\partial^2.$$

Im Querschnitte in B entstehen nur Schubspannungen. Nach 34 (Seite 193) wird für diesen Querschnitt, wenn wir dessen Höhe und Breite mit b_1, h_1 bezeichnen, $3\,\pi\,K\,b_1\,h_1 = 16\,G$. Die Division mit der Gleichung $K\pi\partial^2 = 4\,G$ giebt:

$$87.\quad 3\,b_1\,h_1 = 4\,\partial^2.$$

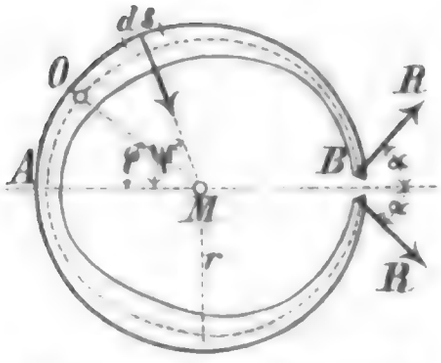
Setzt man z. B. $b = \frac{3}{4}h$, $h_0 = 2\varrho$, so wird nach 84 $\pi\,K\,h_0^3 = 72\,G\,h_0$ oder $h_0 = \sqrt{\frac{72}{\pi}\,\frac{G}{K}} = 4{,}787\,\sqrt{\frac{G}{K}}$ oder nach 87 $h_1 = \partial\sqrt{2} = 1{,}414\,\partial = \frac{1}{3}h_0$ und endlich nach 85 $\cos\varphi = \frac{3\,h^3}{h_0^2(h_0 + 2h)}$. Für $h = 0$ 0,2 0,4 0,6 0,8 0,9 1. h ergiebt sich $\varphi = 90^0$ $89^0 1'$ $83^0 54'$ $72^0 53'$ $54^0 20'$ $38^0 38'$ 0^0; r wird nahezu $0{,}83\,h_0$ anstatt $\varrho + \frac{1}{2}h$.

Anwendung bei Seil- und Kettenhaken etc.

§. 305. Kolbenring. Ein Ring mit rechteckigem Querschnitte (Fig. 105), dessen äussere Fläche einen Kreiscylinder bildet, sei in B aufgeschnitten; hier wirke auf jeden Theil eine Kraft R unter dem Winkel α gegen den Durchmesser AB. Ausserdem wirke auf die äussere Fläche des Ringes senkrecht auf dieselbe ein Druck p pro Flächeneinheit des Ringes. Die Breite b des Ringes, senkrecht zur Ringebene, sei constant.

Digitized by Google

Fig. 105.



Wir stellen uns die Aufgabe, die Dicke δ des Ringes in einem beliebigen Querschnitt O so zu bestimmen, dass die äussere Fläche des Ringes ein Kreiscylinder bleibt.

Der äussere Radius vor der Formänderung sei r und der Winkel $OMA = \varphi$.

Das Moment von R in Beziehung auf O ist $-R\cos\alpha\,.\,(r-\frac{1}{2}\delta)\sin\varphi - R\sin\alpha\,(r-\frac{1}{2}\delta)(1+\cos\varphi) = -R(r-\frac{1}{2}\delta)[\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)]$. Auf die Bogenlänge $ds = r\,d\psi$ wirkt die Kraft $b\,p\,ds = b\,p\,r\,d\psi$ mit dem Momente $b\,p\,r\,d\psi\,.\,(r-\frac{1}{2}\delta)\sin(\psi-\varphi)$; daher ist die Summe der Momente der auf OB wirkenden Normalkräfte $= b\,p\,r\int_{\varphi}^{\alpha}(r-\frac{1}{2}\delta)\sin(\psi-\varphi)\,d\psi$, d. i. wenn wir $\frac{1}{2}\delta$ gegen r als constant annehmen, $b\,p\,r\,(r-\frac{1}{2}\delta)(1-\cos\varphi)$. Demnach ist für den Punkt O, wenn wir $\frac{1}{2}\delta$ gegen r vernachlässigen,

$$M = -R\,r\,[\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)] + b\,p\,r^2(1+\cos\varphi).$$

Ist nun ϱ der Radius nach der Formänderung, so ist nach 27 (Seite 275):

$$E\,W\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\varrho}\right) = -R\,r\,[\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)] + b\,p\,r^2(1+\cos\varphi).$$

Setzen wir hierin $W = \frac{1}{12}\,b\,\delta^3$ und reduciren auf δ, so ergiebt sich

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{12\,r\,\varrho}{E\,(r-\varrho)}\left[R\,r\,(\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)) - b\,p\,r^2\,(1+\cos\varphi)\right]}.$$

Setzen wir für $\varphi = 0$ $\delta = \delta_0$, so wird

$$88.\quad \delta_0 = \sqrt[3]{\frac{24\,r\,\varrho}{E\,(r-\varrho)}\,[R\,r\sin\alpha - b\,p\,r^2]},$$

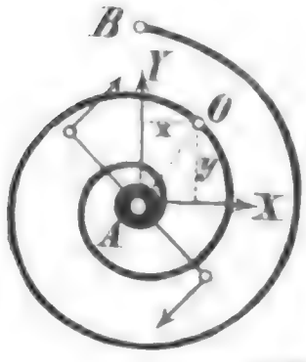
also

$$89.\quad \frac{\delta}{\delta_0} = \sqrt[3]{\frac{R\,[\sin\alpha-\sin(\alpha+\varphi)] - b\,p\,r\,(1+\cos\varphi)}{2\,(R\sin\alpha - b\,p\,r)}}.$$

Anwendung bei Kolbenliederungsringen.

§. 306. Spiralfeder. Die Spiralfeder sei mit einem um seine Axe drehbaren Cylinder A (Fig. 106) verbunden und am äusseren Ende B beliebig befestigt. Auf den Cylinder A mögen in Richtung der durch seine Mitte gelegten Coordinatenaxen die Kräfte X, Y und ein Kräftepaar mit dem Momente M_0 wirken. Alsdann ist das Moment in Beziehung auf den beliebigen Punkt O der Spirale:

Fig. 106.



$$M = M_0 + X\,y - Y\,x.$$

Nach 26 (Seite 274) wird bei constantem Querschnitte die Aenderung des Winkels der Normalen in O mit der Axe der x:

$$E\,W\,\Delta\varphi = \int(M_0 + X\,y - Y\,x)\,ds.$$

Digitized by Google

Wir setzen sehr dichte Windungen voraus; alsdann können wir vor wie nach der Formänderung die Normale mit dem Radius vector OA zusammenfallend annehmen. Bezeichnen wir die Anomalie OAX mit ψ, ihre Aenderung mit $\Delta\psi$, so ist demnach $\psi = \varphi$, $\Delta\psi = \Delta\varphi$, mithin auch für die Verdrehung des Radius vector AO:

$$E\,W\,\Delta\psi = \int (M_0 + X\,y - Y\,x)\,ds.$$

Bezeichnen wir ferner die Bogenlänge des Spiralstückes von A bis O mit s, die Coordinaten des Schwerpunktes dieses Stückes mit ξ, η, so ist $\int ds = s$, $\int x\,ds = s\,\xi$, $\int y\,ds = s\,\eta$, mithin

$$E\,W\,\Delta\psi = (M_0 + X\,\eta - Y\,\xi)\,s + C.$$

Die ganze Länge der Feder sei b, die Coordinaten des Schwerpunktes derselben ξ_1, η_1. Für $s = l$ muss $\Delta\psi = 0$ werden, daher $0 = (M_0 + X\,\eta_1 - Y\,\xi_1)\,l + C$, mithin

$$90.\quad \Delta\psi = -\frac{M_0\,(l-s) + X\,(\eta_1\,l - \eta\,s) - Y\,(\xi_1\,l - \eta\,s)}{E\,W}.$$

Ist $\Delta_0\psi$ die Verdrehung des Cylinders A ($s = 0$), so wird

$$91.\quad \Delta_0\psi = -\frac{M_0 + X\,\eta_1 - Y\,\xi_1}{E\,W}\,l.$$

Da wir sehr dichte Windungen voraussetzen, so fällt der Schwerpunkt der ganzen Spirale fast genau in das Centrum A; es ist also sehr nahe $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, mithin sehr einfach:

$$92.\quad \Delta_0\psi = -\frac{M_0\,l}{E\,W}.$$

Die Verdrehung ist hiernach proportional dem verdrehenden Momente und der Länge der Spirale.

Anwendung bei Spiralfedern für Schwungradhemmungen und als Uhrmotoren.

XXXV. Kapitel.

Bogenträger mit Kämpfergelenken im Allgemeinen.

§. 307. Einleitung. Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass die Bogenenden oder die Kämpfer um Gelenke oder Charniere drehbar seien, deren Axe durch die Schwerpunkte der Endquerschnitte gehen. Alsdann gehen auch die Drücke, welche die Widerlager auf den Bogen ausüben, und welche wir Kämpferdrücke nennen, durch die Schwerpunkte der Endquerschnitte. Als äussere Kräfte treten die Lasten und die Kämpferdrücke auf; die ersteren setzen wir als vertical wirkend voraus. Die Horizontalcomponenten der Kämpferdrücke müssen alsdann, damit der ganze Bogen im Gleichgewichte ist, gleich sein; wir nennen diese Horizontalcomponenten den Horizontalschub.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

D, D′ die in den Enden A, B (Fig. 107) wirkenden Kämpferdrücke;

V, V′ die Verticalcomponenten derselben;

H die Horizontalcomponente derselben oder den Horizontalschub;

Digitized by Google

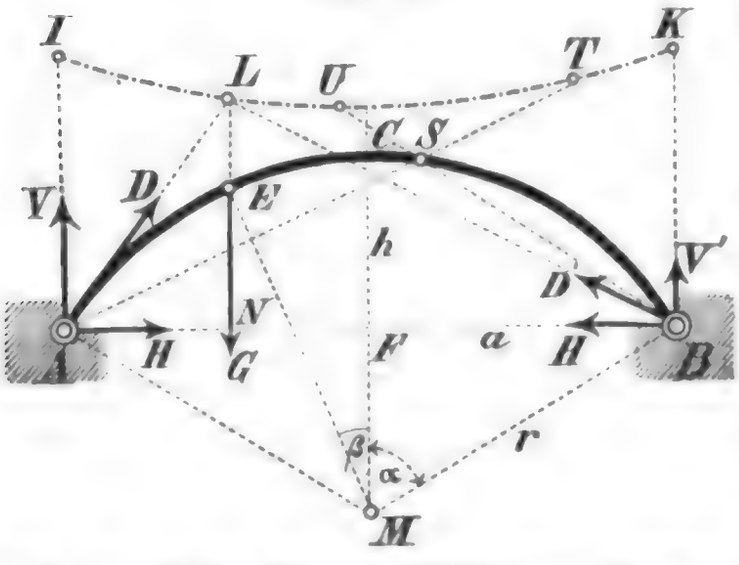
a die halbe Spannweite;
h die Bogen- oder Stichhöhe;
α den halben Centriwinkel des Bogens, falls derselbe kreisförmig ist.
Den Coordinatenanfang legen wir durch den obersten Punkt oder den Scheitel und zwar die Axe der x horizontal, die der y vertical. Der Winkel, welchen die Tangente im beliebigen Punkte O mit der Axe der x oder der Krümmungsradius mit der Axe der y bildet, sei φ.

Anwendung findet die zu gebende Theorie bei allen Bogenträgern im Hoch- und Brückenbaue.

A. Einfluss einer isolirten Last.

§. 308. Die äusseren Kräfte im Allgemeinen. Wir setzen jetzt voraus, dass eine einzige isolirte Last G im beliebigen Punkte E (Fig. 107) wirksam sei. Der Horizontalabstand FN der Last vom Scheitel sei $= \xi$, der entsprechende Centriwinkel CME $= \beta$. Die Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Bogen sind alsdann:

Fig. 107.



$$V + V' = G,$$
$$V a - V' a - G \xi = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$93. \quad \begin{cases} V = G \dfrac{a + \xi}{2a}, \\ V' = G \dfrac{a - \xi}{2a} \end{cases}$$

und im Falle eines kreisförmigen Bogens, da alsdann $a = r \sin\alpha$, $\xi = r \sin\beta$ ist

$$94. \quad V = G \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2 \sin\alpha}, \quad V' = G \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{2 \sin\alpha}.$$

Wir bezeichnen innerhalb der Strecke AE Alles ohne Apostroph, innerhalb der Strecke BE Alles mit Apostroph, z. B. P, P'; M, M' etc. Für einen beliebigen Punkt O ergiebt sich leicht, je nachdem derselbe innerhalb der Strecke AE oder BE liegt:

$$95. \quad \begin{cases} P = -H \cos\varphi - V \sin\varphi, & P' = -H \cos\varphi + V' \sin\varphi, \\ Q = -H \sin\varphi + V \cos\varphi, & Q' = -H \sin\varphi - V' \cos\varphi; \end{cases}$$

$$96. \quad M = H(h - y) - V(a - x), \quad M' = H(h - y) - V'(a + x).$$

Im Falle eines kreisförmigen Bogens wird auch, da $a = r \sin\alpha$, $h = r(1 - \cos\alpha)$, $x = r \sin\varphi$, $y = r(1 - \cos\varphi)$ ist,

$$97. \quad \begin{cases} M = H r (\cos\varphi - \cos\alpha) - V r (\sin\alpha - \sin\varphi), \\ M' = H r (\cos\varphi - \cos\alpha) - V' r (\sin\alpha + \sin\varphi). \end{cases}$$

Digitized by Google

Mit Benutzung der Figur erhält man P, Q am besten durch Zerlegung von D oder D′ nach Richtung der Tangente und des Radius, sowie das Moment M durch numerische oder graphische Multiplication von D oder D′ mit dem Abstande dieser Kämpferdrücke von dem betreffenden Punkte. Innerhalb der Strecke AE ist D, innerhalb der Strecke BE dagegen D′ zu benutzen. In den Punkten, in welchen die Bogenaxe von den Richtungen der Kämpferdrücke geschnitten wird, ist $M = 0$.

Hat man auch noch die Kernlinien (siehe §. 288) construirt, so ist es leicht, nach 22 (§. 288) die Spannung in den gespanntesten Fasern zu bestimmen. Als Kraft R tritt hier für Querschnitte innerhalb AE die Kraft D, für Querschnitte innerhalb BE die Kraft D′ auf.

§. 309. Kämpferdrucklinie. Die Richtungen der Kämpferdrücke D, D′ und der Last G schneiden sich in ein und demselben Punkte L (Fig. 107), da sonst der Bogen, auf welchen nur die drei Kräfte D, D′, G wirken, nicht im Gleichgewicht wäre.

Bei veränderlicher Lage der Last G beschreibt der Durchschnittspunkt L eine Linie JLK, welche wir die Kämpferdrucklinie nennen und deren Gestalt in der Folge bestimmt werden soll. Ist dieselbe construirt, so ist es leicht, für eine gegebene Lage der Last G die Kämpferdrücke D, D′ zu construiren, indem man die Richtung von G bis zum Durchschnitt L mit der Kämpferdrucklinie verlängert. G nach L verlegt und hier nach Richtung von LA und LB in zwei Componenten zerlegt, welche die gewünschten Kämpferdrücke sind.

Mit Hilfe der Kämpferdrucklinie ist es ferner sehr leicht, das Vorzeichen des Momentes zu bestimmen, was in manchen Fällen, namentlich zur Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise, von Wichtigkeit ist. Handelt es sich z. B. um den Querschnitt S, so ziehe man durch S eine Gerade nach den Kämpfern A, B, deren Verlängerung die Kämpferdrucklinie in T und U schneide. Liegt die Last G nun zwischen T und S, so geht D links bei S vorbei, M krümmt also den Bogen nach aussen; liegt G zwischen S und U, so geht D′ rechts bei S vorbei, krümmt also den Bogen ebenfalls nach aussen. Liegt dagegen die Last links von T, so geht D rechts bei S vorbei, krümmt also den Bogen nach innen etc. Nehmen wir nach aussen und innen krümmende Momente bezüglich als positiv und negativ, so erzeugen hiernach alle Lasten, welche zwischen U und T liegen, in S ein positives Moment; alle innerhalb JU und TR liegenden Lasten dagegen in S ein negatives Moment.

Sind die Kernlinien vorhanden, so kann man in gleicher Weise leicht bestimmen, ob die Spannung der gespanntesten Fasern ein Zug oder Druck ist. Handelt es sich z. B. um die obern Fasern, so zieht man durch den Durchschnittspunkt S_2 des Querschnittes in S mit der untern Kernlinie oder durch den untern Kernpunkt nach A und B Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in T_2, U_2 schneiden mögen. Wie vorhin lässt sich leicht nachweisen, dass jede Last, welche innerhalb U_2T_2 liegt, in den obern Fasern einen Druck, jede Last, welche innerhalb JU_2 oder T_2K liegt, in den obern Fasern einen Zug erzeugt.

Für die untern Fasern zieht man durch den obern Kernpunkt S_1 nach A und B Gerade, welche die Kämpferdrucklinie in T_1, U_1 schneiden mögen. Alle Lasten, welche innerhalb U_1T_1 liegen, erzeugen in den

Digitized by Google

untern Fasern einen Zug, alle Lasten, welche innerhalb JU_1, T_1K liegen, einen Druck.

Hiernach ist es sehr leicht, die gefährlichste Lage der Last bei Belastung einer Brücke durch Eisenbahnzüge etc. zu bestimmen. Die Spannung wird offenbar am grössten, wenn nur alle diejenigen Stellen belastet sind, deren Belastung in dem betreffenden Querschnitte auf der fraglichen Seite desselben entweder einen Druck oder Zug (bei den Brücken fast stets einen Druck) erzeugt. Man kann aber auch leicht die grössten Spannungen selbst construiren. Weitere Erörterungen gehören mehr in den Brückenbau.

§. 310. Beanspruchung durch eine isolirte Last. P wird zum Maximum in denjenigen Punkten des Bogens, für welche die Tangente parallel zu den Kämpferdrücken ist. Für diese Punkte wird aber auch gleichzeitig M zum analytischen Maximum; hier muss also auch die Spannung der gespanntesten Faser ein analytisches Maximum werden. Zum wirklichen Maximum kann aber die Spannung der gespanntesten Faser auch für den Angriffspunkt E der Last werden, da sich hier das Gesetz für P und M ändert. Der gefährliche Querschnitt liegt also bei constantem Querschnitte entweder in den Punkten, für welche die Tangente parallel zu AC, BC ist, oder in E. Wir bezeichnen für diese drei Punkte Alles bezüglich durch den Index 1, 2, 3. P hat für einen Querschnitt, welcher dicht links und rechts neben E liegt, einen andern Werth; derselbe sei bezüglich P_3, P'_3. Alsdann wird

$$\tan\varphi_1 = \frac{V}{H}, \quad \tan\varphi_2 = \frac{V'}{H}, \quad \varphi_3 = \beta.$$

Ist die Axe des Bogens eine Parabel, deren Scheitel im Scheitel des Bogens liegt, so ist $y = \frac{h}{a^2}x^2$, $\tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{2h}{a^2}x$. Dies in die vorigen Gleichungen eingesetzt, giebt

$$x_1 = \frac{V a^2}{2 H h}, \quad x_2 = -\frac{V' a^2}{2 H h}, \quad x_3 = \xi;$$

$$y_1 = \frac{V^2 a^2}{4 H^2 h}, \quad y_2 = \frac{V'^2 a^2}{4 H^2 h}, \quad y_3 = \frac{h\xi^2}{a^2}.$$

Nach 95 und 96 wird nun,

$$98. \quad \begin{cases} P_1 = -\sqrt{V^2 + H^2}, \quad P_2 = -\sqrt{V'^2 + H^2}, \\ P_3 = -V\sin\beta - H\cos\beta = -\dfrac{H a^2 + 2 V h \xi}{\sqrt{a^4 + 4 h^2 \xi^2}}, \\ P'_3 = -V'\sin\beta + H\cos\beta = -\dfrac{H a^2 - 2 V' h \xi}{\sqrt{a^4 + 4 h^2 \xi^2}}. \end{cases}$$

$$99. \quad \begin{cases} M_1 = r\sqrt{V^2 + H^2} + V r \sin\alpha - H r \cos\alpha = \dfrac{V^2 a^2}{4 H h} - V a + H h, \\ M_2 = r\sqrt{V'^2 + H^2} - V' r \sin\alpha - H r \cos\alpha = \dfrac{V'^2 a^2}{4 H h} - V' a + H h, \\ M_3 = H r(\cos\beta - \cos\alpha) - V r(\sin\alpha - \sin\beta) = H h\left(1 - \dfrac{\xi^2}{a^2}\right) - V(a - \xi). \end{cases}$$

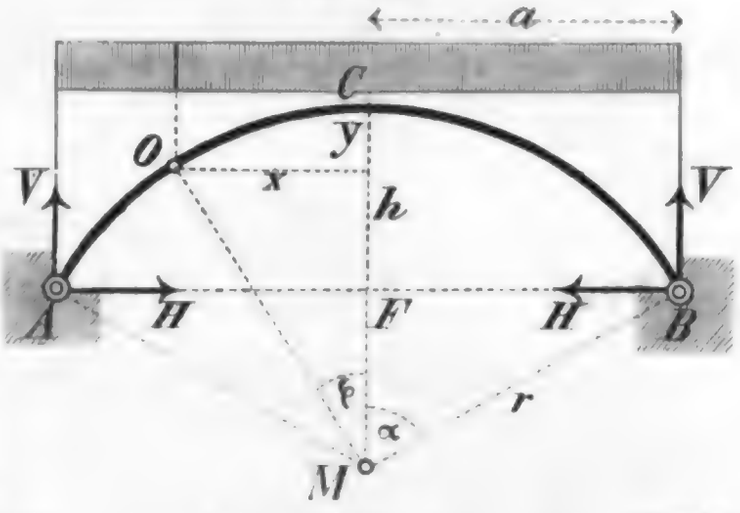
Die Ausdrücke für P_1, P_2 und die ersten Ausdrücke für P_3 gelten allge-

mein, die ersten Ausdrücke für M nur für den Kreisbogen; die zweiten Ausdrücke für P_3 und M aber nur für die Parabel.

Liegt, wie wir voraussetzen, die Last auf der linken Bogenhälfte, so ist $V > V'$, also $P_1 > P_2$; ausserdem ist $P_3 > P'_3$, wenn wir nur den absoluten Werth im Auge haben. M_1 und M_2 ergeben sich stets positiv oder den Bogen nach einwärts krümmend; M_3 dagegen negativ oder den Bogen nach auswärts krümmend. Unter Umständen kann aber $x_1 > a$ ausfallen, so dass alsdann P_1 und M_1 keine Bedeutung haben.

§. 311. Einfluss einer gleichmässigen Belastung. Wir wollen im Folgenden die beiden Fälle in Betracht ziehen, dass die Last gleichmässig über der Horizontalprojection und gleichmässig über die Bogenlänge vertheilt sei. Die Last pro Längeneinheit sei bezüglich q und g.

Fig. 108.



a) Die Last ist gleichmässig über die Horizontalprojection vertheilt. Die Last zwischen A und einem beliebigen Punkte O (Fig. 108) ist $= q(a - x)$, daher ist $P = -H\cos\varphi - V\sin\varphi + q(a-x)\sin\varphi$. $Q = -H\sin\varphi + V\cos\varphi - q(a-x)\cos\varphi$, $M = H(h-y) - V(a-x) + \frac{1}{2}q(a-x)^2$. Hier ist V gleich der halben Last, also $V = qa$. Daher wird

$$100.\quad \begin{cases} P = -H\cos\varphi - q\,x\sin\varphi, \\ Q = -H\sin\varphi + q\,x\cos\varphi, \\ M = H(h-y) - \frac{1}{2}q(a^2 - x^2). \end{cases}$$

Für den Kreisbogen wird $x = r\sin\varphi$, $y = r(1-\cos\varphi)$, $a = r\sin\alpha$, $h = r(1-\cos\alpha)$, mithin

$$101.\quad \begin{cases} P = -H\cos\varphi - q\,r\sin^2\varphi, \\ Q = -H\sin\varphi + q\,r\sin\varphi\cos\varphi, \\ M = H(\cos\varphi - \cos\alpha) - \frac{1}{2}q\,r^2(\sin^2\alpha - \sin^2\varphi). \end{cases}$$

Nach 3 (Seite 269) wird M zum Maximum, wenn $Q = 0$ ist, also für $\varphi = 0$ oder für $\cos\varphi = \frac{H}{qr}$ und zwar wird, wenn wir die entsprechenden M mit M_0 und M_1 bezeichnen,

$$102.\quad \begin{cases} M_0 = H(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}q\,r^2\sin^2\alpha, \\ M_1 = \frac{H^2}{2q} - H\,r\cos\alpha + \frac{1}{2}q\,r^2\cos^2\alpha. \end{cases}$$

P dagegen wird für $\cos\varphi = \frac{H}{2qr}$ zum analytischen Maximum, zum wirklichen aber meist für $\varphi = \alpha$, da für flache Bögen das φ, welches die vorige Gleichung giebt, $> \alpha$ ist.

Digitized by Google

b) Die Last ist gleichmässig über den Bogen vertheilt. Die Last zwischen A und einem beliebigen Punkte O ist g . AO, d. i. für den Kreisbogen $= g\,r\,(\alpha - \varphi)$. Daher ist $P = -H\cos\varphi - V\sin\varphi + g\,r\,(\alpha - \varphi)\cos\varphi$. Auf ein Bogenelement mit dem Centriwinkel $d\psi$ wirkt die Last $g\,r\,d\psi$, daher ist das Moment der zwischen A und O liegenden Last in Beziehung auf $O = \int_{\varphi}^{\psi} g\,r\,d\psi\,.\,r\,(\sin\psi - \sin\varphi) = -g\,r^2[(\alpha - \varphi)\sin\varphi + \cos\alpha - \cos\varphi]$, also $M = H\,(h - y) - V\,(a - x) - g\,r^2[(\alpha - \varphi)\sin\varphi + \cos\alpha - \cos\varphi]$. Daher wird, wenn wir noch $V = g\,r\,\alpha$ setzen,

$$103.\quad \begin{cases} P = -H\cos\varphi - g\,r\,\varphi\sin\varphi, \\ Q = -H\sin\varphi + g\,r\,\varphi\cos\varphi, \\ M = (H + g\,r)\,r\,(\cos\varphi - \cos\alpha) - g\,r^2\,(\alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi). \end{cases}$$

Zur weiteren Behandlung wird die Bestimmung des Horizontalschubes H nöthig, wozu wir die folgenden Fälle unterscheiden wollen.

XXXVI. Kapitel.

Bogen mit Kämpfer- und Scheitelgelenken.

§. 312. Kämpferdrucklinie. Ausser den beiden Kämpfergelenken sei auch noch ein Gelenk in der horizontalen Schweraxe C des Scheitelquerschnittes, ein Scheitelgelenk, vorhanden. Alsdann muss die auf jede Bogenhälfte wirkende Kraft durch C gehen. Setzen wir in Formel 96 das Moment M′ für den Scheitel ($x = 0$, $y = 0$) gleich Null, indem wir voraussetzen, dass die Last G in der linken Bogenhälfte AC liege, so giebt die Reduction auf H: $H = V'\frac{a}{h}$, oder, wenn wir für V′ den Werth 93 einsetzen,

$$104.\quad H = G\,\frac{a - \xi}{2\,h}.$$

Liegt die Last links von C, so wirkt auf die rechte Bogenhälfte nur der Kämpferdruck D′, dessen Richtung nach dem Gesagten durch C gehen muss. Der Durchschnittspunkt L der Kämpferdrücke liegt also in der Verlängerung von BC. Hieraus folgt: dass die Kämpferdrucklinie aus zwei Geraden besteht, welche durch den Scheitel und durch die Kämpfer gehen (Tafel XII. Fig. 1).

Ferner lässt sich leicht nachweisen, dass die Endpunkte der den Stützendruck repräsentirenden Geraden bei veränderlicher Lage der Last auf zwei zu AC und BC parallelen Geraden liegen (Taf. XII. Fig. 2). Hiernach wird die Construction äusserst einfach.

§. 313. Formänderung eines parabolischen Bogens durch eine isolirte Last. Wir setzen

$$y = \frac{h}{a^2}x^2, \quad dy = \frac{2\,h}{a^2}x^2$$

und annähernd $ds = dx$.

Digitized by Google

a) Lagenänderung der Tangente. Nach der Näherungsformel 26 (Seite 274) wird für einen Punkt innerhalb der Strecke AE, wenn wir für M den ersten der Ausdrücke 96 einsetzen,

$$E\,W\,\Delta\varphi = \int\left[H\,h\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - V\,(a-x)\right]dx.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} E\,W\,\Delta\varphi &= H\,h\,x\left(1-\frac{x^2}{3\,a^2}\right) - V\,a\,x\left(1-\frac{x}{2\,a}\right) + A,\\ E\,W\,\Delta\varphi' &= H\,h\,x\left(1-\frac{x^2}{3\,a^2}\right) - V'a\,x\left(1+\frac{x}{2\,a}\right) + A',\\ E\,W\,\Delta\varphi'' &= H\,h\,x\left(1-\frac{x^2}{3\,a^2}\right) - V'a\,x\left(1+\frac{x}{2\,a}\right) + A''. \end{aligned}\right.$$

Die zweite und dritte Gleichung ergeben sich in gleicher Weise für die Strecken EC und CB, wenn man für M den zweiten der Ausdrücke 96 einsetzt. In beiden Strecken bleibt zwar das Gesetz für M dasselbe; es liegt indess kein Grund vor, dass auch die Integrationsconstante dieselbe sei. Für den Punkt E, also für $x = \xi$, wird $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$, also $V\,a\,\xi\left(1-\frac{\xi}{2a}\right) + A = V'a\,\xi\left(1+\frac{\xi}{2a}\right) + A'$, mithin $A - A' = (V - V')\,a\,\xi - \frac{1}{2}(V + V')\,\xi$.

Da $V + V' = G$ und nach 93 $V - V' = G\frac{\xi}{a}$ ist, so wird:

$$\text{I.}\quad A - A' = \tfrac{1}{2}\,G\,\xi^2.$$

b) Horizontale Verrückung. Nach der Näherungsformel 31 (Seite 276) wird nun für einen Punkt innerhalb der Strecke AC:

$$E\,W\,\Delta x = -\frac{2\,h}{a^2}\int\left[H\,h\,x\left(1-\frac{x^2}{3\,a^2}\right) - V\,a\,x\left(1-\frac{x}{2\,a}\right) + A\right]x\,dx.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der Gleichungen:

105.
$$\left\{\begin{aligned} E\,W\,\Delta x &= -\frac{2\,h}{a^2}\left[\frac{1}{3}H\,h\,x^3\left(1-\frac{x^2}{5\,a^2}\right) - \frac{1}{3}V\,a\,x^3\left(1-\frac{3\,x}{8\,a}\right) + \frac{1}{2}A\,x^2 + B\right],\\ E\,W\,\Delta x' &= -\frac{2\,h}{a^2}\left[\frac{1}{3}H\,h\,x^3\left(1-\frac{x^2}{5\,a^2}\right) - \frac{1}{3}V'a\,x^3\left(1+\frac{3\,x}{8\,a}\right) + \frac{1}{2}A'x^2 + B'\right],\\ E\,W\,\Delta x'' &= -\frac{2\,h}{a^2}\left[\frac{1}{3}H\,h\,x^3\left(1-\frac{x^2}{5\,a^2}\right) - \frac{1}{3}V'a\,x^3\left(1+\frac{3\,x}{8\,a}\right) + \frac{1}{2}A''x^2 + B''\right]. \end{aligned}\right.$$

Die zweite und dritte Gleichung ergeben sich in gleicher Weise für die Strecken EC und CB. Für $x = \xi$ wird $\Delta x = \Delta x'$, mithin $B - B' = \frac{1}{3}(V - V')\,a\,\xi^3 - \frac{1}{8}(V + V')\,\xi^4 - \frac{1}{2}(A - A')\,\xi^2$, d. i.

$$\text{II.}\quad B - B' = -\tfrac{1}{24}\,G\,\xi^4.$$

Für den Scheitel, also für $x = 0$, wird $\Delta x' = \Delta x''$, also

$$\text{III.}\quad B' = B''.$$

Für den Kämpfer A, also für $x = a$ wird $\Delta x = 0$ und für den Kämpfer B, also für $x = -a$ wird $\Delta x'' = 0$, mithin, wenn wir B' für B'' setzen,

$$\tfrac{4}{15}\,H\,a^3h - \tfrac{5}{24}\,V\,a^4 + \tfrac{1}{2}\,A\,a^2 + B = 0,$$
$$-\tfrac{4}{15}\,H\,a^3h + \tfrac{5}{24}\,V'a^4 + \tfrac{1}{2}\,A''a^2 + B' = 0.$$

Digitized by Google

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt, wenn man $V + V' = G$, $(V - V')\,a = G\,\xi$ setzt,

$$\text{IV.}\quad \tfrac{5}{24}\,G\,a^3\xi - \tfrac{1}{2}\,(A + A'')\,a^2 - (B + B') = 0.$$

$$\text{V.}\quad \tfrac{5}{15}\,H\,a^3 h - \tfrac{1}{24}\,G\,(5\,a^4 + \xi^4) + \tfrac{1}{2}\,(A - A'')\,a^2 = 0.$$

c) Verticale Verrückung. Nach der Näherungsformel 31 (Seite 276) wird ferner für einen Punkt innerhalb der Strecke AC

$$E\,W\,\Delta y = \int \left[H\,h\,x\left(1 - \frac{x^2}{3\,a^2}\right) - V\,a\,x\left(1 - \frac{x}{2\,x}\right) + A\right] dx.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

$$106.\quad \begin{cases} E\,W\,\Delta y = \frac{1}{2}\,H\,h\,x^2\left(1 - \frac{x^2}{6\,a^2}\right) - \frac{1}{2}\,V\,a\,x^2\left(1 - \frac{x}{3\,a}\right) + A\,x + C, \\ E\,W\,\Delta y' = \frac{1}{2}\,H\,h\,x^2\left(1 - \frac{x^2}{6\,a^2}\right) - \frac{1}{2}\,V'a\,x^2\left(1 + \frac{x}{3\,a}\right) + A'x + C', \\ E\,W\,\Delta y'' = \frac{1}{2}\,H\,h\,x^2\left(1 - \frac{x^2}{6\,a^2}\right) - \frac{1}{2}\,V'a\,x^2\left(1 + \frac{x}{3\,a}\right) + A''x + C''. \end{cases}$$

Für $x = \xi$ wird $\Delta y = \Delta y'$, daher $C - C' = \frac{1}{2}\,(V - V')\,a\,\xi^2 - \frac{1}{6}\,(V + V')\,\xi^3 - (A - A')\,\xi$, d. i.

$$\text{VI.}\quad C - C' = -\tfrac{1}{6}\,G\,\xi^3.$$

Für $x = 0$ muss $\Delta y' = \Delta y''$ werden, mithin

$$\text{VII.}\quad C' = C''.$$

Endlich wird für $x = a$ $\Delta y = 0$ und für $x = -a$ $\Delta y'' = 0$, mithin

$$\tfrac{5}{12}\,H\,a^2 h - \tfrac{1}{3}\,V\,a^2 + A\,a + C = 0,$$
$$\tfrac{5}{12}\,H\,a^2 h - \tfrac{1}{3}\,V'a^3 - A''a + C' = 0.$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt:

$$\text{VIII.}\quad \tfrac{5}{6}\,H\,a^2 h - \tfrac{1}{3}\,G\,a^3 + (A - A'')\,a + (C + C') = 0,$$

$$\text{IX.}\quad \tfrac{1}{6}\,G\,\xi\,(2\,a^2 + \xi^2) - (A + A'')\,a = 0.$$

d) Bestimmung der Constanten. Durch die neun Gleichungen I bis IX sind die neun Constanten A, A', A'', B, B', B'', C, C', C'', bestimmt. Zunächst ergiebt sich aus Gleichung V und IX

$$a.\quad \begin{cases} A = -\frac{8}{15}\,H\,a\,h + \frac{1}{24}\,G\,\frac{5\,a^4 + 4\,a^3\xi + 2\,a\,\xi^3 + \xi^4}{a^2}, \\ A'' = +\frac{8}{15}\,H\,a\,h - \frac{1}{24}\,G\,\frac{5\,a^4 - 4\,a^3\xi - 2\,a\,\xi^3 + \xi^4}{a^2}, \end{cases}$$

d. i. nach Einsetzung des Ausdruckes 104 für H

$$107.\quad \begin{cases} A = -G\,\frac{7\,a^4 - 52\,a^3\xi - 10\,a\,\xi^3 - 5\,\xi^4}{120\,a^2}, \\ A'' = +G\,\frac{7\,a^4 - 12\,a^3\xi + 10\,a\,\xi^3 - 5\,\xi^4}{120\,a^2}. \end{cases}$$

Nach I wird nun

$$A' = -G\,\frac{7\,a^4 - 52\,a^3\xi + 60\,a^2\xi^2 - 10\,a\,\xi^3 - 5\,\xi^4}{120\,a^2}.$$

Aus II, IV, IX und III folgt ferner leicht

Digitized by Google

$$108.\quad \begin{cases} B = \frac{1}{48} G\,\xi\,(a^3 - 2\,a\,\xi^2 - \xi^3), \\ B' = B'' = \frac{1}{48} G\,\xi\,(a^3 - 2\,a\,\xi^2 + \xi^3). \end{cases}$$

Endlich geben die Gleichungen VI, VIII, VII und V

$$b.\quad \begin{cases} C = \frac{7}{60} H\,a^2 h - \frac{G}{24\,a}\left(a^4 + 2\,a\,\xi^3 + \xi^4\right), \\ C' = C'' = \frac{7}{60} H\,a^2 h - \frac{G}{24\,a}\left(a^4 + 2\,a\,\xi^3 + \xi^4\right), \end{cases}$$

d. i. nach Einsetzung des Ausdruckes von H:

$$109.\quad \begin{cases} C = G\,\frac{2\,a^4 - 7\,a^3\xi - 10\,a\,\xi^3 - 5\,\xi^4}{120\,a}, \\ C' = C'' = G\,\frac{2\,a^4 - 7\,a^3\xi + 10\,a\,\xi^3 - 5\,\xi^4}{120\,a}. \end{cases}$$

Somit ist nun die Formänderung vollständig bestimmt. Wir wollen diese Formeln speciell auf die Verrückung des Scheitels anwenden.

e) Verrückung des Scheitels. Als Verrückungen $\Delta_0 x$, $\Delta_0 y$ des Scheitels ergeben sich, wenn wir in den Ausdrücken für $\Delta x'$, $\Delta y'$ $x = 0$ setzen, $\Delta_0 x = -\frac{2\,B'\,h}{a^2}$, $\Delta_0 y = C'$, d. i.

$$110.\quad \begin{cases} \Delta_0 x = -\frac{1}{24}\,\frac{G}{E\,W}\,\frac{h\,\xi\,(a^3 - 2\,a\,\xi^3 + \xi^3)}{a^2}, \\ \Delta_0 y = +\frac{1}{120}\,\frac{G}{E\,W}\,\frac{2\,a^4 - 7\,a^3\xi + 10\,a\,\xi^3 - 5\,\xi^4}{a}. \end{cases}$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

ξ	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$	ξ	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$
0	0	0,01667	0,5	0,01302	— 0,00469
0,1	0,00409	+ 0,01091	0,6	0,01240	— 0,00573
0,2	0,00773	+ 0,00560	0,7	0,01059	— 0,00559
0,3	0,01059	+ 0,00108	0,8	0,00773	— 0,00440
0,328	0,01121	0	0,9	0,00409	— 0,00242
0,4	0,01240	— 0,00240	1,0	0	0
. a	$\cdot -\frac{G\,a^2 h}{E\,W}$	$\cdot \frac{G\,a^3}{E\,W}$	. a	$\cdot -\frac{G\,a^2 h}{E\,W}$	$\cdot \frac{G\,a^3}{E\,W}$

Die grösste verticale Verrückung tritt ein, wenn die Last im Scheitel liegt. Die grösste horizontale Verrückung tritt ein für $\xi = \frac{1}{2}\,a$. Die Maxima selbst sind

$$111.\quad \max \Delta_0 x = -\frac{5\,G\,a^2 h}{384\,E\,W},\quad \max \Delta_0 y = \frac{G\,a^3}{60\,E\,W}.$$

Die Vergleichung mit 37 (Seite 85) zeigt, dass die grösste Senkung $\frac{1}{10}$ von der Senkung eines gleich starken geraden Stabes ist, welcher an den Enden auf Stützen ruht und in der Mitte belastet ist.

Alle Lasten, welche zwischen $x = 0{,}328\,a$ und $x = -0{,}328\,a$ liegen,

erzeugen eine Senkung des Scheitels; Lasten, welche an anderen Stellen liegen, aber eine Hebung desselben.

Hiernach ist es leicht, die für die Verrückung ungünstigste Belastungsweise bei Brücken zu bestimmen.

§. 314. Formänderung eines kreisförmigen Bogens durch eine isolirte Last.

a) Längenänderung. Nach 7 Seite 270 wird, wenn wir für P, M die Ausdrücke 95 und 97 setzen

$$112. \quad \begin{cases} E F \frac{\Delta ds}{ds} = -H \cos\alpha - V \sin\alpha, \\ E F \frac{\Delta ds'}{ds} = -H \cos\alpha - V' \sin\alpha. \end{cases}$$

Die relative Längenänderung ist also innerhalb jedes der Theile AE, BE constant. Setzen wir für H, V, V' die Ausdrücke 104 und 94, so ergiebt sich:

$$113. \quad \begin{cases} E F \frac{\Delta ds}{ds} = -G \frac{\sin\alpha + \sin\beta - 2\cos\alpha \sin\beta}{2(1-\cos\alpha)}, \\ E F \frac{\Delta ds'}{ds} = -G \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{2(1-\cos\alpha)}. \end{cases}$$

b) Lagenänderung der Tangente. Nach 25 (Seite 274) wird, wenn wir $\mathfrak{W} = W$ und mit Rücksicht darauf, dass Δds constant ist, $\Delta s = \int d\Delta s = \int \frac{\Delta ds}{ds} ds = \frac{\Delta ds}{ds} s = \frac{\Delta ds}{ds} r\varphi$ setzen,

$$\Delta\varphi = \frac{r^2}{E W} \int \left[H(\cos\varphi - \cos\alpha) - V(\sin\alpha - \sin\varphi) \right] d\varphi + \frac{\Delta ds}{ds} \varphi$$

$$= \frac{r^2}{E W} \left[H(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha) - V(\varphi\sin\alpha + \cos\varphi) \right] - \frac{1}{E F}(H\cos\alpha + V\sin\alpha)\varphi + A.$$

Die Ausführung der Integration giebt, wenn wir zur Abkürzung $\frac{W}{F r^2} = \varkappa$ setzen, die erste der folgenden Gleichungen:

$$E W \Delta\varphi = r^2[H(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha) - V(\varphi\sin\alpha + \cos\varphi)] - \varkappa r^2(H\cos\alpha + V\sin\alpha)\varphi + A$$
$$E W \Delta\varphi' = r^2[H(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha) - V'(\varphi\sin\alpha - \cos\varphi)] - \varkappa r^2(H\cos\alpha + V'\sin\alpha)\varphi + A'$$
$$E W \Delta\varphi'' = r^2[H(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha) - V'(\varphi\sin\alpha - \cos\varphi)] - \varkappa r^2(H\cos\alpha + V'\sin\alpha)\varphi + A''$$

Die zweite und dritte Gleichung ergiebt sich in gleicher Weise für die Strecken EC und CB. Für den Punkt E, d. i. für $\varphi = \beta$, wird $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$, also $-V r^2(\beta\sin\alpha + \cos\beta) - \varkappa V r^2\beta\sin\alpha + A = -V' r^2(\beta\sin\alpha - \cos\beta) - \varkappa V' r^2\beta\sin\alpha + A'$, also $A - A' = (V - V') r^2\beta\sin\alpha + (V + V') r^2\cos\beta + \varkappa(V - V') r^2\beta\sin\alpha$. Nun aber ist $V + V' = G$ und nach 94 $V - V' = G\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, mithin wird

$$I. \quad A - A' = G r^2[\cos\beta + (1+\varkappa)\beta\sin\beta].$$

c) Horizontale Verrückung. Nach 29 (Seite 276) wird nun, da $x = r\sin\varphi$, $y = r(1-\cos\varphi)$, $dx = r\cos\varphi\, d\varphi$, $dy = r\sin\varphi\, d\varphi$ ist,

Digitized by Google

$$E\,W\,\Delta x = -r\int\left[H\,r^2(\sin\varphi-\varphi\cos\alpha)-V\,r^2(\varphi\sin\alpha+\cos\varphi)\right.$$
$$\left.-\varkappa\,r^2(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\,\varphi+A\right]\sin\varphi\,d\varphi-\varkappa\,r^2\int(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

114.
$$\left\{\begin{aligned}
E\,W\,\Delta x &= -r^3\left[H\left(\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi+\varphi\cos\alpha\cos\varphi\right)\right.\\
&\quad\left.-V\left(\sin\alpha\sin\varphi-\varphi\sin\alpha\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right]\\
&\quad-\varkappa\,r^3(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\,\varphi\cos\varphi-A\,r\,(1-\cos\varphi)+B,\\
E\,W\,\Delta x' &= -r^3\left[H\left(\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi+\varphi\cos\alpha\cos\varphi\right)\right.\\
&\quad\left.-V'\left(\sin\alpha\sin\varphi-\varphi\sin\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right]\\
&\quad-\varkappa\,r^3(H\cos\alpha+V'\sin\alpha)\,\varphi\cos\varphi-A'\,r\,(1-\cos\varphi)+B',\\
E\,W\,\Delta x'' &= -r^3\left[H\left(\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi+\varphi\cos\alpha\cos\varphi\right)\right.\\
&\quad\left.-V'\left(\sin\alpha\sin\varphi-\varphi\sin\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\right]\\
&\quad-\varkappa\,r^3(H\cos\alpha+V'\sin\alpha)\,\varphi\cos\varphi-A''\,r\,(1-\cos\varphi)+B''.
\end{aligned}\right.$$

Als Constanten sind hierbei $-Ar+B$ etc. angenommen, damit B etc. den Werth von $EW\Delta x$ etc. für $\varphi=0$ bedeuten.

Für $\varphi=\beta$ muss $\Delta x=\Delta x'$ werden. Daher $V\,r^3(\sin\alpha\sin\beta-\beta\sin\alpha\cos\beta+\tfrac{1}{2}\sin^2\beta)-A\,r\,(1-\cos\beta)+B-\varkappa\,r^2\,V\,\beta\sin\alpha\cos\beta = V'\,r^3(\sin\alpha\sin\beta-\beta\sin\alpha\cos\beta-\tfrac{1}{2}\sin^2\beta)-A'\,r\,(1-\cos\beta)+B'-\varkappa\,r^3\,V'\,\beta\sin\alpha\cos\beta$, also $B-B'=-(V-V')\,r^3\sin\alpha\,(\sin\beta-\beta\cos\beta)-\tfrac{1}{2}(V+V')\,r^3\sin^2\beta+\varkappa\,(V-V')\,r^3\beta\sin\alpha\cos\beta+(A-A')\,r\,(1-\cos\beta)$, d. i.

II. $$B-B'=-\tfrac{1}{2}\,G\,r^3(2+\sin^2\beta-2\cos\beta-2\beta\sin\beta)+\varkappa\,G\,r^3\beta\sin\beta.$$

Für den Scheitel, also für $\varphi=0$, wird $\Delta x'=\Delta x''$, mithin

III. $$B'=B''.$$

Für den Kämpfer A oder für $\varphi=\alpha$ wird $\Delta x=0$ und für den Kämpfer B oder für $\varphi=-\alpha$ wird $\Delta x''=0$, d. i.

$$-\tfrac{1}{2}\,H\,r^3(\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2\alpha\cos^2\alpha)+\tfrac{1}{2}\,V\,r^3(3\sin^2\alpha-2\alpha\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$-\varkappa\,r^3(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\,\alpha\cos\alpha-A\,r\,(1-\cos\alpha)+B=0,$$
$$+\tfrac{1}{2}\,H\,r^3(\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2\alpha\cos^2\alpha)-\tfrac{1}{2}\,V'\,r^3(3\sin^2\alpha-2\alpha\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$+\varkappa\,r^3(H\cos\alpha+V'\sin\alpha)\,\alpha\cos\alpha-A''\,r\,(1-\cos\alpha)+B''=0.$$

Die Subtraction und Addition dieser Gleichungen giebt, wenn man $V+V'=G$ und $(V-V')\sin\alpha=G\sin\beta$ setzt,

IV. $$H\,r^2(\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+2\alpha\cos^2\alpha)-\tfrac{1}{2}\,G\,r^2(3\sin^2\alpha-2\alpha\sin\alpha\cos\alpha-2-\sin^2\beta+2\cos\beta+2\beta\sin\beta)+\varkappa\,r^2[2\,H\,\alpha\cos^2\alpha+G\,(\alpha\sin\alpha\cos\alpha-\beta\sin\beta)]+(A-A'')\,(1-\cos\alpha)=0,$$

V. $$\tfrac{1}{2}\,G\,r^3\sin\beta\,(3\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha)-(A+A'')\,r\,(1-\cos\alpha)-\varkappa\,G\,r^3\alpha\cos\alpha\sin\beta+B+B'=0.$$

d) Verticale Verrückung. Nach 29 (Seite 276) wird

$$E\,W\,\Delta y = r\int\left[H\,r^2(\sin\varphi-\varphi\cos\alpha)-V\,r^2(\varphi\sin\alpha+\cos\varphi)\right.$$
$$\left.-\varkappa\,r^2(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\,\varphi+A\right]\cos\varphi\,d\varphi-\varkappa\,r^2\int(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Die Ausführung der Integration giebt die erste der folgenden Gleichungen:

115.
$$\left\{\begin{aligned}
E\,W\,\Delta y &= r^3\left[H\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi+\cos\alpha-\cos\alpha\cos\varphi-\varphi\cos\alpha\sin\varphi\right)\right.\\
&\quad\left.-V\left(\sin\alpha\cos\varphi-\sin\alpha+\varphi\sin\alpha\sin\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\right]\\
&\quad-\varkappa\,r^3(H\cos\alpha+V\sin\alpha)\,\varphi\sin\varphi+A\,r\sin\varphi+C,
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

115.
$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{E\,W}\,\Delta y' &= \mathrm{r^3}\Big[\mathrm{H}\,(\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi + \cos\alpha - \cos\alpha\cos\varphi - \varphi\cos\alpha\sin\varphi)\\
&\quad - \mathrm{V'}\,(\sin\alpha\cos\varphi - \sin\alpha + \varphi\sin\alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi)\Big]\\
&\quad - \varkappa\,\mathrm{r^3}\,(\mathrm{H}\cos\alpha + \mathrm{V'}\sin\alpha)\,\varphi\sin\varphi + \mathrm{A'\,r}\sin\varphi + \mathrm{C'},\\
\mathrm{E\,W}\,\Delta y'' &= \mathrm{r^3}\Big[\mathrm{H}\,(\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi + \cos\alpha - \cos\alpha\cos\varphi - \varphi\cos\alpha\sin\varphi)\\
&\quad - \mathrm{V'}\,(\sin\alpha\cos\varphi - \sin\alpha + \varphi\sin\alpha\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi)\Big]\\
&\quad - \varkappa\,\mathrm{r^3}\,(\mathrm{H}\cos\alpha + \mathrm{V'}\sin\alpha)\,\varphi\sin\varphi + \mathrm{A''\,r}\sin\varphi + \mathrm{C''}.
\end{aligned}\right.$$

Die Constanten sind zu $\mathrm{H\,r^3}\cos\alpha + \mathrm{V\,r^3}\sin\alpha + \mathrm{C}$ etc. angenommen, damit C etc. die Werthe von $\mathrm{E\,W}\,\Delta y$ etc für $\varphi = 0$ bedeuten.

Für $\varphi = \beta$ muss $\Delta y = \Delta y'$ werden, also $-\mathrm{V\,r^3}(\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha + \beta\sin\alpha\sin\beta + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta) - \varkappa\,\mathrm{V\,r^3}\,\beta\sin\alpha\sin\beta + \mathrm{A\,r}\sin\beta + \mathrm{C} = -\mathrm{V'\,r^3}(\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha + \beta\sin\alpha\sin\beta - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta) - \varkappa\,\mathrm{V'\,r^3}\,\beta\sin\alpha\sin\beta + \mathrm{A'\,r}\sin\beta + \mathrm{C''}$, mithin $\mathrm{C} - \mathrm{C'} = (\mathrm{V} - \mathrm{V'})\,\mathrm{r^3}\sin\alpha\,(1 - \cos\beta - \beta\sin\beta) + \frac{1}{2}(\mathrm{V} + \mathrm{V'})\,\mathrm{r^3}(\beta + \sin\beta\cos\beta) + \varkappa\,(\mathrm{V} - \mathrm{V'})\,\mathrm{r^3}\,\beta\sin\alpha\sin\beta - (\mathrm{A} - \mathrm{A'})\,\mathrm{r}\sin\beta$, d. i.

VI. $$\mathrm{C} - \mathrm{C'} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G\,r^3}(\beta + \sin\beta\cos\beta - 2\sin\beta).$$

Für $\varphi = 0$ wird $\Delta y' = \Delta y''$, daher

VII. $$\mathrm{C'} = \mathrm{C''}.$$

Endlich wird für $\varphi = \alpha$ $\Delta y = 0$ und für $\varphi = -\alpha$ $\Delta y'' = 0$, daher

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H\,r^3}(3\sin^2\alpha - 2 + 2\cos\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{V\,r^3}(\alpha - 2\sin\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha) - \varkappa\,\mathrm{r^3}\,(\mathrm{H}\cos\alpha + \mathrm{V}\sin\alpha)\,\alpha\sin\alpha + \mathrm{A\,r}\sin\alpha + \mathrm{C} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H\,r^3}(3\sin^2\alpha - 2 + 2\cos\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{V'\,r^3}(\alpha - 2\sin\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha) - \varkappa\,\mathrm{r^3}\,(\mathrm{H}\cos\alpha + \mathrm{V'}\sin\alpha)\,\alpha\sin\alpha - \mathrm{A''\,r}\sin\alpha + \mathrm{C''} = 0.$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen giebt:

VIII. $$\mathrm{H\,r^3}(3\sin^2\alpha - 2 + 2\cos\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G\,r^3}(\alpha - 2\sin\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha) - \varkappa\,\mathrm{r^3}\,(2\,\mathrm{H}\cos\alpha + \mathrm{G}\sin\alpha)\,\alpha\sin\alpha + (\mathrm{A} - \mathrm{A''})\,\mathrm{r}\sin\alpha + \mathrm{C} + \mathrm{C''} = 0.$$

IX. $$(\mathrm{A} + \mathrm{A''})\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{G\,r^2}\,[\alpha\sin\beta - \beta\sin\alpha + \sin\alpha\sin\beta\,(2\alpha\sin\alpha + 3\cos\alpha - \cos\beta)] + \varkappa\,\mathrm{G\,r^2}\,\alpha\sin^2\alpha\sin\beta.$$

Die neun Constanten lassen sich genau in derselben Weise bestimmen, wie im vorigen §. Wir begnügen uns hier, die Verrückungen des Scheitels zu specialisiren. Für denselben ergiebt sich $\mathrm{E\,W}\,\Delta_0 x = \mathrm{B'}$, $\mathrm{E\,W}\,\Delta_0 y = \mathrm{C'}$, d. i. nach gehöriger Reduction

116.
$$\left\{\begin{aligned}
\Delta_0 x &= \frac{\mathrm{G\,r^3}(1-\cos\alpha)}{4\,\mathrm{E\,W}\sin^2\alpha}\Big[2\,(1+\cos\alpha)\,(\alpha-\beta)\sin\beta + (\alpha\sin\beta - \beta\sin\alpha)\\
&\quad + 2\,[1 + \cos\alpha - \cos\beta - \cos(\alpha-\beta)]\\
&\quad - \big\{\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha-\beta)\big\}\sin\beta\Big] + \frac{\varkappa\,\mathrm{G\,r^3}}{2\,\mathrm{E\,W}}\,(\alpha-\beta)\sin\beta,\\
\Delta_0 y &= \frac{\mathrm{H\,r^3}}{2\,\mathrm{E\,W}\,(1-\cos\alpha)}\Big[4 - 4\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 5\sin^2\alpha + 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha\Big]\\
&\quad - \frac{\mathrm{G\,r^3}}{4\,\mathrm{E\,W}\,(1-\cos\alpha)}\Big[(1-\cos\alpha)(2\sin\alpha - 2\sin\beta - \alpha + \beta) + \sin(\alpha-\beta)\cos\beta\\
&\quad - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta - 2\sin\alpha\,(\cos\alpha - \cos\beta + \alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta)\Big]\\
&\quad + \frac{\varkappa\,\mathrm{r^3}\sin\alpha}{2\,\mathrm{E\,W}\,(1-\cos\alpha)}\Big[2\,\mathrm{H}\,\alpha\cos\alpha + \mathrm{G}\,(\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta)\Big].
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Wenn die Last im Scheitel liegt ($\beta = 0$), so ergiebt sich durch Einsetzung des Ausdruckes für H nach 104

$$117.\quad \Delta_1 y = \frac{G\,r^3(2\,\alpha + \alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha)}{2\,E\,W\,(1-\cos\alpha)} + \frac{\varkappa\,G\,r^3\alpha\sin^2\alpha}{2\,E\,W\,(1-\cos\alpha)^2}.$$

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet.

β	$\Delta_0 x$				$\Delta_0 y$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0	0	0	0	+ 0,01667	+ 0,01933	+ 0,02528	+ 0,07080
0,2	0,0077	0,0086	0,0120	0,0212	+ 0,00560	+ 0,00649	+ 0,01142	+ 0,02903
0,4	0,0124	0,0138	0,0183	0,0271	− 0,00240	− 0,00237	− 0,00195	+ 0,00206
0,6	0,0124	0,0133	0,0172	0,0197	− 0,00573	− 0,00568	− 0,00687	− 0,00614
0,8	0,0077	0,0082	0,0092	0,0065	− 0,00440	− 0,00457	− 0,00485	− 0,00302
1	0	0	0	0	0	0	0	0
. α	. $-\frac{G\,a^2h}{E\,W}$				. $\frac{G\,a^3}{E\,W}$			

Für $\alpha = 0,\ 30^0,\ 60^0,\ 90^0$ wird $\Delta_0 y = 0$ bezüglich für $\beta = 0{,}33,\ 0{,}35,\ 0{,}38,\ 0{,}45\,.\,\alpha$. Die Glieder mit $\varkappa$, welche sich in jedem speciellen Falle leicht berechnen lassen, sind in der Tabelle vernachlässigt.

Die gemeinschaftlichen Factoren der Coefficienten der in der Folge aufgestellten Tabellen sind immer so gewählt, dass die Coefficienten bei verschiedenen Centriwinkeln möglichst gleich ausfallen, um eine Interpolation für andere Centriwinkel möglich zu machen; z. B. hier $\frac{G\,a^2h}{E\,W}$ statt $\frac{G\,r^3}{E\,W}$.

§. 315. Gleichmässige Belastung.

a) Gleichmässig über die Horizontalprojection vertheilte Belastung. Im Scheitel ist das Moment Null; setzen wir daher in dem Ausdrucke 100 (Seite 297) für $x = 0$ und $y = 0$ auch $M = 0$, so ergiebt sich

$$118.\quad H = \frac{q\,a^2}{2\,h} = \tfrac{1}{2}\,q\,r\,(1+\cos\alpha) = q\,r\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Für kleine Winkel ist also nahezu $H = q\,r$. Die Einsetzung in die Ausdrücke 101 (Seite 297) giebt:

$$119.\quad \begin{cases} P = -\,q\,r\,(\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos\varphi + \sin^2\varphi), \\ Q = -\,q\,r\,(\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \cos\varphi)\sin\varphi; \end{cases}$$

$$120.\quad M = \tfrac{1}{2}\,q\,r^2(1-\cos\varphi)\,(\cos\varphi - \cos\alpha)$$
$$= 2\,q\,r^2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\varphi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\varphi)\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Auf Tafel XI ist in Fig. 3 P, Q, M für $\alpha = 60^0$ dargestellt. Die Verwandlung in Reihen giebt als Näherungsformeln für kleine Winkel:

$$121.\quad \begin{cases} P = -\,q\,r\,(1 - \tfrac{1}{4}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \ldots), \\ Q = +\,\tfrac{1}{4}\,q\,r\,\varphi\,(\alpha^2 - 2\,\varphi^2 + \tfrac{1}{12}\alpha^4 - \tfrac{1}{6}\varphi^4 + \ldots); \end{cases}$$

$$122.\quad M = \tfrac{1}{8}\,q\,r^2(\alpha^2 - \varphi^2)\,\varphi^2(1 - \tfrac{1}{12}\alpha^2 + \ldots).$$

Digitized by Google

P ist nahezu constant. Am kleinsten ist P im Scheitel. Es wird zum analytischen Maximum für $\cos\varphi = \frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}\alpha$ und zwar ist

$$123.\quad \max P = -q\,r\,(1 + \tfrac{1}{4}\cos^4\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Wenn aber $\cos\alpha > \frac{1}{3}$ oder $\alpha > 70^0 32'$ ist, so wird das entsprechende φ grösser als α, so dass das analytische Maximum keine Bedeutung hat. Alsdann wird P zum Maximum für $\varphi = \alpha$ und zwar ist

$$124.\quad \max P = -\tfrac{1}{2}\,q\,r\,(2 + \cos\alpha - \cos^2\alpha).$$

Q ist im Scheitel $= 0$; es wird zum analytischen Maximum für $\cos\varphi = \cos^2\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{2} + \cos^4\frac{1}{2}\alpha}$, bei kleinen Winkeln für $\varphi = \sqrt{\frac{1}{6}}\,\alpha = 0{,}408\,\alpha$; zum wirklichen Maximum indess stets am Kämpfer und zwar ist

$$125.\quad \max Q = -2\,q\,r\sin^3\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha = -2\,q\,a\,\frac{h^2}{a^2 + h^2}.$$

M ist stets positiv, d. h. der Bogen wird einwärts gekrümmt. Zum Maximum wird M, wenn $Q = 0$ wird, d. i. für $\cos\varphi = \cos^2\frac{1}{2}\alpha$ und zwar ist

$$126.\quad \max M = \tfrac{1}{2}\,q\,r^2\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{8}\,q\,h^2.$$

Das grösste Moment ist also ebenso gross, wie bei einem geraden, an den Enden auf Stützen ruhenden und gleichmässig belasteten Stabe, dessen Länge gleich der Bogenhöhe h ist. Für diesen Querschnitt wird genau $P = -q\,r$.

Der Abstand e der Stützlinie von der Axe ist nach §. 287 $e = \frac{M}{P}$. Der Winkel, für welchen e zum Maximum wird, ist durch eine cubische Gleichung bestimmt. Da aber P nahezu constant ist, so wird e nahezu gleichzeitig mit M zum Maximum. Da hier $M = \frac{1}{2}\,q\,r^2\sin^4\frac{1}{2}\alpha$, $P = -q\,r$ ist, so wird nahezu

$$127.\quad \max e = \tfrac{1}{2}\,r\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{h^3}{4\,(a^2 + h^2)}.$$

Auf Taf. XI ist in Fig. 4 die Stützlinie für $\alpha = 90^0$ dargestellt. Die folgende Tabelle enthält die hauptsächlichsten Grössen für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0 und 90^0.

α	H	max P	max Q	max M	φ für $Q = 0$	max e
0	1,0000	1,0000	1,0000	0,125	0,707	0,250
30	0,9330	1,0580	0,9330	0,125	0,703	0,233
60	0,7500	1,1250	0,7500	0,125	0,690	0,188
90	0,5000	1,0625	0,5000	0,125	0,667	0,125
Gr.	$\cdot\,q\,r$	$\cdot -q\,r$	$\cdot\,q\,\frac{h^2}{a}$	$\cdot\,q\,h^2$	$\cdot\,\alpha$	$\cdot\,\frac{h^3}{a^2}$

b) Gleichmässig über die Bogenaxe vertheilte Last. Setzen wir in dem Ausdrucke 103 (Seite 298) für den Scheitel oder für $\varphi = 0$ $M = 0$, so ergiebt sich als Horizontalschub

$$128.\quad H = g\,r\left(\frac{\alpha\sin\alpha}{1 - \cos a} - 1\right) = g\,r\left(\alpha\cot\tfrac{1}{2}\alpha - 1\right).$$

Digitized by Google

Die Einsetzung in die Ausdrücke 103 giebt

$$129.\quad \begin{cases} P = -g r (\alpha \cot \frac{1}{2}\alpha \cos\varphi - \cos\varphi + \varphi \sin\varphi), \\ Q = -g r (\alpha \cot \frac{1}{2}\alpha \sin\varphi - \sin\varphi - \varphi \cos\varphi); \end{cases}$$

$$130.\quad M = \frac{g r^2}{1 - \cos\alpha} (\alpha \sin\alpha \cos\varphi - \varphi \cos\alpha \sin\varphi - \alpha \sin\alpha + \varphi \sin\varphi).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformeln:

$$131.\quad \begin{cases} P = -g r (1 - \frac{1}{6}\alpha^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots), \\ Q = +\frac{1}{6} g r \varphi (\alpha^2 - 2\varphi^2 + \frac{1}{60}\alpha^4 - \frac{1}{6}\alpha^2\varphi^2 + \frac{1}{5}\varphi^4 + \ldots); \end{cases}$$

$$132.\quad M = \frac{1}{12} g r^2 \varphi^2 (\alpha^2 - \varphi^2) (1 + \frac{1}{60}\alpha^2 - \frac{1}{15}\varphi^2 + \ldots).$$

P ist stets im Scheitel am kleinsten, an den Kämpfern am grössten und zwar ist

$$133.\quad \max P = -\frac{g r}{1 - \cos\alpha} (\alpha \sin\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha).$$

Q ist im Scheitel $= 0$; es wird stets zum wirklichen Maximum in den Kämpfern; dasselbe ist

$$134.\quad \max Q = -g r (\alpha - \sin\alpha).$$

M ist auch hier an allen Stellen positiv; es wird zum Maximum oder Q wird $= 0$ für $\alpha \sin\alpha \sin\varphi = (1 - \cos\alpha)(\sin\varphi + \varphi \cos\varphi)$; bei kleinen Winkeln annähernd für $\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\,\alpha$ und es ist in diesem Falle $\max M = \frac{1}{48} g r^2 \alpha^4 = \frac{1}{12} g h^2$, so dass sich die grössten Momente im vorigen und in diesem Falle unter gleichen Umständen wie 3 : 2 verhalten.

Die wichtigsten Grössen sind für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0 und 90^0 in folgender Tabelle zusammengestellt.

α	H	max P	max Q	max M	φ für $Q = 0$	max e
0	1,0000	1,0000	0,6667	0,0833	0,707	0,167
30	0,9541	1,0881	0,6574	0,0868	0,703	0,158
60	0,8141	1,3138	0,6276	0,0992	0,700	0,136
90	0,5708	1,5708	0,5708	0,1221	0,692	0,100
Gr.	$. g r$	$. -g r$	$. g \frac{h^2}{\pi}$	$. g h^2$	$. \alpha$	$. \frac{h^2}{a^2}$

§. 316. Formänderung bei gleichmässiger Belastung.

Die Formänderung lässt sich leicht in der in §. 314 befolgten Weise ermitteln. Hier treten aber nur drei Constante auf, nämlich je eine bei Bestimmung von $\Delta\varphi$, Δx und Δy. Diese Constanten lassen sich leicht durch die Bedingungen bestimmen, dass im Scheitel der Symmetrie wegen $\Delta x = 0$ und an den Kämpfern sowohl $\Delta x = 0$, als $\Delta y = 0$ werden muss. Wir begnügen uns hier, die für die Senkung $\Delta_0 y$ des Scheitels erhaltenen Resultate anzuführen.

a) Gleichmässig über die Horizontalprojection vertheilte Last.

Digitized by Google

$$135.\quad \Delta_0 y = \frac{q\,r^4}{12\,E\,W}\left[3\,\alpha\cot\tfrac{1}{2}\alpha\,(2+3\cos\alpha)-(11+19\cos\alpha-2\sin^2\alpha)\right] + \frac{q\,r^2}{4\,E\,F}\cot\tfrac{1}{2}\alpha\,(3\,\alpha+2\,\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck für kleine Winkel:

$$136.\quad \Delta_0 y = \frac{11}{3360}\frac{q\,r^4\alpha^6}{E\,W}+\frac{2\,q\,r^2}{E\,F} = \frac{11}{840}\frac{q\,a^2h^2}{E\,W}+\frac{q\,a^4}{2\,E\,F\,h^2}.$$

b) Gleichmässig über die Bogenlänge vertheilte Belastung.

$$137.\quad \Delta_0 y = \frac{g\,r^4}{4\,E\,W\,(1-\cos\alpha)}\left[(7+5\cos\alpha)\,\alpha^2-3\sin^2\alpha-9\,\alpha\sin\alpha\right] + \frac{g\,r^2}{E\,F\,(1-\cos\alpha)}\left[(1+\cos\alpha)\,\alpha^2-\sin^2\alpha\right].$$

Für kleine Winkel giebt die Reihenverwandlung als Näherungsausdruck

$$138.\quad \Delta_0 y = \frac{3}{1120}\frac{g\,r^4\alpha^6}{E\,W}+\frac{2\,g\,r^2}{E\,F} = \frac{3}{280}\frac{g\,a^2h^2}{E\,W}+\frac{g\,a^4}{2\,E\,F\,h^2}.$$

Die Senkungen im vorigen und in diesem Falle verhalten sich unter gleichen Umständen wie 11 : 9. Bei gleicher Spannweite nimmt mit wachsender Stichhöhe h das erste Glied zu, das zweite dagegen ab.

Nach den Formeln 135 und 137 ist die folgende Tabelle für $\Delta_0 y$ berechnet.

α	Gleichmässige Belastung der Horizontalprojection		Gleichmässige Belastung der Bogenlänge	
	I. Glied	II. Glied	I. Glied	II. Glied
0	0,01310	0,500	0,01071	0,500
10	0,01330	0,506	0,01074	0,507
20	0,01392	0,521	0,01085	0,526
30	0,01458	0,548	0,01102	0,561
40	0,01571	0,588	0,01126	0,613
50	0,01750	0,645	0,01223	0,689
60	0,01993	0,723	0,01552	0,796
90	0,03540	0,178	0,03366	1,468
Gr.	$\frac{q\,a^2h^2}{E\,W}$	$\frac{q\,a^4}{E\,F\,h^2}$	$\frac{g\,a^2h^2}{E\,W}$	$\frac{g\,a^4}{E\,F\,h^2}$

Das Verhältniss des ersten zum zweiten Gliede ist im Mittel aus beiden Fällen $F\,h^4 : 42\,W\,a^2$. Beim idealen I-förmigen Querschnitt mit gleichen Gurtquerschnitten f und der Höhe n a ist $F = 2\,f$, $W = \frac{1}{6} f n^2 a^2$, also das Verhältniss $h^4 : 10\,n^2 a^4 = (1-\cos\alpha)^4 : 10\,n^2\sin^4\alpha = 1 : 10\,n^2\cot^4\frac{1}{2}\alpha$. Das zweite Glied, welches

von der Längenänderung der Axe herrührt, wird also verhältnissmässig um so grösser, je kleiner der Centriwinkel oder je kleiner bei derselben Spannweite die Stichhöhe und je grösser die Höhe des Querschnittes ist. Für $n = \frac{1}{20}$ wird das Verhältniss $1 : 0{,}025 \cot^4 \frac{1}{2}\alpha$. Bei den in der Tabelle enthaltenen Winkeln ist das zweite Glied $= \infty$, 427 25.8 4,85 1,39 0,53 0,23 0,03 des ersten Gliedes, so dass die Längenänderung der Axe bei kleinen Winkeln einen nicht unbedeutenden Einfluss hat.

XXXVII. Kapitel.

Bogen mit Kämpfergelenken, aber ohne Scheitelgelenk.

A. Isolirte Last, flacher Parabelbogen und constanter Querschnitt.

§. 317. Horizontalschub. Direkt findet man den Horizontalschub, indem man H als vorläufig unbestimmt einführt, wie in §. 313, und die Ausdrücke für $\Delta\varphi$ und Δx aufstellt. Für $x = FN = \xi$ (Figur 109) wird $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$, $\Delta x = \Delta x'$, wodurch die Differenz $A - A'$, $B - B'$ der Constanten bestimmt ist. Für $x = a$ wird $\Delta x = 0$ und für $x = -a$ wird $\Delta x' = 0$; subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so kommen die Constanten nur noch in den Differenzen $A - A'$, $B - B'$ vor, deren Einsetzung aus den vorigen Gleichungen eine Gleichung für H liefert.

Die in §. 313 gewonnenen Resultate lassen sich aber auch hier direkt anwenden; nur ist hier $A' = A''$, $B' = B''$, $C' = C''$ zu setzen. Setzen wir in der Gleichung V. für $A - A'$ den Werth I. ein, so ergiebt sich $\frac{8}{15} H a^3 h - \frac{1}{2} G (5 a^4 - 6 a^2 \xi^2 + \xi^4) = 0$, also

$$139. \quad H = \frac{5}{64} G \frac{5 a^4 - 6 a^2 \xi^2 + \xi^4}{a^3 h} = \frac{5}{64} G \frac{(5 a^2 - \xi^2)(a^2 - \xi^2)}{a^3 h}.$$

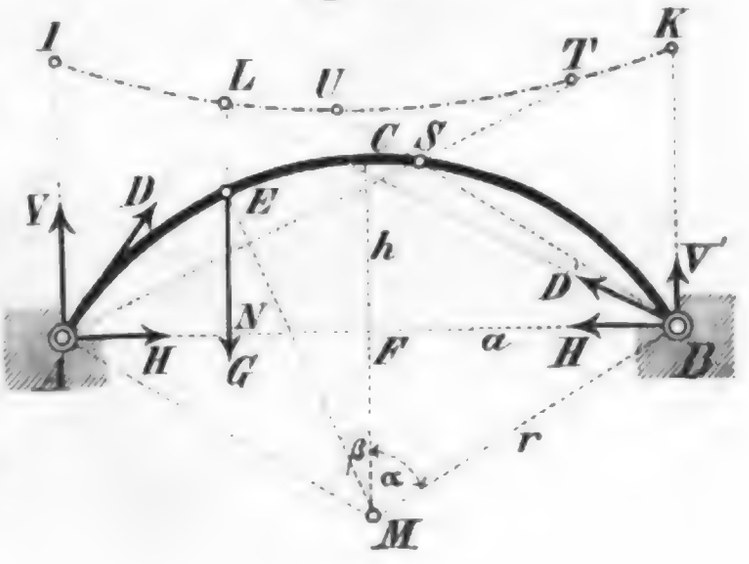
H wird am grössten, wenn die Last im Scheitel liegt, und zwar ist alsdann $H = \frac{25}{64} G \frac{a}{h}$.

§. 318. Kämpferdrucklinie. Die Ordinate NL (Fig. 109) der Kämpferdrucklinie bezeichnen wir mit η. Alsdann ist $\eta = AN \tan \angle DAH = (a - \xi) \frac{V}{H}$. Setzen wir V nach 93 (Seite 294) $= G \frac{a + \xi}{2a}$ und für H den eben entwickelten Ausdruck, so ergiebt sich

$$140. \quad \eta = \frac{32 a^2 h}{5 (5 a^2 - \xi^2)}.$$

In folgender Tabelle sind die Werthe von H und η für einige ξ zusammengestellt. Auf Tafel XI ist hiernach in Fig. 3 die Form der Kämpferdrucklinie construirt.

Fig. 109.



Digitized by Google

ξ	H	η	ξ	H	η
0	0,3906	1,280	0,5	0,2783	1,347
0,1	0,3853	1,283	0,6	0,2320	1,379
0,2	0,3706	1,290	0,7	0,1797	1,415
0,3	0,3490	1,304	0,8	0,1226	1,468
0,4	0,3176	1,322	0,9	0,0622	1,527
0,5	0,2783	1,347	1,0	0	1,620
. a	. G $\frac{a}{h}$	. h	. a	. G $\frac{a}{h}$	. h

§. 319. Beanspruchung durch eine isolirte Last. Nach §. 310 liegt der gefährliche Querschnitt entweder in den Punkten R_1, R_2, in welchen die Tangente den Kämpferdrücken D, D' parallel ist oder im Angriffspunkte E der Last (Fig. 109). Die diesen Stellen entsprechenden Werthe P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3 sind durch die Formeln 98, 99 bestimmt und nebst den Werthen P_4 von P im Kämpfer A für einige Werthe von ξ, sowie für $\frac{h}{a} = 0$ und $\frac{h}{a} = \frac{1}{3}$ in folgender Tabelle zusammengestellt; x_1, x_2 sind hierbei die Abscissen der Punkte R_1, R_2.

ξ	x_1	x_2	h = 0 . a	h = $\frac{1}{3}$ a				h beliebig		
			P = H	P_1	P_2	P_3	P_4	M_1	M_2	M_3
	+	−	−	−	−	−	−	+	+	−
0	0,640	0,642	0,391	0,424	0,420	0,391	0,417	0,051	0,051	0,109
0,2	0,806	0,540	0,372	0,422	0,395	0,395	0,420	0,014	0,079	0,124
0,340	1	0,492	0,339	0,406	0,389	0,380	0,406	0	0,085	0,144
0,4	—	0,472	0,318	—	0,333	0,367	0,394	—	0,089	0,153
0,6	—	0,431	0,232	—	0,241	0,314	0,341	—	0,075	0,172
0,8	—	0,408	0,123	—	0,127	0,249	0,268	—	0,043	0,136
1	—	0,400	0	—	0	0,185	0,186	—	0	0
. a		. a	. G $\frac{a}{h}$			. G $\frac{a}{h}$			. G a	

Wenn $\xi > 0{,}340\,a$ ist, so giebt es zwischen A und E (Fig. 109) keinen Punkt, für welchen die Tangente dem Kämpferdrucke D parallel ist; P_1 und M_1 haben alsdann keine Bedeutung. In diesem Falle ist P_4 das Maximum von P. Der absolut grösste Werth von P ist P_1, wenn die Last im Scheitel liegt; derselbe ist nach 98, da für $\xi = 0$ $V = \frac{1}{2}G$, $H = \frac{25\,G\,a}{64\,h}$ wird.

$$141.\quad \max P = \frac{25\,G\,a}{64\,h}\sqrt{1 + 1{,}639\,\frac{h^2}{a^2}}.$$

M_1 und M_2 sind stets negativ, M_3 stets positiv; M_2 ist $> M_1$ und M_3

Digitized by Google

absolut genommen, $> M_3$. Zum Maximum wird M_3 bei $x = 0{,}59\,a$ für $\xi = 0{,}59\,a$ und M_2 bei $x = -0{,}48\,a$ für $\xi = 0{,}38\,a$ und zwar ist

$$142.\quad \max(+M) = 0{,}1716\,G\,a, \quad \max(-M) = 0{,}0886\,G\,a,$$

also das positive Maximum fast doppelt so gross, als das negative.

Bei constanter Lage der Last ist bei kleinem h P fast constant, nämlich $= H$. Daher wird die Spannung der gespanntesten Faser nahezu in denjenigen Querschnitten zum Maximum, für welche M zum Maximum wird. Da der von M abhängige Theil der Spannung meist viel grösser ist, als der von P abhängige, so wird die Spannung nahezu für diejenige Lage der Last zum Maximum, für welche M zum Maximum wird. Für $\xi = 0{,}59\,a$ aber wird $H = 0{,}237\,G\,\frac{a}{h}$ und für $\xi = 0{,}38\,a$ wird $H = 0{,}324\,G\,\frac{a}{h}$. Daher sind die Festigkeitsbedingungen annähernd, vorausgesetzt, dass nur ein Bruch durch Zerdrücken eintreten könne,

$$143.\quad \begin{cases} \mathfrak{K} = 0{,}1716\,G\,\dfrac{a\,e_2}{W} + 0{,}237\,G\,\dfrac{a}{F\,h}, \\ \mathfrak{K} = 0{,}0886\,G\,\dfrac{a\,e_1}{W} + 0{,}324\,G\,\dfrac{a}{F\,h}, \end{cases}$$

wobei e_1, e_2 den Abstand der obersten und untersten Faser von der horizontalen Schweraxe des Querschnittes bedeutet.

Beispielsweise wird für den rechteckigen Querschnitt mit der Breite b und der Höhe c $F = b\,c$, $W = \frac{1}{12}\,b\,c^3$, $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}\,c$, mithin

$$\mathfrak{K}\,b\,c^2\,h = (1{,}0296\,h + 0{,}237\,c)\,G\,a,$$
$$\mathfrak{K}\,b\,c^3\,h = (0{,}5316\,h + 0{,}324\,c)\,G\,a$$

Die zweite Gleichung kann nur maassgebend sein, wenn $0{,}5316\,h + 0{,}324\,c > 1{,}0296\,h + 0{,}237\,c$ oder wenn $h < 0{,}177\,c$ ist, was aber nie eintritt, so dass hier stets die erste Gleichung maassgebend ist.

§. 320. Formänderung durch eine isolirte Last. Die in §. 313 gemachte Entwickelung lässt sich hier direkt anwenden, wenn wir $A' = A''$, $B' = B''$, $C' = C''$ setzen. Die Formeln a, b für die Constanten, in welchen H noch unbestimmt gelassen ist, behalten ihre Gültigkeit; für H ist in denselben der Ausdruck 139 zu setzen. Es ergeben sich so

$$144.\quad \begin{cases} A = \dfrac{G\,\xi}{12\,a}\left(2\,a^2 + 3\,a\,\xi + \xi^2\right), \\ A' = \dfrac{G\,\xi}{12\,a}\left(2\,a^2 - 3\,a\,\xi + \xi^2\right); \\ C = \dfrac{G}{768\,a}\left(3\,a^4 - 42\,a^2\,\xi^2 - 64\,a\,\xi^3 - 25\,\xi^4\right), \\ C' = \dfrac{G}{768\,a}\left(3\,a^4 - 42\,a^2\,\xi^2 + 64\,a\,\xi^3 - 25\,\xi^4\right). \end{cases}$$

Die Ausdrücke 108 für B, B′ sind direkt anzuwenden, weil in diesen H nicht vorkommt. Die Verrückungen Δx, Δy eines beliebigen Punktes sind nun durch die Gleichungen 105 und 106 bestimmt. Die Verrückungen des Scheitels sind $\Delta_0 x = -\frac{2\,B'\,h}{a^2}$, $\Delta_0 y = C'$, d. i.

$$145.\quad \begin{cases} \Delta_0 x = -\dfrac{1}{24}\dfrac{G}{E\,W}\dfrac{h\,\xi\,(a^3 - 2\,a\,\xi^2 + \xi^3)}{a^2}. \\ \Delta_0 y = +\dfrac{1}{768}\dfrac{G}{E\,W}\dfrac{3\,a^4 - 42\,a^2\xi^2 - 64\,a\,\xi^3 - 25\,\xi^4}{a}. \end{cases}$$

Für $\Delta_0 y$ ist die folgende Tabelle berechnet.

ξ	$\Delta_0 y$	ξ	$\Delta_0 y$	ξ	$\Delta_0 y$
0	+ 0,00391	0,376	0	0,7	— 0,00212
0,1	+ 0,00341	0,4	— 0,00034	0,8	— 0,00176
0,2	+ 0,00235	0,5	— 0,00138	0,9	— 0,00143
0,3	+ 0,00110	0,6	— 0,00200	1	0
. a	$\cdot \dfrac{G\,a^3}{E\,W}$	. a	$\cdot \dfrac{G\,a^3}{E\,W}$	. a	$\cdot \dfrac{G\,a^3}{E\,W}$

Für $\Delta_0 x$ gelten die Werthe der Tabelle zu §. 313, da $\Delta_0 x$ in beiden Fällen denselben Werth hat. Die Senkung ist durchschnittlich nur 0,34 so gross, als bei drei Gelenken.

B. Isolirte Last, Kreisbogen, constanter Querschnitt.

§. 321. Horizontalschub. Direkt ist der Horizontalschub nach dem in §. 317 Gesagten zu bestimmen. Mit Anwendung der in §. 314 gewonnenen Resultate ergiebt sich derselbe folgendermaassen. Hier ist $A' = A''$, $B' = B''$, $C' = C''$. Setzt man nun in Gleichung IV für $A - A'' = A - A'$ den Werth **I** ein, so ergiebt sich eine Gleichung zur Bestimmung von H. Die Reduction auf H giebt

$$146.\quad H = G\,\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\alpha) - 2\,(1+\varkappa)\cos\alpha\,(\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta)}{2\,[\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 2\,(1+\varkappa)\,\alpha\cos^2\alpha]}.$$

Für den Halbkreis wird äusserst einfach:

$$147.\quad H = G\,\frac{\cos^2\beta}{\pi},$$

so dass hier die von der Längenänderung der Axe herrührenden Glieder ganz in Wegfall kommen. In folgender Tabelle sind die hiernach berechneten Werthe des Horizontalschubes mit Vernachlässigung von $\varkappa$ zusammengestellt.

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0,391	0,391	0,388	0,385	0,380	0,373	0,364	0,318
0,2	0,372	0,372	0,369	0,365	0,359	0,352	0,342	0,288
0,4	0,318	0,317	0,315	0,309	0,301	0,292	0,278	0,208
0,6	0,232	0,231	0,228	0,222	0,213	0,202	0,187	0,110
0,8	0,123	0,122	0,119	0,115	0,108	0,099	0,086	0,030
1	0	0	0	0	0	0	0	0
. α	$\cdot G\,\dfrac{a}{h}$							

Digitized by Google

Bezeichnet man den Horizontalschub ohne Rücksicht auf die Glieder mit $\varkappa$ mit H_0, so kann man nach 146 allgemein

$$148.\quad H = H_0 \frac{1 - A\varkappa}{1 + B\varkappa}$$

setzen, worin der Factor von H_0 als ein Correctionscoefficient auftritt. Setzen wir ferner

$$A_1 = \sin^2\alpha - \sin^2\beta + 2\cos\alpha\,(\cos\beta - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha + \beta\sin\beta),$$
$$A_2 = 2\cos\alpha\,(\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta),$$
$$B_1 = 2\,(\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 2\,\alpha\cos^2\alpha),$$
$$B_2 = 2\,\alpha\cos^2\alpha,$$

so wird $A = \frac{A_2}{A_1}$ und $B = \frac{B_2}{B_1}$. Die Reihenverwandlung giebt

$$A_1 = \tfrac{1}{12}(\alpha^2 - \beta^2)\left[(5\alpha^2 - \beta^2) - \tfrac{1}{30}(49\alpha^4 + 34\alpha^2\beta^2 - 11\beta^4) + \ldots\right],$$
$$A_2 = 2(\alpha^2 - \beta^2)\left[1 - \tfrac{1}{6}(4\alpha^2 + \beta^2) + \ldots\right],$$
$$B_1 = \tfrac{8}{15}\alpha^5\left(1 - \tfrac{4}{21}\alpha^2 + \ldots\right),\quad B_2 = 2\alpha\,(1 - \alpha^2 + \ldots).$$

Annähernd wird hiernach

$$149.\quad \left|\begin{array}{l} A = \dfrac{24}{5\alpha^2 - \beta^2} = \dfrac{6\,a^2}{5\,h^2\left[1 - \frac{1}{5}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]} \\ B = \dfrac{15}{4\,\alpha^4} = \dfrac{15\,a^4}{64\,h^4}. \end{array}\right.$$

Die genaueren Werthe von A und B sind in folgender Tabelle enthalten.

	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	
A	0	1,20	1,19	1,17	1,14	1,08	1,00	0,88	0	$\cdot\frac{a^2}{h^2}$
	0,2	1,21	1,20	1,18	1,15	1,10	1,01	0,90	0	
	0,4	1,24	1,24	1,21	1,18	1,13	1,05	0,94	0	
	0.6	1,29	1,29	1,27	1,24	1,20	1,13	1,02	0	
	0,8	1,38	1,38	1,36	1,34	1,30	1,24	1,18	0	
	1	1,50	1,50	1,49	1,47	1,45	1,41	1,36	0	
B		0,234	0,233	0,221	0,203	0,178	0,146	0,107	0	$\cdot\frac{a^4}{h^4}$

Hiernach ist der Correctionscoefficient von der Lage der Last fast unabhängig. Nahezu verhält sich $A : B = 5\,h^2 : a^2$, so dass bei kleiner Stichhöhe der Coefficient B viel grösser ist, als A. Bei kleinen Stichhöhen wird daher sehr nahe, wenn wir $r = \frac{a^2}{2\,h}$, $\varkappa = \frac{W}{F\,r^2} = \frac{4\,W\,h^2}{F\,a^4}$, $A = 0$, $B = \frac{15\,a^4}{64\,h^4}\cdot\frac{4\,W\,h^2}{F\,a^4} = \frac{15\,W}{16\,F\,h^2}$ setzen,

$$150.\quad H = \frac{H_0}{1 + \frac{15\,W}{16\,F\,h^2}}.$$

Digitized by Google

Der Einfluss der Correction wird also um so grösser, je kleiner die Stichhöhe ist.

In praktischen Fällen ist $\varkappa$ höchstens $= 0{,}00015$, daher der Einfluss der Correction bei $\alpha = 10°$, $20°$, $30°$, $40°$, $50°$, $60°$, $90°$ höchstens 55 7,1 1,5 0,5 0,3 0,1 0 Procent, so dass die Correction bei kleinen Centriwinkeln allerdings nöthig, bei grösseren aber meist nicht nöthig wird.

Das Verhältniss $\frac{h}{a}$ der Stichhöhe zur halben Spannweite ist bei gegebenem Centriwinkel $= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{1}{2}\alpha$, wodurch auch bei gegebenem $\frac{h}{a}$ der Centriwinkel α bestimmt ist.

§. 322. Kämpferdrucklinie. Bezeichnen wir, wie in §. 318 die Ordinate NL (Fig. 109) der Kämpferdrucklinie mit η, so ist $\eta = AN \tan\angle DAH = (a - \xi)\frac{V}{H}$, d. i., da $r = \sin\alpha$, $\xi = r\sin\beta$, $V = G\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2\sin\alpha}$ ist.

$$151. \quad \eta = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{2\sin\alpha}\,\frac{G}{H}\,r.$$

Für $\beta = \alpha$ nimmt dieser Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Bekanntlich behält in diesem Falle der Bruch seinen Werth, wenn man Zähler und Nenner nach β differenziirt. Geschieht dies nach Einsetzung des Ausdruckes für H, so ergiebt sich

$$151\,a. \quad \eta = r\,\frac{\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 2(1+\varkappa)\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \varkappa(\sin\alpha + \alpha\cos\alpha)}.$$

Für den Halbkreis wird $\eta = \frac{1}{2}\frac{G}{H}r\cos^2\beta$, d. i., wenn man für H den Ausdruck 147 setzt,

$$152. \quad \eta = \tfrac{1}{2}\pi r = 1{,}5708\,r.$$

Beim Halbkreise bildet also die Kämpferdrucklinie eine horizontale Gerade.

Hiernach ist für η die folgende Tabelle berechnet und dabei $\varkappa = 0$ gesetzt.

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 20°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 40°$	$\alpha = 50°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$
0	1,280	1,282	1,288	1,300	1,316	1,340	1,375	1,571
0,2	1,290	1,292	1,298	1,309	1,327	1,348	1,380	1,571
0,4	1,322	1,324	1,329	1,340	1,354	1,374	1,403	1,571
0,6	1,379	1,380	1,385	1,393	1,405	1,421	1,443	1,571
0,8	1,468	1,469	1,471	1,476	1,483	1,490	1,504	1,571
1	1,600	1,600	1,599	1,597	1,594	1,591	1,588	1,571
. α				. h				

Ist η_0 die Ordinate ohne Rücksicht auf die Glieder mit $\varkappa$, so ist $\eta : \eta_0 = \frac{1}{H} : \frac{1}{H_0}$, also $\eta = \eta_0\frac{H_0}{H}$, d i.

Digitized by Google

$$153.\quad \eta = \frac{1 + B\varkappa}{1 - A\varkappa}\,\eta_0.$$

Die Werthe von A und B sind im vorigen §. besprochen und tabellarisch zusammengestellt.

Auf Taf. XII ist in Fig. 3 und 4, die Kämpferdrucklinie für $\alpha = 60^0$ und 90^0 dargestellt.

§. 323. Formänderung. Die in §. 314 entwickelten Formeln sind auch hier anzuwenden. Die erste der Formeln 116 giebt die horizontale Verschiebung $\Delta_0 x$ des Scheitels direkt, weil in dem Ausdrucke für $\Delta_0 x$ der Horizontalschub H nicht vorkommt. In der zweiten der Formeln 116 für $\Delta_0 y$ ist für H der Ausdruck 146 zu setzen. Die hiernach für $\Delta_0 y$ berechneten Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

β	$\Delta_0 y$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	+ 0,003907	+ 0,004633	+ 0,007724	+ 0,01894
0,2	+ 0,002354	+ 0,002849	+ 0,004851	+ 0,01261
0,4	— 0,000344	— 0,000245	+ 0,000208	+ 0,00268
0,6	— 0,002000	— 0,001733	— 0,002394	— 0,00201
0,8	— 0,001760	— 0,001847	— 0,002007	— 0,00132
1	0	0	0	0
α	$\cdot\frac{G a^3}{E W}$			

Für die horizontale Verrückung $\Delta_0 x$ gelten die Werthe der Tabelle zu §. 314 auch hier.

Bezeichnet man die Verrückung des Scheitels ohne Rücksicht auf $\varkappa$ mit $\Delta_0 x'$, $\Delta_0 y'$, so ist nach 116:

$$154.\quad \begin{cases} \Delta_0 x = \Delta_0 x' + \dfrac{\varkappa G r^3}{2 E W}(\alpha - \beta)\sin\beta, \\ \Delta_0 y = \Delta_0 y' - \dfrac{(H_0 - H) r^3}{E W}\cdot\dfrac{4 - 4\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 5\sin^2\alpha + 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} \\ \qquad + \dfrac{\varkappa r^3}{2 E W}\left[2 H \alpha\cos\alpha + G(\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta)\right]\cot\tfrac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

Der Factor von $\frac{(H_0 - H) r^3}{E W}$ ergiebt sich für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0, 90^0 bezüglich zu 0,1017 0,1283 0,1705 0,2854 $a^2 h$.

Für einen kleinen Centriwinkel ergiebt sich als Näherungsformel durch Reihenverwandlung und Einsetzung der Ausdrücke 139 und 149 für H_0 und H und des Werthes von $\varkappa$:

$$155.\quad \begin{cases} \Delta_0 x = \Delta_0 x' + \dfrac{G(a - \xi)\xi h}{E F a^2}, \\ \Delta_0 y = \Delta_0 y' + \dfrac{G(a^2 - \xi^2)}{E F a}\left[1 + \dfrac{755 F(5 a^2 - \xi^2)}{1024(15 W + 16 F h^2)}\right]. \end{cases}$$

Digitized by Google

C. Gleichmässige Belastung der Horizontalen, Kreisbogen, constanter Querschnitt.

§. 324. Formänderung und Horizontalschub. Nach den Gleichungen 101 Seite 297 wird $P + \frac{M}{r} = -H\cos\alpha - \frac{1}{2} q r (\sin^2\alpha + \sin^2\varphi)$ und $M = H r (\cos\varphi - \cos\alpha) - \frac{1}{2} q r^2 (\sin^2\alpha - \sin^2\varphi)$. Daher ergiebt sich zunächst für die Längenänderung der Axe nach 7 (Seite 270):

$$\frac{\Delta ds}{ds} = -\frac{1}{EF}\left[H\cos\alpha + \tfrac{1}{2} q r (\sin^2\alpha + \sin^2\varphi)\right],$$

$$\Delta s = -\frac{1}{EF}\left[H\varphi\cos\alpha + \tfrac{1}{2} q r (2\varphi\sin^2\alpha + \varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\right].$$

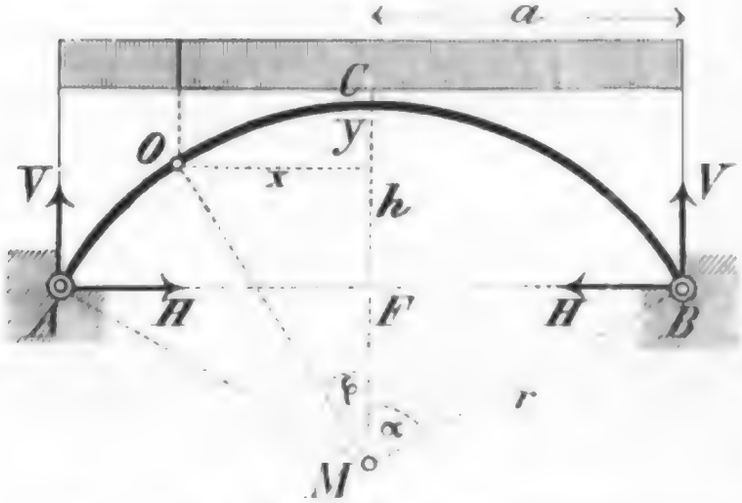
Für die Lagenänderung der Tangente ergiebt sich nun nach 25 (Seite 274) nach Ausführung der Integration:

$$EW\Delta\varphi = r^2\left[H(\sin\varphi - \varphi\cos\alpha) - \tfrac{1}{4} q r (2\varphi\sin^2\alpha - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\right] - \varkappa r^2\left[H\varphi\cos\alpha + \tfrac{1}{4} q r (2\varphi\sin^2\alpha + \varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\right].$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $\varphi = 0$ auch $\Delta\varphi = 0$ werden muss. Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergeben sich nun nach 30 (Seite 276) nach Ausführung der Integration

156.
$$\left.\begin{aligned} EW\Delta x = &-\tfrac{1}{2} H r^3(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + 2\varphi\cos\alpha\cos\varphi - 2\cos\alpha\sin\varphi) \\ &+ \tfrac{1}{12} q r^4\left[\sin^3\varphi - 3(1 - 2\sin^2\alpha)(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)\right] \\ &- \varkappa r^3\left[H\varphi\cos\alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{4} q r(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - 2\varphi\sin^2\alpha\cos\varphi - \sin^3\varphi)\right], \\ EW\Delta y = &+\tfrac{1}{2} H r^3(\sin^2\varphi - 2\varphi\cos\alpha\sin\varphi - 2\cos\alpha\cos\varphi) + C \\ &+ \tfrac{1}{12} q r^4\left[\cos^3\varphi + 3(1 - 2\sin^2\alpha)(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)\right] \\ &- \varkappa r^3\left[H\varphi\cos\alpha + \tfrac{1}{4} q r(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + 2\varphi\sin^2\alpha)\right]\sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Fig. 110.



Im Ausdrucke für Δx ist eine Constante nicht hinzuzufügen, weil für $\varphi = 0$ auch $\Delta x = 0$ werden muss, was schon ohne Constante eintritt. Für die verticale Verrückung Δy bestimmt sich die Constante C durch die Bedingung, dass an den Kämpfern, also für $\varphi = \alpha$ die Verrückung $\Delta y = 0$ werden muss. Dies giebt

$$C = -\tfrac{1}{2} H r^3(3\sin^2\alpha - 2 - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha) - \tfrac{1}{12} q r^4\left[\cos^3\alpha + 3(1 - 2\sin^2\alpha)(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha)\right] + \varkappa r^3\left[H\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{4} q r(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha)\right]\sin\alpha.$$

Digitized by Google

Der Horizontalschub H ergiebt sich durch die Bedingung, dass für $\varphi = \alpha$, $\Delta x = 0$ werden muss. Dies giebt:

$$157.\quad H = \frac{1}{6} q r \frac{\sin^3\alpha - 3(1 - 2\sin^2\alpha)(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) - 3\varkappa\cos\alpha(\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha + 2\alpha\cos^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 2\varkappa\alpha\cos^2\alpha}.$$

Mit Benutzung des für eine isolirte Last gewonnenen Ausdruckes 146 (Seite 312) ergiebt sich H einfacher dadurch, dass man in demselben φ für β und $q\,dx = r\cos\varphi\,d\varphi$ für G setzt und nun zwischen den Grenzen $\varphi = +\alpha$ und $\varphi = -\alpha$ integrirt.

Für den Halbkreis wird $H = \frac{4}{3\pi} q r = 0{,}424\, q r$.

Bezeichnen wir den Horizontalschub ohne Berücksichtigung von $\varkappa$ mit H_0, so können wir wie in §. 321

$$158.\quad H = H_0 \frac{1 - A\varkappa}{1 + B\varkappa}$$

setzen. Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke für kleine Centriwinkel

$$159.\quad H_0 = q r\left(1 - \frac{2}{7}\alpha^2 + \ldots\right) = \frac{q a^2}{2h}\left(1 - \frac{8h^2}{7a^2} + \ldots\right).$$

$$A = \frac{5}{\alpha^2} = \frac{5a^2}{4h^2},\quad B = \frac{15}{2\alpha^2} = \frac{15a^4}{32h^4}.$$

Daher verhält sich $A : B = 8h^2 : 3a^2$, so dass B viel grösser als A ist. Annähernd ist daher, wenn wir $\varkappa = \frac{W}{F r^2} = \frac{4 W h^2}{F a^4}$ setzen,

$$160.\quad H_0 = \frac{q a^2}{2h} \frac{8 F h^2}{15 W + 8 F h^2}.$$

Nach der genauen Formel 157 ist folgende Tabelle berechnet.

α	H_0	A	B	α	H_0	A	B
0	1,0000	1,25	0,234	40	0,8661	1,14	0,178
10	0,9945	1,24	0,233	50	0,7954	1,06	0,146
20	0,9655	1,23	0,221	60	0,7134	0,94	0,107
30	0,9234	1,19	0,203	90	0,4244	0	
Gr.	$\cdot q r$	$\cdot \frac{a^2}{h^2}$	$\cdot \frac{a^4}{h^4}$	Gr.	$\cdot q r$	$\cdot \frac{a^2}{h^2}$	$\cdot \frac{a^4}{h^4}$

§. 325. Beanspruchung. Die Grössen P, Q und M sind, nachdem H berechnet ist, durch die Gleichungen 101 (Seite 297) bestimmt. Hiernach ist auch die graphische Construction leicht. Auf Tafel XI ist in Fig. 5 P, Q und M für $\alpha = 60°$ und in Fig. 6 die Stützlinie für $\alpha = 90°$ dargestellt.

Die Reihenwandlung giebt nach Einsetzung des Werthes 159 von H als Näherungsausdrücke

$$161.\quad \begin{cases} P = -q r\,(1 - \frac{3}{7}\alpha^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots), \\ Q = \frac{1}{14} q r \varphi\,(4\alpha^2 - 7\varphi^2 + \ldots), \\ M = -\frac{1}{56} q r^2(\alpha^2 - \varphi^2)(\alpha^2 - 7\varphi^2 + \ldots). \end{cases}$$

Digitized by Google

P ist stets negativ, ändert sich nur wenig und hat an den Kämpfern seinen grössten Werth. Daher ist $\max P = -H\cos\alpha - q\,r\sin^2\alpha$, annähernd $= -q\,r\,(1+\frac{3}{4}\alpha^2)$. Q und M sind theils positiv, theils negativ. Q wird 0 und M wird zum Maximum für $\varphi = 0$ oder für $\cos\varphi = \frac{H}{q\,r}$; bezeichnen wir die bezüglichen Werthe von M mit M_0 und M_1, so ist

$$162.\quad \begin{cases} M_0 = H\,r\,(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}\,q\,r^2\sin^2\alpha, \\ M_1 = \dfrac{H^2}{2\,q} - H\,r\cos\alpha + \frac{1}{2}\,q\,r^2\cos^2\alpha. \end{cases}$$

Die Reihenverwandlung und Einsetzung von H giebt als Näherungsausdrücke für kleine Winkel

$$163.\quad \begin{cases} M_0 = -\dfrac{1}{56}\,q\,r^2\alpha^2 = -\dfrac{1}{14}\,q\,h^2, \\ M_1 = -\dfrac{9}{392}\,q\,r^2\alpha^4 = +\dfrac{8}{98}\,q\,h^2, \end{cases}$$

also $M_0 : M_1 = 7 : 9$. Dieses Verhältniss gilt fast selbst noch für den Halbkreis. Annähernd wird die Gleichung $\cos\varphi = \frac{H}{q\,r}$, wenn wir für H den Ausdruck 159 setzen, $1 - \frac{1}{2}\varphi^2 = 1 - \frac{3}{7}\alpha^2$, also $\varphi = \alpha\sqrt{\frac{3}{7}} = 0{,}756\,\alpha$. Auch diese Formel gilt fast noch für den Halbkreis.

Der Abstand e der Stützlinie von der Axe ist $\frac{M}{P}$. Annähernd wird für kleine Winkel

$$164.\quad e = \frac{1}{56}\,r\,(\alpha^2-\varphi^2)\,(\alpha^2-7\,\varphi^2)$$
$$= \frac{1}{7}\,h\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-7\,\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Am grössten wird e annähernd für $\varphi = 0$ und $\varphi = 0{,}756\,\alpha$ und zwar ist entsprechend $e_0 = \frac{1}{14}\,h$, $e_1 = -\frac{9}{98}\,h$.

In folgender Tabelle sind die wichtigsten Grössen für $\varphi = 0$, 30^0, 60^0 und 90^0 zusammengestellt.

α	$\max P$	M_0	M_1	φ für M_1	e_0	e_1
	—	—	+		+	—
0	1,000	0,0714	0,0918	0,756	0,143	0,184
30	1,050	0,0718	0,0917	0,752	0,145	0,174
60	1,106	0,0733	0,0910	0,747	0,154	0,150
90	1,041	0,0756	0,0901	0,721	0,178	0,090
	$\cdot\,q\,r$	$\cdot\,q\,h^2$	$\cdot\,q\,h^2$	$\cdot\,\alpha$	$\cdot\,\frac{h^2}{a^2}$	$\cdot\,\frac{h^2}{a^2}$

§. 326. Verrückungen des Scheitels. Wir wollen noch die Verrückung $\Delta_0 x$, $\Delta_0 y$ des Scheitels spezificiren. Natürlich ist der Symmetrie wegen $\Delta_0 x = 0$. Nach 156 wird ferner E W $\Delta_0 y = -H\,r^3\cos\alpha + \frac{1}{8}\,q\,r^4(2-3\sin^2\alpha) - \frac{1}{12}\,q\,r^4(2+3\sin^2\alpha) + C$, d. i.

Digitized by Google

$$165.\quad E\,W\,\Delta_0 y = -\tfrac{1}{12}\,H\,r^3\left[3\sin^2\alpha - 2 + 2\cos\alpha - 2\,\alpha\sin\alpha\cos\alpha\right]$$
$$-\tfrac{1}{12}\,q\,r^4\left[3\,(1-2\sin^2\alpha)\,(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1) - 1 + \cos^3\alpha\right]$$
$$+\tfrac{1}{12}\,\varkappa\,r^3\left[12\,H\,\alpha\sin\alpha\cos\alpha + q\,r\,(3\,\alpha\sin\alpha - 2 + 2\cos\alpha - 3\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + 6\,\alpha\sin^3\alpha)\right].$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformel für kleine Winkel:

$$E\,W\,\Delta_0 y = -\frac{5}{24}\,H\,r^3\alpha^4\left(1-\frac{49}{150}\,\alpha^2\right) + \frac{5}{24}\,q\,r^4\alpha^4\left(1-\frac{91}{150}\,\alpha^2\right)$$
$$+\varkappa\,H\,r^3\alpha^2 + \frac{23}{48}\,\varkappa\,q\,r^4\alpha^4.$$

Wenn man $\varkappa$ vernachlässigt und $H = q\,r\,(1-\frac{3}{7}\,\alpha^2)$ setzt, so wird $E_0 W\,\Delta_0 y = {}_8\tfrac{1}{40}\,q\,r^4\alpha^6 = {}_2\tfrac{1}{10}\,q\,a^2h^2$. Genauer aber wird, wenn man $\varkappa = \frac{W}{F\,r^2}$ und für H den Ausdruck 159 setzt, mit Vernachlässigung relativ kleiner Glieder:

$$166.\quad \Delta_0 y = \frac{q\,a^2}{840\,E\,W}\,\frac{32\,F\,h^4 + 2625\,W\,a^2}{8\,F\,h^2 + 15\,W},$$

und wenn $15\,W$ gegen $8\,F\,h^2$ klein ist,

$$166\,a.\quad \Delta_0 y = \frac{q\,a^2h^2}{210\,E\,W} + \frac{175}{448}\,\frac{q\,a^4}{E\,F\,h^2}.$$

Für den Halbkreis wird genau:

$$167.\quad \Delta_0 y = \frac{3\pi^2 - 4\pi - 16}{24\,\pi}\,\frac{q\,r^4}{E\,W} + \frac{9\pi - 10}{24}\,\frac{q\,r^4}{E\,F}$$
$$= 0{,}013826\,\frac{q\,r^4}{E\,W} + 0{,}7614\,\frac{q\,r^4}{E\,F}.$$

D. Gleichmässige Belastung der Axe; Kreisbogen; constanter Querschnitt.

§. 327. Formänderung und Horizontalschub. Nach den Gleichungen 103 (Seite 298) wird $P + \frac{M}{r} = +H\cos\alpha - g\,r\,(\cos\alpha - \cos\varphi + \alpha\sin\alpha)$ und $M = (H + g\,r)\,r\,(\cos\varphi - \cos\alpha) - g\,r^2\,(\alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi)$. Wie in §. 324 ergiebt sich hieraus nach 7, 25 und 30:

$$168.\quad \begin{cases} E\,W\,\Delta x = -\tfrac{1}{3}\,(H + g\,r)\,r^3\,(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - 2\cos\alpha\sin\varphi + \varphi\cos\alpha\cos\varphi) \\ \qquad +\tfrac{1}{4}\,g\,r^4\,(4\,\alpha\sin\alpha\sin\varphi - 4\,\alpha\,\varphi\sin\alpha\cos\varphi - 2\,\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi - \varphi\cos 2\varphi) \\ \qquad -\varkappa\,r^3\left[H\,\varphi\cos\alpha\cos\varphi + g\,r\cos\varphi\,(\varphi\cos\varphi + \alpha\,\varphi\sin\alpha - \sin\varphi)\right], \\ E\,W\,\Delta y = +\tfrac{1}{2}\,(H + g\,r)\,r^3\,(\sin^2\varphi - 2\cos\alpha\cos\varphi - 2\,\varphi\cos\alpha\sin\varphi) + C \\ \qquad -\tfrac{1}{4}\,g\,r^4\,(\varphi^2 - 3\sin^2\varphi + 4\,\alpha\sin\alpha\cos\varphi + 4\,\alpha\,\varphi\sin\alpha\sin\varphi + 2\,\varphi\sin\varphi\cos\varphi) \\ \qquad -\varkappa\,r^3\left[H\,\varphi\cos\alpha\sin\varphi + g\,r\sin\varphi\,(\varphi\cos\alpha - \sin\varphi + \alpha\,\varphi\sin\alpha)\right]. \end{cases}$$

Für $\varphi = \alpha$ muss $\Delta x = 0$ werden. Diese Bedingung giebt als Ausdruck für den Horizontalschub:

$$169.\quad H = g\,r\,\frac{\alpha + 9\sin\alpha\cos\alpha - 10\,\alpha\cos^3\alpha - 4\,\alpha^2\sin\alpha\cos\alpha - 4\,\varkappa\cos\alpha\,(\alpha\cos\alpha + \alpha^2\sin\alpha - \sin\alpha)}{2\,(\alpha + 2\,\alpha\cos^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha) + 4\,\varkappa\,\alpha\cos^2\alpha}$$

Digitized by Google

Der Horizontalschub beim Halbkreise wird hiernach genau

$$170.\quad H = \tfrac{1}{2}\, g\, r.$$

Auch hier können wir wieder, wenn H_0 den Horizontalschub ohne Rücksicht auf $\varkappa$ bezeichnet,

$$171.\quad H = H_0 \frac{1 - A\varkappa}{1 + B\varkappa}$$

setzen. Als Näherungsausdrücke für kleine Winkel ergeben sich

$$172.\quad H_0 = g\, r\left(1 - \frac{4}{21}\alpha^2 + \ldots\right) = \frac{g\, a^2}{2\, h}\left(1 - \frac{16\, h^2}{21\, a^2} + \ldots\right);$$

$$A = \frac{5}{\alpha^2}\left(1 - \frac{61}{210}\alpha^2 + \ldots\right),\quad B = \frac{15}{2\,\alpha^4}\left(1 - \frac{17}{21}\alpha^2 + \ldots\right).$$

Da A gegen B nur klein ist, so wird annähernd nach Einsetzung von H_0 und B:

$$173.\quad H = \frac{g\, a^2}{2\, h}\,\frac{8\, F\, h^2}{15\, W + 8\, F\, h^2},$$

was mit dem Näherungsausdrucke für gleichmässige Belastung der Horizontalen genau übereinstimmt.

Nach der genauen Formel ist folgende Tabelle berechnet.

α	H_0	A	B	α	H_0	A	B
0	1,0000	1,250	0,469	40	0,9061	1,142	0,357
10	0,9942	1,239	0,463	50	0,8523	1,064	0,292
20	0,9767	1,226	0,441	60	0,7855	0,949	0,226
30	0,9474	1,194	0,407	90	0,5000	0	0
Gr	$\cdot g\, r$	$\cdot \frac{a^2}{h^2}$	$\cdot \frac{a^4}{h^4}$	Gr.	$\cdot g\, r$	$\cdot \frac{a^2}{h^2}$	$\cdot \frac{a^4}{h^4}$

§. 328. Beanspruchung. Die Grössen P, Q, M sind nach der Berechnung von H durch die Gleichungen 103 (Seite 298) bestimmt.

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke, wenn man H_0 für H setzt, also $\varkappa$ vernachlässigt,

$$174.\quad \begin{cases} P = -\,g\, r\,(1 - \frac{4}{21}\alpha^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots), \\ Q = \frac{1}{21}\, g\, r\, \varphi\,(4\,\alpha^2 - 7\,\varphi^2 + \ldots), \\ M = -\,\frac{1}{84}\,(\alpha^2 - \varphi^2)\,(\alpha^2 - 7\,\varphi^2 + \ldots). \end{cases}$$

P ist stets negativ und hat an den Kämpfern seinen grössten Werth. Q wird Null und M zum Maximum für $H \sin\varphi = g\, r\, \varphi \cos\varphi$, d. i. für $\varphi = 0$ und einen durch fortgesetzte Näherung zu bestimmenden Werth von φ; bei kleinen Centriwinkeln für $\varphi = 0$ und $\varphi = \alpha\sqrt{\frac{4}{7}} = 0{,}7559\,\alpha$. Die entsprechenden Näherungswerthe M_0, M_1 der Maxima von M sind

$$175.\quad \begin{cases} M_0 = -\,\frac{1}{84}\, g\, r^2\alpha^4 = -\,\frac{1}{21}\, g\, h^2, \\ M_1 = +\,\frac{8}{1029}\, g\, r^2\alpha^4 = +\,\frac{3}{70}\, g\, h^2. \end{cases}$$

Digitized by Google

Bei kleinen Centriwinkeln ist in allen Querschnitten $M = \frac{9}{14} = 0{,}643$ von dem Momente bei gleichmässiger Belastung der Horizontalen, vorausgesetzt, dass $g = q$ ist.

Der Abstand e der Stützlinie von der Axe wird bei kleinen Centriwinkeln

$$176. \quad e = \tfrac{1}{84} r (\alpha^2 - \varphi^2)(\alpha^2 - 7\varphi^2),$$

also ist e ebenfalls $\frac{9}{14} = 0{,}643$ von dem Werthe von e für gleichmässige Belastung der Horizontalen.

Die wichtigsten Grössen sind für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0 und 90^0 in folgender Tabelle zusammengestellt.

α	max P	M_0	M_1	φ für $Q = 0$	e_0	e_1
	—	—	+		—	+
0	1,000	0,0476	0,0612	0,756	0,095	0,122
30	1,144	0,0496	0,0663	0,753	0,098	0,115
60	1,300	0,0568	0,0752	0,746	0,109	0,101
90	1,571	0,0708	0,0945	0,733	0,142	0,075
Gr.	$. g r$	$. g h^2$	$. g h^2$	$. \alpha$	$. \frac{h^3}{a^2}$	$. \frac{h^3}{a^2}$

§. 329. Verrückung des Scheitels. Setzt man in der Gleichung 168 für $\varphi = \alpha$ die Verrückung $\Delta y = 0$, so ergiebt sich für die Constante C der Werth

$$177. \quad C = -\tfrac{1}{2}(H + g r) r^3 (3 \sin^2\alpha - 2 - 2\alpha \sin\alpha \cos\alpha) + \tfrac{1}{4} g r^4 (\alpha^2 - 3 \sin^2\alpha + 6 \alpha \sin\alpha \cos\alpha + 4 \alpha^2 \sin^2\alpha) + \varkappa r^3 \left[H \alpha \sin\alpha \cos\alpha + g r \sin\alpha (\alpha \cos\alpha - \sin\alpha + \alpha^2 \sin\alpha)\right].$$

Für die Verrückung $\Delta_0 y$ des Scheitels wird nun $EW \Delta_0 y = C - (H + g r) r^3 \cos\alpha - g r^4 \alpha \sin\alpha$, d. i.

$$178. \quad EW \Delta_0 y = -\tfrac{1}{2} H (2 \cos\alpha - 2 + 3 \sin^2\alpha - 2 \alpha \sin\alpha \cos\alpha) + \tfrac{1}{4} g r (4 - 4 \cos\alpha - 9 \sin^2\alpha - 4 \alpha \sin\alpha + 10 \alpha \sin\alpha \cos\alpha + \alpha^2 + 4 \alpha^2 \sin^2\alpha) + \varkappa \left[H \alpha \sin\alpha \cos\alpha + g r \sin\alpha (\alpha \cos\alpha - \sin\alpha + \alpha^2 \sin\alpha)\right].$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck für kleine Centriwinkel

$$179. \quad EW \Delta_0 y = -\frac{5}{24} H r^3 \alpha^4 \left(1 - \frac{49}{150} \alpha^2\right) + \frac{5}{24} g r^4 \alpha^4 \left(1 - \frac{77}{150} \alpha^2\right) + \varkappa H r^3 \alpha^2 + \frac{2}{3} \varkappa g r^4 \alpha^4.$$

Vernachlässigt man $\varkappa$ und setzt $H = g r (1 - \frac{4}{21} \alpha^2)$, so wird $EW \Delta_0 y = \frac{1}{1260} g r^4 \alpha^6 = \frac{1}{315} g a^2 h^2$, also $\frac{2}{3}$ so gross, als im vorigen Falle. Genauer aber wird, wenn man für H den Ausdruck 171, dabei $H_0 = g r (1 - \frac{4}{21} \alpha^2)$, $A = 0$, $B = \frac{15}{2\alpha^4}$, $\varkappa = \frac{W}{F r^2}$ setzt und relativ kleine Glieder vernachlässigt,

$$180. \quad \Delta_0 y = \frac{g a^2}{2520 E W} \frac{64 F h^4 + 7875 W a^2}{8 F h^2 + 15 W}$$

Digitized by Google

und wenn 15 W gegen 8 F h² klein ist,

$$181.\quad \Delta_0 y = \frac{g\,a^3 h^2}{315\,E\,W} + \frac{175}{448}\,\frac{g\,a^4}{E\,F\,h^2}.$$

Für den Halbkreis wird genau

$$182.\quad \Delta_0 y = \frac{5\,\pi^2 - 8\,\pi - 24}{16}\,\frac{g\,r^4}{E\,W} + \frac{\pi^2 - 4}{4}\,\frac{g\,r^2}{E\,F}$$
$$= 0{,}013455\,\frac{g\,r^4}{E\,W} + 1{,}4674\,\frac{g\,r^2}{E\,F}.$$

D. Beliebige Belastung, beliebige Form der Axe und variabeler Querschnitt.

§. 330. Horizontalschub und Formänderung. Für die beiden Verticaldrücke V, V′ gelten stets die durch das Gleichgewicht des ganzen Bogens bestimmten Gleichungen 93 (Seite 294). Zur Bestimmung des Horizontalschubes und der Formänderung wendet man hier am besten die Gleichungen 30 (Seite 276), welche nur einfache Integrale enthalten, an. Wir setzen zur Abkürzung

$$183.\quad \frac{P}{E\,F} + \frac{M}{E\,F\,r} = \mathfrak{P},\qquad \frac{M}{E\,W} + \frac{\mathfrak{P}}{r} = \frac{M}{E\,W} + \frac{P}{E\,F\,r} + \frac{M}{E\,F\,r^2} = \mathfrak{M}.$$

Alsdann wird nach 7, 8 (Seite 270), 23, 25 (Seite 274) und 30 (Seite 276):

$$\frac{\Delta\,ds}{ds} = \mathfrak{P},\qquad \frac{\Delta\,d\varphi}{ds} = \mathfrak{M},$$

$$\Delta s = \int \mathfrak{P}\,ds,\qquad \Delta\varphi = \int \mathfrak{M}\,ds;$$

$$184.\quad \begin{cases} \Delta x = -\,y \int \mathfrak{M}\,ds + \int y\,\mathfrak{M}\,ds + \int \mathfrak{P}\,dx, \\ \Delta y = +\,x \int \mathfrak{M}\,ds - \int y\,\mathfrak{M}\,ds + \int \mathfrak{P}\,dy. \end{cases}$$

Sondern wir in den letzten Gleichungen die Constanten ab, so wird

$$a.\quad \begin{cases} \Delta x = -\,y\left(\int^{s} \mathfrak{M}\,ds + A\right) + \int^{s} y\,\mathfrak{M}\,ds + \int^{x} \mathfrak{P}\,dx + B, \\ \Delta y = +\,x\left(\int^{s} \mathfrak{M}\,ds + A\right) - \int^{s} x\,\mathfrak{M}\,ds + \int^{y} \mathfrak{P}\,dy + C. \end{cases}$$

Die Anwendung dieser Gleichungen auf die beiden Kämpfer giebt, wenn wir die halbe Länge des ganzen Bogens $= b$ und die Ordinaten für die beiden Kämpfer zur Unterscheidung $= h_1$, h_2 setzen ($x = a$, $y = h_1$, $s = b$ und $x = -a$, $y = h_2$, $s = -b$):

$$b.\quad \begin{cases} 0 = -\,h\left(\int^{b} \mathfrak{M}\,ds + A\right) + \int^{b} y\,\mathfrak{M}\,ds + \int^{a} \mathfrak{P}\,dx + B, \\ 0 = -\,h\left(\int^{-b} \mathfrak{M}\,ds + A\right) + \int^{-b} y\,\mathfrak{M}\,ds + \int^{-a} \mathfrak{P}\,dx + B, \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\text{c.}\quad \begin{cases} 0 = +a\left(\int_{+b}^{b} \mathfrak{M}\,ds + A\right) - \int_{+b}^{b} x\,\mathfrak{M}\,ds + \int_{b_1}^{h_1} \mathfrak{P}\,dy + C, \\ 0 = -a\left(\int_{+b}^{b} \mathfrak{M}\,ds + A\right) - \int_{+b}^{-b} x\,\mathfrak{M}\,ds + \int_{b_2}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy + C. \end{cases}$$

Zunächst giebt die Subtraction der beiden ersten dieser Gleichungen mit Rücksicht auf den Begriff der bestimmten Integrale

$$185.\quad \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,(h - y)\,ds - \int_{+a}^{-a} \mathfrak{P}\,dx = 0.$$

Durch diese Gleichung ist nach Einsetzung der Ausdrücke für M, P und nach Ausführung der Integration der Horizontalschub H bestimmt. Die Subtraction und Addition der beiden Gleichungen c geben die Werthe für A und C. Setzt man diesen Werth für A in eine der beiden Gleichungen b, so erhält man den Werth von B. Setzt man nun die so erhaltenen Werthe von A, B, C in die Gleichungen a, so ergiebt sich mit gehöriger Berücksichtigung des Begriffs der bestimmten Integrale:

$$186.\quad \begin{cases} \Delta x = -\frac{1}{2} h \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,ds - \frac{1}{2} y \left[\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,ds\right] \\ \qquad - \frac{h-y}{2a} \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,x\,ds + \int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,y\,ds + \int_{a}^{x} \mathfrak{P}\,dx + \frac{h-y}{2a} \int_{b_1}^{b_2} \mathfrak{P}\,dy. \\ \Delta y = +\frac{1}{2} a \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,ds + \frac{1}{2} x \left[\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,ds\right] \\ \qquad - \frac{1}{2}\left[\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,x\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,x\,ds\right] - \frac{x}{2a} \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,x\,ds \\ \qquad + \frac{x}{2a} \int_{b_1}^{b_2} \mathfrak{P}\,dy + \frac{1}{2} \int_{b_1}^{y} \mathfrak{P}\,dy - \frac{1}{2} \int_{y}^{b_2} \mathfrak{P}\,dy. \end{cases}$$

Für den Scheitel vereinfachen sich diese Gleichungen, weil vor den Integralzeichen $x = 0$, $y = 0$ zu setzen ist. Noch mehr vereinfachen sich die Gleichungen bei symmetrischer Form und Belastung. Alsdann ist nämlich

$$\int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,ds = -2 \int_{0}^{b} \mathfrak{M}\,ds, \quad \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,x\,ds = 0, \quad \int_{+b}^{-b} \mathfrak{M}\,y\,ds = -2 \int_{0}^{b} \mathfrak{M}\,y\,ds,$$

$$\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,ds = 2 \int_{0}^{s} \mathfrak{M}\,ds.$$

$$\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,x\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,x\,ds = -2 \int_{s}^{b} \mathfrak{M}\,x\,ds.$$

Digitized by Google

$$\int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy = 0, \quad \int_{h_1}^{0} \mathfrak{P}\,dy = -\int_{0}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy,$$

$$\int_{h_1}^{y} \mathfrak{P}\,dy - \int_{y}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy = -2\int_{y}^{h_1} \mathfrak{P}\,dy.$$

Hierdurch ergiebt sich als Gleichung zur Bestimmung des Horizontalschubes

$$187. \quad \int_0^b \mathfrak{M}\,(h-y)\,ds - \int_0^a \mathfrak{P}\,dx = 0,$$

als Verrückungen eines beliebigen Punktes

$$188. \quad \begin{cases} \Delta x = +h\int_0^b \mathfrak{M}\,ds - y\int_0^s \mathfrak{M}\,ds - \int_s^b \mathfrak{M}\,y\,ds - \int_x^a \mathfrak{P}\,dx, \\ \Delta y = -a\int_0^b \mathfrak{M}\,ds + x\int_0^s \mathfrak{M}\,ds + \int_s^b \mathfrak{M}\,x\,ds - \int_y^{h_1} \mathfrak{P}\,dy, \end{cases}$$

und als Verrückungen des Scheitels $\Delta_0 x = 0$ und

$$189. \quad \Delta_0 y = -a\int_0^b \mathfrak{M}\,ds + \int_0^b \mathfrak{M}\,x\,ds - \int_0^{h_1} \mathfrak{P}\,dy.$$

Die Gleichungen lassen sich auch vortheilhaft in den bereits behandelten Fällen anwenden, in welchen der Querschnitt constant ist. Wir haben dies aus pädagogischen Rücksichten nicht gethan.

Im Folgenden wollen wir nur auf Bestimmung des Horizontalschubes eingehen, da es gewöhnlich genügt, die Formänderung, welche von geringerer Wichtigkeit ist, unter der Annahme eines constanten Querschnittes zu ermitteln. Der hierbei entstehende Fehler ist in der That sehr klein.

§. 331. Isolirte Last bei kreisförmiger Axe. Für P und M sind die Ausdrücke 95, 97 (Seite 294) zu setzen. Es wird für die beiden Bogentheile AE und BE:

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{EF}\left(H\cos\varphi + V\sin\varphi\right), \quad \mathfrak{P}' = -\frac{1}{EF}\left(H\cos\varphi + V'\sin\varphi\right),$$

$$\mathfrak{M} = \frac{Hr}{EW}\left(\cos\varphi - \cos\alpha\right) - \frac{Vr}{EW}\left(\sin\alpha - \sin\varphi\right) - \frac{1}{EFr}\left(H\cos\varphi + V\sin\varphi\right),$$

$$\mathfrak{M}' = \frac{Hr}{EW}\left(\cos\varphi - \cos\alpha\right) - \frac{V'r}{EW}\left(\sin\alpha + \sin\varphi\right) - \frac{1}{EFr}\left(H\cos\varphi + V\sin\varphi\right).$$

Die Gleichung 185 zur Bestimmung des Horizontalschubes geht, wenn wir $b = r\alpha$, $ds = r\,d\varphi$, $h - y = r(\cos\varphi - \cos\alpha)$ setzen, und die auf die ganze Bogenlänge AB bezüglichen Integrale in zwei auf die Bogentheile AE und EB auszudehnende Integrale zerlegen, also $\int_{+\alpha}^{-\alpha} = \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{-\alpha}$ setzen,

Digitized by Google

$$0 = H r^2 \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{(\cos\varphi - \cos\alpha)^2}{W} d\varphi - V r^3 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(\sin\alpha - \sin\varphi)(\cos\varphi - \cos\alpha)}{W} d\varphi$$

$$- V' r^3 \int_{\beta}^{-\alpha} \frac{(\sin\alpha - \sin\varphi)(\cos\varphi - \cos\alpha)}{W} d\varphi + H r \cos\alpha \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{\cos\varphi}{F} d\varphi$$

$$+ V r \cos\alpha \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\varphi}{F} d\varphi + V' r \cos\alpha \int_{\beta}^{-\alpha} \frac{\sin\varphi}{F} d\varphi.$$

In Folge der symmetrischen Form des Bogens lassen sich noch folgende Vereinfachungen erzielen. Ist $f(x)$ eine Funktion von x, welche für gleiche positive und negative x gleiche Werthe hat, und zwar 1. mit gleichem Vorzeichen, so ist

$$\int_{a}^{-a} f(x)\,dx = -2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx - \int_{\xi}^{-a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx - \left[2\int_{\xi}^{0} f(x)\,dx + \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx\right] = +2\int_{0}^{\xi} f(x)\,dx$$

und 2. mit ungleichem Vorzeichen, so ist

$$\int_{a}^{-a} f(x)\,dx = 0, \quad \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx - \int_{\xi}^{-a} f(x)\,dx = \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx$$

$$- \left[\int_{\xi}^{0} f(x)\,dx - \int_{\xi}^{0} f(x)\,dx - \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx\right] = 2\int_{\xi}^{a} f(x)\,dx.$$

Setzen wir in obiger Gleichung $V = G\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2\sin\alpha}$, $V' = G\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{2\sin\alpha}$, lösen die Parenthesen, ausser $(\cos\varphi - \cos\alpha)$ auf und wenden die oben entwickelten allgemeinen Formeln an, so ergiebt sich

190. $$2AHr^2 - Gr^2(A_1\sin\alpha - A_2\sin\beta - A_3) + 2BH\cos\alpha + B_1 G\cot\alpha\sin\beta = 0,$$

wenn wir zur Abkürzung setzen:

191.
$$\begin{cases} A = \int_{0}^{\alpha} \frac{(\cos\varphi - \cos\alpha)^2}{W} d\varphi, & A_1 = \int_{0}^{\alpha} \frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{W} d\varphi, \\ A_2 = \int_{0}^{\beta} \frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{W} d\varphi, & A_3 = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sin\varphi(\cos\varphi - \cos\alpha)}{W} d\varphi, \\ B = \int_{0}^{\alpha} \frac{\cos\varphi}{F} d\varphi, & B_1 = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sin\varphi}{F} d\varphi. \end{cases}$$

Digitized by Google

Die Integrale berechnet man am besten nach der Simpson'schen Regel oder einer anderen Methode zur Berechnung des Flächeninhaltes krummliniger Figuren. Die Genauigkeit wird erhöht, wenn man $\frac{1}{W} = \frac{1}{W_0}(1+\varepsilon)$, $\frac{1}{F} = \frac{1}{F_0}(1+\delta)$ setzt, wobei W_0, F_0 das mittlere Trägheitsmoment und die mittlere Querschnittsfläche bezeichnen. Somit besteht nun $\frac{1}{W}$ und $\frac{1}{F}$ aus einem constanten und einem variabelen Theile und für den ersten Theil, welcher für gewöhnlich den Hauptttheil ausmacht, kann man die Integration genau ausführen. Es ergiebt sich nämlich

192.
$$\left\{\begin{array}{l}
A\,W_0 = \frac{1}{2}(\alpha + 2\,\alpha\cos^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha) + \int_0^\alpha \varepsilon\,(\cos\varphi - \cos\alpha)^2\,d\varphi,\\[2ex]
A_1\,W_0 = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha + \int_0^\alpha \varepsilon\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi,\\[2ex]
A_2\,W_0 = \sin\beta - \beta\cos\alpha + \int_0^\beta \varepsilon\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi,\\[2ex]
A_3\,W_0 = \frac{1}{2}\left[\sin^2\alpha - \sin^2\beta - 2\cos\alpha(\cos\beta - \cos\alpha)\right] + \int_\beta^\alpha \varepsilon\sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\alpha)\,d\varphi,\\[2ex]
B\,F_0 = \sin\alpha + \int_0^\alpha \delta\cos\varphi\,d\varphi, \quad B_1\,F_0 = \cos\beta - \cos\alpha + \int_\beta^\alpha \delta\sin\varphi\,d\varphi.
\end{array}\right.$$

Beispiel. Es sei $\alpha = 30^0$, $r = 50^{mm} = 500^{dc}$. Die Flächeninhalte und Trägheitsmomente der Querschnitte seien durch folgende Tabelle bestimmt.

φ	F	W	$\frac{1}{F}$	$\frac{1}{W}$	δ	ε
0	7,7	297	0,130	0,00337	+ 0,012	+ 0,00031
0,2	8,4	324	0,119	0,00309	+ 0,001	+ 0,00003
0,4	9,9	385	0,101	0,00260	− 0,017	− 0,00046
0,6	10,2	393	0,098	0,00255	− 0,020	− 0,00051
0,8	8,6	335	0,116	0,00299	− 0,002	− 0,00007
1	5,4	210	0,185	0,00476	+ 0,067	− 0,00170
α	□ Decim.	Decim. Mittel	0,118	0,00306		

Also ist $F_0 = 8{,}5$ □ Decim., $W_0 = 328$ Decim.

Wenden wir zur Berechnung der Integrale die bekannte Trapezialformel an, bei welcher man sich die in Rede stehende Fläche in Trapeze zerlegt denkt, so ist

$$\int y\,dx = e\,(\tfrac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,y_n),$$

wenn y_0, y_1, y_2 ... die Werthe von y für gleichviel, nämlich um e, von einander verschiedene Werthe von x bezeichnen. Hiernach wird

Digitized by Google

$$A\,W_0 = \tfrac{1}{2}\,(\text{Arc}\,30^0 + 2\,\text{Arc}\,30^0\cos^2 30^0 - 3\sin 30^0\cos 30^0)$$
$$+\frac{\text{Arc}\,30^0}{5}\left[\tfrac{1}{2}\,0{,}00031\,(\cos 0 - \cos 30^0)^2 + 0{,}00003\,(\cos 6^0 - \cos 30^0)^2 - 0{,}00046\,(\cos 12^0 - \cos 30^0)^2\right.$$
$$\left. - 0{,}00051\,(\cos 18^0 - \cos 30^0)^2 - 0{,}00007\,(\cos 24^0 - \cos 30^0)^2 + \tfrac{1}{2}\,0{,}00170\,(\cos 30^0 - \cos 30^0)^2\right]$$
$$= 0{,}0049793 + 0{,}1047\,(0{,}0000028 + 0{,}0000005 - 0{,}0000058 - 0{,}0000029 - 0{,}0000002 + 0)$$
$$= 0{,}0049793 - 0{,}0000006 = 0{,}0049787.$$

In ganz gleicher Weise ergiebt sich (beispielsweise für $\beta = 0{,}4$. $\alpha = 12^0$):

$$A_1\,W_0 = 0{,}0465502 - 0{,}0000072 = 0{,}0465425,$$
$$A_2\,W_0 = 0{,}0265318 - 0{,}0000001 = 0{,}0265317,$$
$$A_3\,W_0 = 0{,}0062857 - 0{,}0000018 = 0{,}0062839,$$
$$B\,F_0 = 0{,}500000 - 0{,}000155 = 0{,}499845,$$
$$B_1\,F_0 = 0{,}112122 + 0{,}000662 = 0{,}112784.$$

Dies in die Gleichung 189 eingesetzt, giebt

$$0{,}0099574\,\frac{H\,r^2}{W_0} - 0{,}0114711\,\frac{G\,r^2}{W_0} + 0{,}86576\,\frac{H}{F_0} + 0{,}04062\,\frac{G}{F_0} = 0,$$

$$H = \frac{0{,}0114711 - 0{,}04062\,\varkappa_0}{0{,}0099574 + 0{,}86576\,\varkappa_0}\,G.$$

Nun aber ist $\varkappa_0 = \dfrac{W_0}{F_0\,r^2} = \dfrac{327}{8{,}5\,.\,500^2} = 0{,}000154$, daher

$$H = \frac{0{,}0114648}{0{,}0100937}\,G = 1{,}13584\,G.$$

Bei constantem Querschnitte würde

$$H = \frac{0{,}0114732 - 0{,}04038\,\varkappa_0}{0{,}0099586 + 0{,}86603\,\varkappa_0}\,G = 1{,}13625\,G.$$

Ohne Rücksicht auf $\varkappa$ würde

$$H = \frac{0{,}0114711}{0{,}0099574}\,G = 1{,}15202\,G.$$

also nur 1,4 Procent zu gross. Das Beispiel zeigt, dass man bei Annahme eines constanten Querschnittes, wenn die Veränderung des Querschnittes nicht bedeutend ist, nur einen sehr kleinen Fehler begeht.

§. 332. Gleichmässige Belastung der Horizontalen.

Nach 183 wird mit Berücksichtigung der Ausdrücke 101 (Seite 297) für P und M:

$$\mathfrak{P} = -\frac{1}{E\,F}\left[H\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\,q\,r\,(\sin^2\alpha + \sin^2\varphi)\right],$$

$$\mathfrak{M} = \frac{r}{E\,W}\left[H\,(\cos\varphi - \cos\alpha) - \tfrac{1}{2}\,q\,r\,(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha)\right]$$
$$- \frac{1}{E\,F\,r}\left[H\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\,q\,r\,(\sin^2\alpha + \sin^2\varphi)\right].$$

Setzt man dies in 187 ein und ausserdem $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$, $h - y = r\,(\cos\varphi - \cos\alpha)$, so ergiebt sich nach Reduction auf H:

$$193.\quad H = \frac{1}{2}\,q\,r\,\frac{\displaystyle\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W}\,(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha)\,(\cos\varphi - \cos\alpha) - \frac{\cos\alpha}{r^2}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}\,(\sin^2\alpha + \sin^2\varphi)}{\displaystyle\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W}\,(\cos\varphi - \cos\alpha)^2 + \frac{\cos^2\alpha}{r^2}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}.$$

Die Integrale sind in gleicher Weise, wie im vorigen §. zu berechnen.

Digitized by Google

Beispiel. Für das im vorigen §. behandelte Beispiel ergiebt sich

$$H = \frac{0{,}0091952 - 0{,}17645\,\varkappa_0}{0{,}0099574 + 0{,}86576\,\varkappa_0}\,q\,r$$
$$= \frac{0{,}0091680}{0{,}0100907}\,q\,r = 0{,}90856\,q\,r.$$

Bei constantem Querschnitte würde sich

$$H = \frac{0{,}0091958 - 0{,}17619\,\varkappa_0}{0{,}0099586 + 0{,}86603\,\varkappa_0} = 0{,}90850\,q\,r$$

ergeben.

Eine gleichmässige Belastung der Bogenaxe tritt in der Wirklichkeit nur durch das Eigengewicht des Bogens ein und setzt dann einen constanten Querschnitt voraus. Dieser Fall hat also hier, wo es sich um einen variabelen Querschnitt handelt, keinen Sinn, so dass wir ihn übergehen.

XXXVIII. Kapitel.

Bogen ohne Gelenk und mit eingespannten Kämpfern.

§. 333. Einleitung. Bei den Bogenträgern mit Kämpfergelenken gehen die Kämpferdrücke durch ganz bestimmte Punkte, nämlich durch die Axen der Gelenke. Wenn aber die Bogenenden in der Widerlagsmasse eingespannt sind oder wenn sie sich so gegen das Widerlager stemmen, dass eine Drehung der Kämpferquerschnitte unmöglich ist, so gehen die Kämpferdrücke nicht mehr durch bestimmte Punkte. Bei den Bogenträgern mit Kämpfergelenken waren die Momente an den Kämpfern Null; hier dagegen existiren auch für die Kämpferquerschnitte gewisse Momente M_1, M_2, die als neue Unbekannte hinzukommen. Zu ihrer Bestimmung kommen aber auch zwei neue Bedingungen hinzu, nämlich die, dass sich die Richtung der Tangente an den Kämpfern nicht ändert oder dass für die Kämpfer $\Delta\varphi = 0$ ist.

Bei den Bogenträgern mit Kämpfergelenken haben wir immer den zwischen einem Bogenende und einem beliebigen Querschnitte liegenden Körpertheil in Betracht gezogen. Hier dagegen wollen wir immer einen Körpertheil, welcher zwischen dem Scheitelquerschnitte und einem beliebigen Querschnitte liegt, in Betracht ziehen. Beide Wege führen natürlich zu demselben Ziele; der hier gewählte Weg ist aber im vorliegenden Falle etwas einfacher, als der vorige.

Demgemäss denken wir uns den Bogen im Scheitelquerschnitte durchschnitten. Die von der einen Bogenhälfte auf die andere ausgeübte Kraft zerlegen wir in eine in der Ebene des Querschnittes wirkende Verticalkraft V und eine Horizontalkraft H, den sogenannten Horizontalschub. Der Abstand der letzteren von der horizontalen Schweraxe des Querschnittes sei e_0 und das Moment $-H e_0$ für den Scheitelquerschnitt $= M_0$.

A. Isolirte Last.

§. 334. Allgemeines. Wir setzen zunächst voraus, dass nur eine isolirte Last G (Fig. 111) vorhanden sei. Wir bezeichnen, wie früher

Digitized by Google

für Querschnitte, welche zwischen dem Kämpfer A und dem Angriffspunkte E der Last liegen, Alles ohne Apostroph; für Querschnitte aber, welche zwischen E und dem anderen Kämpfer B liegen, Alles mit Apostroph. Alsdann ergiebt sich leicht

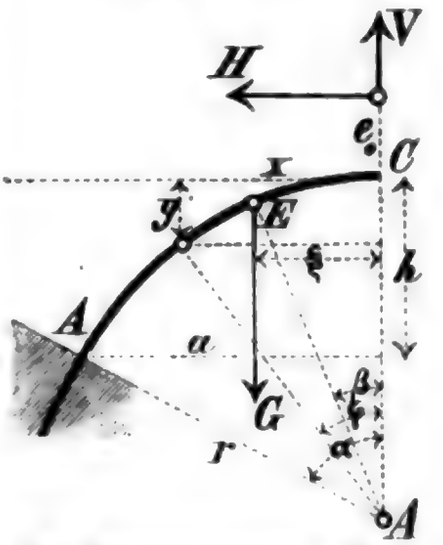
$$194. \quad \begin{cases} P = -H\cos\varphi - (G - V)\sin\varphi, & P' = -H\cos\varphi + V\sin\varphi; \\ Q = -H\sin\varphi + (G - V)\cos\varphi, & Q' = -H\sin\varphi - V\sin\varphi, \end{cases}$$

und $M = -H(e_0 + y) - Vx + G(x - \xi)$, $M' = -H(e_0 + y) - Vx$,
d. i., weil $-He_0 = M_0$ ist,

$$195. \quad M = M_0 - Hy - Vx + G(x - \xi), \quad M' = M_0 - Hy - Vx.$$

Die beiden von den Widerlagern auf den Bogen ausgeübten Reactionen, die wir **Kämpferdrücke** nennen und auch hier mit D, D′ bezeichnen, schneiden sich wiederum in einem Punkte L, welcher in der Richtung der Last g liegt, da sonst die drei auf den Bogen wirkenden Kräfte D, D′, G nicht im Gleichgewichte sein könnten. Wir nennen auch hier die Linie JK, welche der Punkt E bei variabeler Lage der Last G beschreibt, die **Kämpferdrucklinie**. Die Gleichung derselben lässt sich, wenn V, H, M_0 bekannt sind, leicht bestimmen. Die auf den Bogentheil BE wirkende Kraft D′ ist die Resultante aus V und H. Setzen wir daher $NL = \eta$, und ist O der Durchschnitt der Richtung $L\Psi$ des Kämpferdruckes D′ mit der Verlängerung von MC, so ist $\eta = CO + CN\cot\angle L\Psi K = e_0 + \xi\frac{V}{H}$, oder, weil $e_0 = -\frac{M_0}{H}$ ist,

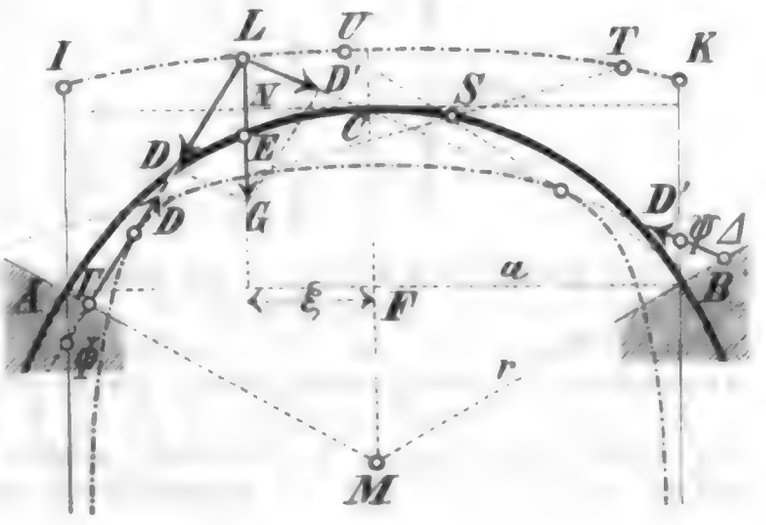
Fig. 111.



$$196. \quad \eta = \frac{V\xi - M}{H}.$$

Die Richtung der Kämpferdrücke lässt sich in bequemer Weise auf doppelte Art angeben. Zunächst durch Bestimmung der Durchschnittspunkte Φ und Ψ der Kämpferdrücke mit den Verticalen, welche durch die Schwerpunkte A, B der Kämpferquerschnitte gehen. Setzt man $A\Phi = c_1$, $B\Psi = c_2$ und nimmt c_1, c_2 nach oben als positiv an, so wird $M_1 = -Hc_1$, $M_2 = -Hc_2$, also

Fig. 112.



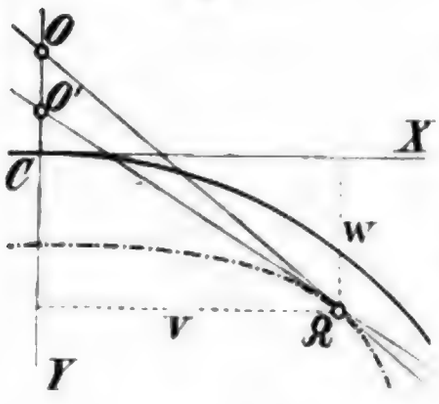
Digitized by Google

$$197.\quad c_1 = -\frac{M_1}{H},\quad c_2 = -\frac{M_2}{H}.$$

Ist c_1, c_2 der Abstand der Durchschnitte der Kämpferdrücke mit den Endquerschnitten von der Axe, P_1, P_2 die Axialkraft an den Kämpfern, so ist $e_1 = \frac{M_1}{P_1}$, $e_2 = \frac{M_2}{P_2}$, wodurch ebenfalls die Richtung der Kämpferdrücke bestimmt ist. Jedoch ist die Berechnung von c_1, c_2 bequemer, als die von e_1, e_2.

Unter Umständen kann aber die Bestimmung durch diejenige Linie, welche von allen Kämpferdrücken berührt oder welche von den Kämpferdrücken umhüllt wird, bequemer sein. Wir nennen diese Linie die Kämpferdruck-Umhüllungslinie. Die Gleichung derselben lässt sich in folgender Weise ermitteln (Fig. 113).

Fig. 113.



Wir bezeichnen den horizontalen und verticalen Abstand eines beliebigen Punktes Ω der Kämpferdruck-Umhüllungslinie vom Scheitel mit v, w. Ω lässt sich als Durchschnittspunkt der Richtungen der Kämpferdrücke ansehen, welche einer unendlich kleinen Verrückung der Last entsprechen. Sind nun c, $c + dc$ die Abstände der Durchschnitte O, O' die Kämpferdrücke mit den durch C gehenden Verticalen von C, γ, $\gamma + d\gamma$ die Winkel zwischen den Kämpferdrücken und der Verticalen, so ist

$$v = (w + c)\tan\gamma,\quad v = (w + c + dc)\tan(\gamma + d\gamma).$$

Die Elimination von v aus diesen beiden Gleichungen giebt

$$w = -\frac{(c + dc)\tan(\gamma + d\gamma) - c\tan\gamma}{\tan(\gamma + d\gamma) - \tan\gamma} = -\frac{d(c\tan\gamma)}{d\tan\gamma}.$$

Die erste der beiden Gleichungen giebt nun

$$v = -\frac{dc}{d\tan\gamma}\tan^2\gamma.$$

Nun aber ist $\tan\gamma = \frac{H}{V}$, $c = -\frac{M_0}{H}$, $c\tan\gamma = -\frac{M_0}{V}$, daher

$$198.\quad \begin{cases} v = \dfrac{d\left(\frac{M_0}{H}\right)}{d\left(\frac{H}{V}\right)}\left(\frac{H}{V}\right)^2 = \dfrac{H\,dM_0 - M_0\,dH}{V\,dH - H\,dV}, \\ w = \dfrac{d\left(\frac{M_0}{V}\right)}{d\left(\frac{H}{V}\right)} = \dfrac{V\,dM_0 - M_0\,dV}{V\,dH - H\,dV} \end{cases}$$

Die Kämpferdrucklinie und die Kämpferdruck-Umhüllungslinie bieten auch hier ein sehr bequemes Mittel, bei gegebener Lage der Last die Kämpferdrücke, sowie die Grössen von P, Q, M zu construiren und das Vorzeichen der Faserspannungen für irgend einen beliebigen Querschnitt zu bestimmen. Die Construction ist der in §. 309 besprochenen gleich; nur treten hier anstatt der Geraden, welche durch die Kämpferpunkte gehen, Gerade auf, welche die Kämpferdruck-Umhüllungslinie tangiren.

Digitized by Google

a) Flacher Parabelbogen mit constantem Querschnitte.

§. 335. Bestimmung der Fundamentalgrössen. Wir setzen $y = h\frac{x^2}{a^2}$, $dy = 2\frac{h\,x}{a^2}dx$, $ds = dx$. Mit Berücksichtigung der Ausdrücke 195 für M, M′ wird nach 26 (Seite 274), wenn man für y und ds die eben aufgestellten Ausdrücke setzt und die Integration ausführt,

$$\begin{cases} E\,W\,\Delta\varphi = x\left[M_0 - \frac{1}{3}\frac{H\,h}{a^2}x^2 - \frac{1}{2}V\,x + \frac{1}{2}G\,(x-2\,\xi)\right] + A, \\ E\,W\,\Delta\varphi' = x\left[M_0 - \frac{1}{3}\frac{H\,h}{a^2}x^2 - \frac{1}{2}V\,x\right] + A'. \end{cases}$$

Für $x = \xi$ muss $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$ werden, daher $\frac{1}{2}G\,(\xi - 2\,\xi)\,\xi + A = A'$, oder

$$\text{I.}\quad A - A' = \tfrac{1}{2}G\,\xi^2.$$

Für $x = a$ muss $\Delta\varphi = 0$ und für $x = -a$ muss $\Delta\varphi' = 0$ werden, daher

$$\begin{cases} 0 = +a\left[M_0 - \frac{1}{3}H\,h - \frac{1}{2}V\,a + \frac{1}{2}G\,(a-2\,\xi)\right] + A, \\ 0 = -a\left[M_0 - \frac{1}{3}H\,h + \frac{1}{2}V\,a\right] + A'. \end{cases}$$

Die Addition und Subtraction dieser Gleichungen, die letztere mit Berücksichtigung des für $A - A'$ gefundenen Werthes, giebt

$$\text{II.}\quad A + A' = V\,a^2 - \tfrac{1}{2}G\,a\,(a-2\,\xi).$$

$$\text{III.}\quad 2\,M_0\,a - \tfrac{2}{3}H\,a\,h + \tfrac{1}{2}G\,(a-\xi)^2 = 0.$$

Aus I und II folgt nun

$$\text{a.}\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}V\,a^2 - \frac{1}{4}G\,(a^2 - 2\,a\,\xi - \xi^2), \\ A' = \frac{1}{2}V\,a^2 - \frac{1}{4}G\,(a^2 - 2\,a\,\xi + \xi^2). \end{cases}$$

Als horizontale und verticale Verrückung eines beliebigen Punktes ergiebt sich nun nach 31 (Seite 276) nach Ausführung der Integration:

199.
$$\begin{cases} E\,W\,\Delta x = -\frac{2\,h}{a^2}\left[\frac{1}{3}M_0\,x^3 - \frac{H\,h}{15\,a^2}x^5 - \frac{1}{8}V\,x^4 + \frac{1}{2}G\,(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}\xi\,x^3) + \frac{1}{2}A\,x^2 + B\right], \\ E\,W\,\Delta x' = -\frac{2\,h}{a^2}\left[\frac{1}{3}M_0\,x^3 - \frac{H\,h}{15\,a^2}x^5 - \frac{1}{8}V\,x^4 + \frac{1}{2}A'\,x^2 + B'\right]; \\ E\,W\,\Delta y = \frac{1}{2}M_0\,x^2 - \frac{H\,h}{12\,a^2}x^4 - \frac{1}{6}(V-G)\,x^3 - \frac{1}{2}G\,\xi\,x^2 + A\,x + C, \\ E\,W\,\Delta y' = \frac{1}{2}M_0\,x^2 - \frac{H\,h}{12\,a^2}x^4 - \frac{1}{6}V\,x^3 + A'\,x + C'. \end{cases}$$

Für $x = \xi$ muss $\Delta x = \Delta x'$ und $\Delta y = \Delta y'$ werden; daher $B - B' = \frac{5}{24}G\,\xi^4 - \frac{1}{2}(A - A')\,\xi^2$ und $C - C' = \frac{1}{3}G\,\xi^3 - (A - A')\,\xi$, d. i.

$$\text{IV.}\quad B - B' = -\tfrac{1}{24}G\,\xi^4,$$

$$\text{V.}\quad C - C' = -\tfrac{1}{6}G\,\xi^3.$$

Für $x = a$ wird $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ und für $x = -a$ wird $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$, daher

$$\begin{cases} 0 = +\frac{1}{3}M_0\,a^3 - \frac{1}{15}H\,h\,a^3 - \frac{1}{8}V\,a^4 + \frac{1}{24}G\,a^3(3\,a - 8\,\xi) + \frac{1}{2}A\,a^2 + B, \\ 0 = -\frac{1}{3}M_0\,a^4 + \frac{1}{15}H\,h\,a^3 - \frac{1}{8}V\,a^4 + \frac{1}{2}A'\,a^2 + B'; \\ 0 = +\frac{1}{2}M_0\,a^2 - \frac{1}{12}H\,h\,a^2 - \frac{1}{6}(V-G)\,a^3 - \frac{1}{2}G\,\xi\,a^2 + A\,a + C, \\ 0 = +\frac{1}{2}M_0\,a^2 - \frac{1}{12}H\,h\,a^2 + \frac{1}{6}V\,a^3 - A'\,a + C'. \end{cases}$$

Digitized by Google

Die Addition und Subtraction der beiden ersten und der beiden letzten Gleichungen giebt, wenn man hierbei für $A + A'$, $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$ die bereits gefundenen Werthe einführt:

VI. $B + B' = -\frac{1}{4} V a^4 + \frac{1}{24} G a^3 (3a - 4\xi)$,

VII. $2 M_0 a^3 - \frac{2}{5} H h a^3 + \frac{1}{8} G (3a^4 - 8a^3\xi + 6a^2\xi^2 - \xi^4)$;

VIII. $C + C' = -M_0 a^2 + \frac{1}{6} H h a^2 - \frac{1}{6} G a (a^2 - 3a\xi + 3\xi^2)$.

IX. $\frac{2}{3} V a^3 - \frac{1}{6} G (2a^3 - 3a^2\xi + \xi^3)$.

Die Gleichungen III und VII enthalten als Unbekannte nur H und M_0; die Auflösung giebt

$$200.\quad H = \frac{15}{32} G \frac{(a^2 - \xi^2)^2}{a^3 h},$$

$$201.\quad M_0 = -\frac{1}{32} G \frac{(a - \xi)^2 (3a^2 - 10a\xi - 5\xi^2)}{a^3}.$$

Die Gleichung IX bestimmt V direkt; sie giebt

$$202.\quad V = \frac{1}{4} G \frac{2a^3 - 3a^2\xi + \xi^3}{a^3} = \frac{1}{4} G \frac{(a - \xi)^2 (2a + \xi)}{a^3}.$$

Hiernach ist folgende Tabelle berechnet:

ξ	H	V	M_0	ξ	H	V	M_0
0	0,4688	0,5000	− 0,09375	0,5	0,2637	0,1563	+ 0,02539
0,1	0,4594	0,4252	− 0,04936	0,6	0,1920	0,1040	+ 0,02400
0,2	0,4320	0,3520	− 0,01606	0,7	0,1219	0,0607	+ 0,01814
0,3	0,3882	0,2818	+ 0,00689	0,8	0,0607	0,0280	+ 0,01025
0,4	0,3308	0,2160	+ 0,02025	0,9	0,0169	0,0073	+ 0,00314
0,5	0,2637	0,1562	+ 0,02539	1,0	0	0	0
. a	. $G\frac{a}{h}$	. G	. G a	. a	. $G\frac{a}{h}$	. G	. G a

§. 336. Construction.

a) Kämpferdrucklinie. Nach 196 (Seite 329) wird

$$H\eta = V\xi - M_0$$
$$= \frac{G(a - \xi)^2}{32 a^3} \left[8(2a + \xi)\xi + 3a^2 - 10a\xi - 5\xi^2 \right]$$
$$= \frac{3}{32} \frac{G(a - \xi)^2}{a^3} (a + \xi)^2 = \frac{1}{5} H h,$$

mithin ist

$$203.\quad \eta = \frac{1}{5} h.$$

Die Kämpferdrucklinie ist also eine horizontale Gerade, welche um $\frac{1}{5}$ der Stichhöhe über dem Scheitel liegt.

b) Kämpferdruck-Umhüllungslinie. Nach 200, 202 und 201 wird

Digitized by Google

$$\frac{dH}{d\xi} = -\frac{15\,G\,(a^2-\xi^2)\,\xi}{8\,a^3 h},$$
$$\frac{dV}{d\xi} = -\frac{3\,G\,(a^2-\xi^2)}{4\,a^3},$$
$$\frac{dM_u}{d\xi} = +\frac{G\,(a-\xi)\,(4\,a^2-5\,a\,\xi-5\,\xi^2)}{8\,a^3}.$$

Dies in 198 eingesetzt, giebt als Coordinaten für die Kämpferdruck-Umhüllungslinie nach gehöriger Reduction:

$$204.\quad \begin{cases} v = \dfrac{2\,a^2}{3\,a+\xi}, \\ w = \dfrac{(23\,a^2+20\,a\,\xi+5\,\xi^2)\,h}{15\,(a+\xi)\,(3\,a+\xi)}. \end{cases}$$

Für $\xi = 0$ wird $v = \frac{2}{3}a$, $w = \frac{23}{45}h$. Für $\xi = a$ wird $v = \frac{1}{2}a$, $w = \frac{2}{5}h$ und für $\xi = -a$ wird $v = a$, $w = -\infty$. Die Elimination von ξ aus beiden Gleichungen giebt

$$205.\quad w = \frac{5\,a^2-5\,a\,v+2\,v^2}{15\,a\,(a-v)}\,h.$$

Hieraus ergiebt sich leicht, dass für die Kämpferdrücke auf jeder Seite die Umhüllungslinie eine Hyperbel ist, welche die Verticale durch den betreffenden Kämpfer und ausserdem eine geneigte Gerade zur Asymptote hat. Die letztere schneidet die Symmetrieaxe $\frac{1}{5}h$ unter dem Scheitel, die Scheiteltangente in der Entfernung $\frac{3}{2}a$ vom Scheitel und die Sehne in der Entfernung $-6a$ von der Schnenmitte. Das Centrum der Hyperbel liegt $\frac{1}{15}h$ unter der Horizontalen durch den Scheitel.

Die für verschiedene ξ berechneten Coordinaten sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

ξ	v	w	ξ	v	w
—	+	+	+	+	+
1	1,0000	∞	0	0,6667	0,5111
0,9	0,9524	2,7721	0,1	0,6452	0,4897
0,8	0,9091	1,5455	0,2	0,6249	0,4722
0,7	0,8695	1,1065	0,3	0,6061	0,4577
0,6	0,8334	0,9999	0,4	0,5882	0,4463
0,5	0,8000	0,7600	0,5	0,5714	0,4349
0,4	0,7693	0,6756	0,6	0,5555	0,4258
0,3	0,7407	0,6155	0,7	0,5405	0,4160
0,2	0,7144	0,5714	0,8	0,5263	0,4102
0,1	0,6897	0,5377	0,9	0,5128	0,4053
0	0,6667	0,5111	1	0,5000	0,4000
. a	. a	. h	. a	. a	. h

Hiernach ist auf Taf. XII in Fig. 5 und 6 die graphische Darstellung erfolgt.

§. 337. Beanspruchung. P ergiebt sich in allen Querschnitten als negativ; M dagegen ist zum Theil positiv, zum Theil negativ.

Digitized by Google

Zum analytischen Maximum wird sowohl die Axialkraft P, als auch das Moment M, mithin auch die Spannung der gespanntesten Faser in denjenigen Punkten R_1, R_2, des Bogens, in welchen die Tangente den Kämpferdrücken parallel ist. Zum wirklichen Maximum kann die Spannung der gespanntesten Faser aber auch an den Kämpfern A, B und am Angriffspunkte E der Last werden. Für die Punkte R_1, R_2 wird $\frac{dM}{dx} = 0$, $\frac{dM'}{dx} = 0$, d. i. nach 195, wenn wir die betreffenden x mit x′, x″ bezeichnen,

$$206.\quad x' = +\frac{(G-V)\,a^2}{2\,H\,h},\quad x'' = -\frac{V\,a^2}{2\,H\,h}.$$

Die analytischen Maxima von M bezeichnen wir mit M′, M″, die Momente an den Kämpfern A, B mit M_1, M_2 und das Moment am Angriffspunkte E der Last mit M_3. Nach 195 ergiebt sich leicht:

$$207.\quad \begin{cases} M_1 = -\dfrac{G\,(a^2-\xi^2)\,(a+\xi)\,(a-5\,\xi)}{16\,a^3}, \\ M_2 = -\dfrac{G\,(a^2-\xi^2)\,(a-\xi)\,(a+5\,\xi)}{16\,a^3}, \\ M_3 = -\dfrac{3\,G\,(a^2-\xi^2)^2\,(a^2+5\,\xi^2)}{32\,a^5}; \end{cases}$$

$$208.\quad \begin{cases} M' = \dfrac{G\,(a+\xi)^2\,(19\,a^4-124\,a^3\xi+346\,a^2\xi^2-300\,a\,\xi^3+75\,\xi^4)}{480\,a^3\,(a-\xi)^2}, \\ M'' = \dfrac{G\,(a-\xi)^2\,(19\,a^4+124\,a^3\xi+346\,a^2\xi^2+300\,a\,\xi^3+75\,\xi^4)}{480\,a^3\,(a+\xi)^2}. \end{cases}$$

Zum absoluten Maximum wird M_1 für $5\,\xi^3+3\,a\,\xi^2-3\,a^2\xi-a^3=0$, d. i. für $\xi = 0{,}690\,a$; M_2 für $5\,\xi^3-3\,a\,\xi^2-3\,a^2\xi+a^3=0$, d. i. für $\xi = 0{,}290\,a$ und M_3 für $\xi^2 = \frac{1}{5}\,a^2$ oder $\xi = 0{,}447\,a$ und zwar ist $\max M_1 = +0{,}1356\,G\,a$, $\max M_2 = -0{,}0996\,G\,a$ und $\max M_3 = -\frac{3}{25}\,G\,a = -0{,}1200\,G\,a$. Endlich wird M′ zum wirklichen Maximum für $\xi = 0$, M″ zum wirklichen und analytischen Maximum für $\xi = 0{,}299\,a$ und zwar ist $\max M' = +0{,}0396\,G\,a$, $\max M'' = +0{,}0580\,G\,a$. Demnach ist $\max M_1$ das absolute positive, $\max M_3$ das absolute negative Maximum von M oder M wird zum absoluten positiven Maximum für $\xi = 0{,}690\,a$, $x = +a$, zum absoluten negativen Maximum für $x = \xi = 0{,}447\,a$ und zwar ist

$$209.\quad \max(+M) = 0{,}1356\,G\,a,\quad \max(-M) = 0{,}1200\,G\,a;$$

$\max(+M)$ ist kleiner, $\max(-M)$ grösser, als beim Bogen mit Kämpfergelenken (Formel 142, Seite 311).

Die Axialkraft P ist bei kleinen Stichhöhen, welche wir hier voraussetzen, fast constant = H.

In folgender Tabelle sind die Hauptgrössen für verschiedene Lagen der Last zusammengestellt.

ξ	x′	x″	$P = H$	M_1	M′	M_3	M″	M_2
	+	−	−	−	+	−	+	−
0	0,533	0,533	0,4688	0,0625	0,0396	0,0938	0,0396	0,0625
0,2	0,750	0,407	0,4320	0,0001	0,0269	0,1037	0,0556	0,0961

Digitized by Google

ξ	x′	x″	$P = H$	M_1	M′	M_3	M″	M_2
	+	−	−	+	+	−	+	−
0,329	1,000	0,352	0,3728	0,0478	0	0,1145	0,0573	0,0989
0,4	—	0,327	0,3308	0,0735	—	0,1191	0,0555	0,0946
0,6	—	0,271	0,1920	0,1280	—	0,1075	0,0381	0,0640
0,8	—	0,231	0,0608	0,1215	—	0,0510	0,0135	0,0225
1	—	0,200	0	0	—	0	0	0
. a	. a	. a	$. G \frac{a}{h}$	. G a	. G a	. G a	. G a	. G a

Da P in allen Querschnitten nahezu $= H$ ist, so wird die Spannung der gespanntesten Fasern in denselben Querschnitten zum Maximum, wie die Momente, also für $x = +a$ oder $x = 0{,}447\,a$. Bezeichnen wir die betreffenden Spannungen mit N_1, N_3 und die Abstände der obersten und untersten Fasern von der horizontalen Schweraxe mit e_1, e_2, so ist, wenn wir nur einen Bruch durch Zerdrücken voraussetzen:

$$N_1 = -\frac{3\,G\,(a^2-\xi^2)}{32\,a^3}\left[\frac{5\,(a^2-\xi^2)}{F\,h} - \frac{2\,(a^2-4\,a\,\xi-5\,\xi^2)\,e_2}{W}\right],$$

$$N_3 = -\frac{3\,G\,(a^2-\xi^2)^2}{32\,a^3}\left[\frac{5}{F\,h} + \frac{(a^2+5\,\xi^2)\,e_1}{W\,a^2}\right].$$

Zum absoluten Maximum wird

$$N_1 \text{ für } 5\,\xi^3 + 3\,a\,\xi^2 - 3\,a^2\,\xi - a^3 = -\frac{5\,W\,(a^2-\xi^2)\,\xi}{2\,F\,h\,e_2},$$

$$N_2 \text{ für } 5\,a\,\xi^2 - a^3 = -\frac{10\,W\,a^3}{3\,F\,h\,e_1}.$$

In speciellen Fällen sind diese Gleichungen leicht aufzulösen. In der Regel aber ist die rechte Seite gegen a^3 so klein, dass die Wurzeln der Gleichungen fast dieselben sind, als wenn die rechte Seite $= 0$ wäre. N_1, N_3 werden also fast für dasselbe ξ zum Maximum, wie M_1, M_3. Für $\xi = 0{,}690\,a$ wird $H = 0{,}1286\,G\,\frac{a}{h}$ und für $\xi = 0{,}447\,a$ wird $H = 0{,}3001\,G\,\frac{a}{h}$. Daher sind die Festigkeitsbedingungen für eine veränderliche Lage der Last annähernd:

$$210.\quad \begin{cases} \mathfrak{R} = 0{,}1356\,G\,\frac{a\,e_2}{W} + 0{,}1286\,G\,\frac{a}{F\,h}, \\ \mathfrak{R} = 0{,}1200\,G\,\frac{a\,e_1}{W} + 0{,}3001\,G\,\frac{a}{F\,h}. \end{cases}$$

Beispiel. Es sei $a = 200^c$, $h = 100^c$, $G = 6000$ Klgr., $\mathfrak{R} = 800$ Klgr. pro $\square^c$ (für Gusseisen). Der Querschnitt sei symmetrisch I-förmig mit der Höhe c, die Breite 0,5 c, der Stegdicke 0,1 c und der Gurtdicke 0,15 c. Es wird alsdann $e_1 = e_2 = 0{,}5\,c$, $F = 0{,}22\,c^2$, $W = 0{,}08023\,c^4$. Dies in die vorigen Gleichungen eingesetzt, giebt nach Wegschaffung der Brüche

$$c^3 = 3366 + 8{,}77\,c,$$
$$c^3 = 2978 + 20{,}46\,c.$$

Vernachlässigt man die zweiten Glieder der rechten Seite, so ergiebt sich $c = 14{,}94$, $c = 14{,}38$. Daher wird nun genauer $c = 15{,}18$, $c = 14{,}86$.

Die rechten Seiten der Gleichungen 210 werden nun $-0{,}689.\ \frac{c}{h}(a^2 - \xi^2)\,\xi = -0{,}1046\,(a^2 - \xi^2)\,\xi$ und $-0{,}917\,\frac{c}{h}\,a^3 = -0{,}1363\,a^3$. Die Auflösung dieser Gleichungen giebt nun $\xi = 0{,}684\,a$, $\xi = 0{,}416\,a$, während M_1, M_2 für $\xi = 0{,}690\,a$, $\xi = 0{,}447\,a$ zum Maximum werden. Die hiernach für c berechneten Werthe weichen von den obigen nur in der zweiten Decimalstelle um 2 Einheiten ab.

§. 338. Formänderung. Für §. 335 erübrigt noch die Bestimmung der Constanten B, B′, C, C′. Dieselben ergeben sich leicht durch Addition und Subtraction der Gleichungen IV und VI, V und VIII. Das Resultat ist nach Einsetzung der Werthe für H, V und M_0:

$$B = \frac{1}{96}\,G\,(a^3 - 3\,a\,\xi^2 - 2\,\xi^3)\,\xi.$$

$$B' = \frac{1}{96}\,G\,(a^3 - 3\,a\,\xi^2 + 2\,\xi^3)\,\xi;$$

$$C = \frac{1}{192}\,\frac{G}{a}\,(a^4 - 18\,a^2\xi^2 - 32\,a\,\xi^3 - 15\,\xi^4),$$

$$C' = \frac{1}{192}\,\frac{G}{a}\,(a^4 - 18\,a^2\xi^2 + 32\,a\,\xi^3 - 15\,\xi^4).$$

Da auch die Constanten A, A′ durch die Ausdrücke a (§. 335) bestimmt sind, so ist nun in den Ausdrücken 199 für die Formänderung Alles bekannt. Die Verrückungen $\Delta_0 x$, $\Delta_0 y$ des Scheitels sind $\Delta_0 x = -\frac{2\,B'\,h}{E\,W\,a^2}$, $\Delta_0 y = \frac{C'}{E\,W}$, d. i.

$$211.\quad \begin{cases} \Delta_0 x = -\dfrac{G\,h}{48\,E\,W\,a^2}\,\xi\,(a-\xi)^2(a+2\,\xi), \\ \Delta_0 y = \dfrac{G}{192\,E\,W\,a}\,(a-\xi)^2(a-3\,\xi)\,(a+5\,\xi), \end{cases}$$

wonach die folgende Tabelle berechnet ist.

ξ	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$	ξ	$\Delta_0 x$	$\Delta_0 y$
0	0	+ **0,00521**	0,5	0,00521	− 0,00228
0,1	0,00203	+ 0,00443	**0,6**	0,00440	− **0,00251**
0,2	0,00373	+ 0,00267	0,7	0,00315	− 0,00232
0,3	0,00490	+ 0,00064	0,8	0,00173	− 0,00146
0,333	0,00514	**0**	0,9	0,00053	− 0,00049
0,4	0,00540	− 0,00113	1	0	0
0,421	**0,00542**	− 0,00143			
. a	$-\frac{G\,a^2\,h}{E\,W}$	$\frac{G\,a^3}{E\,W}$	. a	$-\frac{G\,a^2\,h}{E\,W}$	$\frac{G\,a^3}{E\,W}$

Alle Lasten, welche im mittleren Drittheile liegen, erzeugen eine Senkung,

Digitized by Google

alle Lasten, welche in den äusseren Drittheilen liegen, eine Hebung des Scheitels. Die grösste Senkung ist $\frac{4}{3}$, das grösste Steigen 1,173 und die grösste horizontale Verrückung 0,416 so gross, als beim Bogen mit Kämpfergelenken.

b) Kreisbogen mit constantem Querschnitte.

§. 339. Aufstellung der Fundamentalgleichungen. Die Ausdrücke 195 für das Moment gehen, wenn wir $x = r\sin\varphi$, $y = r(1-\cos\varphi)$, $\xi = r\sin\beta$ setzen, über in

$$212.\quad \begin{cases} M = M_0 - H\,r\,(1-\cos\varphi) + (G-V)\,r\sin\varphi - G\,r\sin\beta, \\ M' = M_0 - H\,r\,(1-\cos\varphi) - V\,r\sin\varphi. \end{cases}$$

Die Ausdrücke 194 für P sind direkt anwendbar.

a) Längenänderung. Nach 7 (Seite 270) wird

$$213.\quad \begin{cases} E\,F\,\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{M_0}{r} - H - G\sin\beta, \\ E\,F\,\frac{\Delta ds'}{ds} = \frac{M_0}{r} - H. \end{cases}$$

b) Lagenänderung der Tangente. Da $\frac{\Delta ds}{ds}$ constant ist, so wird $\Delta s = \int d\,\Delta s = \int \frac{\Delta ds}{ds}\,ds = \frac{\Delta ds}{ds}\,s = \frac{\Delta ds}{ds}\,r\,\varphi$; mithin nach 25 (Seite 274)

$$\Delta\varphi = \frac{r}{E\,W}\int\left[M_0 - H\,r\left(1-\cos\varphi\right) + \left(G-V\right)r\sin\varphi - G\,r\sin\beta\right]d\varphi + \frac{\Delta ds}{ds}\,\varphi,$$

$$\Delta\varphi' = \frac{r}{E\,W}\int\left[M_0 - H\,r\left(1-\cos\varphi\right) - V\,r\sin\varphi\right]d\varphi + \frac{\Delta ds'}{ds}\,\varphi.$$

Die Ausführung der Integration giebt, wenn wir wieder $\frac{W}{F\,r^2} = \varkappa$ setzen,

$$E\,W\,\Delta\varphi = r\,[M_0\,\varphi - H\,r\,(\varphi - \sin\varphi) - (G-V)\,r\cos\varphi - G\,r\,\varphi\sin\beta] + \varkappa\,r\,(M_0 - H\,r - G\,r\sin\beta)\,\varphi + A,$$

$$E\,W\,\Delta\varphi' = r\,[M_0\,\varphi - H\,r\,(\varphi - \sin\varphi) + V\,r\cos\varphi] + \varkappa\,r\,(M_0 - H\,r)\,\varphi + A'.$$

Für $\varphi = \beta$ muss $\Delta\varphi = \Delta\varphi'$ werden, daher $-G\,r^2\cos\beta - G\,r^2\beta\sin\beta - \varkappa\,G\,r^2\beta\sin\beta + A = A'$ oder

$$\text{I.}\quad A - A' = G\,r^2[\cos\beta + (1+\varkappa)\,\beta\sin\beta].$$

Für $\varphi = +\alpha$ wird $\Delta\varphi = 0$ und für $\varphi = -\alpha$ wird $\Delta\varphi' = 0$; die Addition und Subtraction der so erhaltenen Gleichungen giebt mit Berücksichtigung des für $A - A'$ gefundenen Werthes

$$\text{II.}\quad A + A' = G\,r^2[\cos\alpha + (1+\varkappa)\,\alpha\sin\beta] - 2\,V\,r^2\cos\alpha,$$

$$\text{III.}\quad 2\,M_0\,\alpha - 2\,H\,r\,(\alpha - \sin\alpha) - G\,r\,[\cos\alpha - \cos\beta + (\alpha-\beta)\sin\beta] + \varkappa\,[2\,M_0\,\alpha - 2\,H\,r\,\alpha - G\,r\,(\alpha-\beta)\sin\beta] = 0.$$

c) Horizontale Verrückung. Nach 29 (Seite 276) wird für die horizontale Verrückung Δx, wenn wir die hierzu nöthige Integration ausführen,

Digitized by Google

214.
$$\left\{\begin{aligned} E\,W\,\Delta x &= -M_0 r^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \tfrac{1}{2} H r^3(2\sin\varphi - 2\varphi\cos\varphi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\\ &\quad - \tfrac{1}{2} V r^3\sin^2\varphi + \tfrac{1}{2} G r^3(\sin^2\varphi + 2\sin\beta\sin\varphi - 2\varphi\sin\beta\cos\varphi)\\ &\quad + \varkappa r^2(M_0 - H r - G r\sin\beta)\varphi\cos\varphi + A r\cos\varphi + B,\\ E\,W\,\Delta x' &= -M_0 r^2(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) + \tfrac{1}{2} H r^3(2\sin\varphi - 2\varphi\cos\varphi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi)\\ &\quad - \tfrac{1}{2} V r^3\sin^2\varphi + \varkappa r^2(M_0 - H r)\varphi\cos\varphi + A' r\cos\varphi + B'. \end{aligned}\right.$$

Für $\varphi = \beta$ wird $\Delta x = \Delta x'$, daher

$$\text{IV.}\quad B - B' = -\tfrac{1}{2} G r(2 + \sin^2\beta).$$

Ferner wird für $\varphi = \alpha$, $\Delta x = 0$ und für $\varphi = -\alpha$, $\Delta x' = 0$. Addirt und subtrahirt man diese so erhaltenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$\text{V.}\quad B + B' = V r(2 - \sin^2\alpha) - \tfrac{1}{2} G r(2 - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta).$$

$$\begin{aligned}\text{VI.}\quad & 2 M_0(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) - H r(2\sin\alpha - 2\alpha\cos\alpha - \alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\\ & + \tfrac{1}{2} G r[2 - \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\cos(\alpha - \beta) + 2(\alpha - \beta)\cos\alpha\sin\beta]\\ & - \varkappa[2(M_0 - H r\alpha\cos\alpha - G r(\alpha - \beta)\cos\alpha\sin\beta] = 0.\end{aligned}$$

Eine einfache Beziehung, welche $\varkappa$ nicht enthält, ergiebt sich noch, wenn man die Gleichungen III und VI combinirt, indem man die mit $\cos\alpha$ multiplicirte Gleichung III zur Gleichung VI addirt. Es ergiebt sich

$$\text{VII.}\quad 2 M_0\sin\alpha - H r(2\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha - \alpha) + \tfrac{1}{2} G r(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 0.$$

d) Verticale Verrückung. In gleicher Weise ergiebt sich für die verticale Verrückung nach 29 (Seite 276):

215.
$$\left\{\begin{aligned} E\,W\,\Delta y &= M_0 r^2(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) - \tfrac{1}{2} H r^3(2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)\\ &\quad + \tfrac{1}{2} V r^3(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \tfrac{1}{2} G r^3(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + 2\sin\beta\cos\varphi\\ &\quad + 2\varphi\sin\beta\sin\varphi) + \varkappa r^2(M_0 - H r - G r\sin\beta)\varphi\sin\varphi + A r\sin\varphi + C,\\ E\,W\,\Delta y' &= M_0 r^2(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) - \tfrac{1}{2} H r^3(2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)\\ &\quad + \tfrac{1}{2} V r^3(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) + \varkappa r^2(M_0 - H r)\varphi\sin\varphi + A' r\sin\varphi + C'. \end{aligned}\right.$$

Für $\varphi = \beta$ wird $\Delta y = \Delta y'$, daher

$$\text{VIII.}\quad C - C' = \tfrac{1}{2} G r^3(\beta + \sin\beta\cos\beta).$$

Endlich wird für $\varphi = +\alpha$, $\Delta y = 0$ und für $\varphi = -\alpha$, $\Delta y' = 0$. Die Addition und Subtraction der so gebildeten Gleichungen giebt:

$$\begin{aligned}\text{IX.}\quad C + C' &= -2 M_0 r^2(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha) + H r^3(2\cos\alpha + 2\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha)\\ &\quad + \tfrac{1}{2} G r^3[\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - 2\sin(\alpha - \beta) + 2(\alpha - \beta)\sin\alpha\sin\beta]\\ &\quad - 2 H r^2(M_0 - H r)\alpha\sin\alpha + \varkappa G r^3(\alpha - \beta)\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{X.}\quad & V r(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\\ & = \tfrac{1}{2} G r(\alpha - \beta - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + 2\cos\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

§. 340. Verticalkraft V. Die Verticalkraft V ergiebt sich direct durch die Gleichung IX, nämlich

$$216.\quad V = G\,\frac{\alpha - \beta - \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta + 2\cos\alpha\sin\beta}{2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}.$$

Glieder mit dem Coefficienten $\varkappa$ kommen in diesem Ausdrucke nicht vor. Die Reihenverwandlung giebt:

$$217.\quad V = \frac{G}{4\alpha^3}\left[2\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + \beta^3 - \frac{7}{20}(\alpha^3 - \beta^3)^2\beta + \ldots\right].$$

Digitized by Google

Für den Halbkreis wird

$$218.\quad V = G\,\frac{\pi - 2\beta - 2\sin\beta\cos\beta}{2\pi}.$$

Nach dem Ausdrucke 216 ist folgende Tabelle berechnet:

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,2	0,3520	0,3515	0,3500	0,3475	0,3439	0,3392	0,3332	0,3065
0,4	0,2160	0,2152	0,2130	0,2092	0,2037	0,1966	0,1876	0,1486
0,6	0,1040	0,1033	0,1014	0,0981	0,0934	0,0874	0,0799	0,0486
0,8	0,0280	0,0277	0,0269	0,0255	0,0238	0,0211	0,0182	0,0065
1	0	0	0	0	0	0	0	0
α				. G				

§. 341. Horizontalschub. Die Gleichungen III und VI enthalten als Unbekannte nur M_0 und H. Die Elimination von M_0 giebt als Ausdruck für den Horizontalschub nach gehöriger Reduction:

$$219.\quad H = G\,\frac{2\sin\alpha\,[\cos\beta - \cos\alpha + (1+\varkappa)\,\beta\sin\beta] - (1+\varkappa)\,\alpha\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}{2\,[(1+\varkappa)\,\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]}.$$

Bezeichnet man den Werth von H bei Vernachlässigungen von $\varkappa$ mit H_0, so wird

$$220.\quad H = H_0\,\frac{1 - A\varkappa}{1 - B\varkappa},$$

wobei

$$\begin{cases} A = \dfrac{\alpha\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - 2\beta\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\,(\cos\beta - \cos\alpha + \beta\sin\beta) - \alpha\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)}, \\ B = \dfrac{\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)}{\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha}. \end{cases}$$

Die Reihenverwandlung giebt:

$$221.\quad H_0 = \frac{15\,G}{16}\,\frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{\alpha^5}\left(1 - \frac{10}{210}\,\alpha^2 - \frac{11}{30}\,\beta^2 + \ldots\right);$$

$$222.\quad \begin{cases} A = \dfrac{12}{\alpha^2 - \beta^2}\left(1 - \dfrac{1}{10}\,\alpha^2 + \dfrac{11}{30}\,\beta^2 + \ldots\right), \\ B = \dfrac{45}{\alpha^4}\left(1 - \dfrac{4}{21}\,\alpha^2 + \ldots\right). \end{cases}$$

Nach den genauen Formeln sind die folgenden Tabellen berechnet.

Horizontalschub ohne Correction.

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0,4688	0,4687	0,4683	0,4678	0,4671	0,4661	0,4610	0,4592
0,2	0,4320	0,4317	0,4309	0,4291	0,4272	0,4243	0,4173	0,4017
0,4	0,3308	0,3301	0,3281	0,3244	0,3196	0,3128	0,3012	0,2601

Digitized by Google

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0,6	0,1920	0,1912	0,1887	0,1845	0,1784	0,1703	0,1578	0,1087
0,8	0,0608	0,0603	0,0590	0,0566	0,0534	0,0490	0,0421	0,0181
1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cdot \alpha$	$\cdot G \frac{a}{h}$							

Correctionscoefficienten.

	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	
A	0	3,00	3,01	3,02	3,06	3,10	3,16	3,25	3,66	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2$
	0,2	3,12	3,15	3,16	3,19	3,26	3,34	3,45	4,07	
	0,4	3,57	3,58	3,63	3,70	3,81	3,79	4,20	5,65	
	0,6	4,69	4,70	4,81	4,96	5,20	5,57	6,14	10,57	
	0,8	8,33	8,42	8,67	9,10	9,78	10,87	12,93	35,62	
	1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
B		2,813	2,825	2,861	2,931	3,039	3,198	3,417	5,279	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4$

Bei kleinen Centriwinkeln ist B viel grösser als A, da sich nahezu $A : B = h^2 : a^2$ verhält. Je kleiner der Centriwinkel ist, desto grösser werden die Correctionscoefficienten.

§. 342. Moment im Scheitel. Aus der Gleichung VII ergiebt sich

$$223. \quad M_0 = \frac{1}{2} H r \left(2 - \cos\alpha - \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right) - \frac{1}{4} G r \frac{(\sin\alpha - \sin\beta)^2}{\sin\alpha}.$$

Durch Substitution des Ausdruckes 218 für H oder durch direkte Elimination von H aus den Gleichungen III und VI ergiebt sich

$$224. \quad 2 M_0 [(1+\varkappa)\alpha(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha] = G r [\sin\alpha \{1 - \cos(\alpha-\beta) + 2(\cos\beta - \cos\alpha) - (\sin\alpha - \sin\beta)\sin\beta\} - \alpha(\cos\beta - \cos\alpha) - (1+\varkappa)\{\alpha(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - 2\beta\sin\alpha\sin\beta\} + (1+\varkappa)(\alpha-\beta)(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\sin\beta].$$

Ist H bereits berechnet, so wendet man zur numerischen Berechnung von M_0 am besten die Gleichung 223 an. Bezeichnet M_{00} den Werth von M_0 ohne Rücksicht auf $\varkappa$, so können wir wiederum

$$225. \quad M_0 = M_{00} \frac{1 - C\varkappa}{1 + B\varkappa}$$

setzen; B hat hierbei denselben Werth, wie für den Horizontalschub H.

Die Reihenverwandlung giebt:

$$226. \quad M_{00} = -\frac{1}{32} G r \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2}\left[3\alpha^2 - 10\alpha\beta - 3\beta^2 + \frac{1}{84}\left(3\alpha^4 + 6\alpha^3\beta + 45\alpha^2\beta^2 + 308\alpha\beta^3 + 154\beta^4\right) + \ldots\right];$$

Digitized by Google

$$227.\quad C = \frac{360}{\alpha^2(3\alpha^2 - 10\alpha\beta - 5\beta^2)} + \ldots$$

Nach der genauen Formel sind die folgenden Tabellen berechnet.

Moment im Scheitel ohne Correction.

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
	—	—	—	—	—	—	—	—
0	0,09375	0,09426	0,09582	0,09849	0,10241	0,10777	0,11613	0,15108
0,2	0,01606	0,01615	0,01658	0,01742	0,01846	0,02063	0,02280	0,03083
	+	+	+	+	+	+	+	+
0,4	0,02025	0,02021	0,02008	0,01973	0,01942	0,01888	0,01719	0,01441
0,6	0,02400	0,02393	0,02369	0,02326	0,02267	0,02181	0,02001	0,01454
0,8	0,01025	0,01019	0,00999	0,00962	0,00917	0,00850	0,00716	0,00332
1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\cdot\alpha$				$\cdot G a$				

Correctionscoefficienten.

	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\alpha = 0$	$\alpha = 10^0$	$\alpha = 20^0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 40^0$	$\alpha = 50^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	
		+	+	+	+	+	+	+	+	
	0	7,50	7,52	7,57	7,78	7,94	8,52	8,61	11,12	
	0,2	28,13	28,09	27,99	28,14	28,43	27,99	27,76	31,81	
C		—	—	—	—	—	—	—	—	$\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4$
	0,4	12,50	12,61	13,05	14,08	15,40	17,35	21,11	37,47	
	0,6	4,69	4,77	5,00	5,51	6,24	7,31	9,10	20,27	
	0,8	2,74	2,85	3,20	3,89	4,94	6,61	9,77	42,53	
	1	1,88	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
B		+ 2,81	+ 2,83	+ 2,86	+ 2,93	+ 3,04	+ 3,20	+ 3,42	+ 5,28	$\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4$

§. 343. Construction.

a) Kämpferdrucklinie. Nach 196 (Seite 329) wird die Ordinate der Kämpferdrucklinie

$$\eta = \frac{V r \sin\beta - M_0}{H}.$$

Setzen wir, um die mitgetheilten Tabellen benutzen zu können, $V = \nu G$, $H = \xi G \frac{a}{h}$, $M_0 = \mu G a$, so wird $\eta = \frac{\nu \sin\beta - \mu \sin\alpha}{\xi \sin\alpha} h$. Mit Berücksichtigung der Correction berechnet man η am besten durch directe Einführung der bereits corrigirten Werthe von V, M_0, H oder ν, μ, ξ in die eben aufgestellten Formeln.

Für $\beta = \alpha$ nimmt η die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Die einmalige Differenziation des Zählers und Nenners giebt bei Berücksichtigung der

Digitized by Google

Correction, wobei überhaupt nur die Correctionsglieder übrig bleiben,

$$228.\quad \eta = \frac{2\sin\alpha - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha}\,\mathrm{r}.$$

Ohne Berücksichtigung der Correction ergiebt die zweimalige Differenziation des Zählers und Nenners

$$229.\quad \eta = \frac{2\sin^2\alpha\,(\alpha^2 + \alpha\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha) - (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)\,[\sin\alpha\,(2+\cos\alpha) - \alpha\,(1+2\cos\alpha)]}{2\,(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\,(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\,\mathrm{r}.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck für kleine Centriwinkel:

$$230.\quad \eta = \frac{\mathrm{r}\,\alpha^2}{10}\left[1 - \frac{120\,(\alpha^2 - 2\,\alpha\,\beta - \beta^2)}{\alpha^4\,(\alpha+\beta)^2}\,\varkappa\right]$$
$$= \frac{1}{5}\,\mathrm{h}\left[1 - 30\,\frac{\mathrm{a}^2 - 2\,\mathrm{a}\,\xi - \xi^2}{(\mathrm{a}+\xi)^2}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{F}\,\mathrm{h}^2}\right].$$

Nach der genauen Formel ist für η die folgende Tabelle berechnet.

β	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0,200	0,211	0,252	0,329
0,2	0,200	0,210	0,246	0,312
0,4	0,200	0,207	0,236	0,280
0,6	0,200	0,202	0,217	0,228
0,8	0,200	0,197	0,200	0,158
1	0,200	0,188	0,151	0,082
. α		. h		

Hier ist die Curve nach oben convex, während sie bei Kämpfergelenken nach oben concav ist. Hier nähert sie sich der Geraden um so mehr, je kleiner der Centriwinkel ist, während sie sich bei Kämpfergelenken der Geraden um so mehr nähert, je grösser der Centriwinkel (bis zu 90^0) ist.

b) Kämpferdruck-Umhüllungslinie. Nach 198 (Seite 330) wird, wenn wir die Differenzialquotienten von V, H, $\mathrm{M_0}$ nach β mit V', H', $\mathrm{M_0}'$ bezeichnen,

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{H\,M_0}' - \mathrm{H}'\,\mathrm{M_0}}{\mathrm{V\,H}' - \mathrm{V}'\,\mathrm{H}},\quad \mathrm{w} = \frac{\mathrm{V\,M_0}' - \mathrm{V}'\,\mathrm{M_0}}{\mathrm{V\,H}' - \mathrm{V}'\,\mathrm{H}}.$$

Nach den Gleichungen 216, 218 und 223 aber ergiebt sich

$$231.\quad \begin{cases} \mathrm{V}' = -\,\mathrm{G}\,\dfrac{\cos\beta\,(\cos\beta - \cos\alpha)}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}, \\ \mathrm{H}' = \mathrm{G}\,\dfrac{\sin\alpha\,[\beta\cos\beta + \varkappa\,(\sin\beta + \beta\cos\beta)] - (1+\varkappa)\,\alpha\sin\beta\cos\beta}{(1+\varkappa)\,\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha}, \\ \mathrm{M}' = \mathrm{H}'\,\dfrac{(1+\varkappa)\,\alpha - \sin\alpha}{(1+\varkappa)\,\alpha} + \mathrm{G\,r}\,\dfrac{(1+\varkappa)\,(\alpha-\beta)\cos\beta - \varkappa\sin\beta}{2\,(1+\varkappa)\,\alpha}. \end{cases}$$

Hiernach wird man am besten V', H', $\mathrm{M_0}'$ numerisch berechnen und nebst den numerischen Werthen von V, H, $\mathrm{M_0}$ in die Ausdrücke für v, w ein-

Digitized by Google

führen. Hierbei ist zu bemerken, dass v und w für sämmtliche positive und negative β zu berechnen sind. Bezeichnet man die Werthe von V, H, M_0, V', H', M_0' für gleiche positive und negative β ohne und mit Klammer, so ergiebt sich leicht:

$$\begin{aligned} (V) &= G - V, & (V') &= V', \\ (H) &= H, & (H') &= -H', \\ (M_0) &= M_0 - G\,r\sin\beta, & (M_0') &= -M_0' + G\,r\cos\beta, \end{aligned}$$

so dass sich aus den Werthen für positive β leicht diejenigen für negative β berechnen lassen. Für negative β, d. h. wenn die Last rechts vom Scheitel liegt, hat aber V, M_0 nicht mehr die Bedeutung der Verticalkraft und des Biegungsmomentes im Scheitel, sondern der Verticalcomponente und des Momentes für den Scheitel von dem rechten Stützendrucke D'.

Für $\beta = \alpha$ wird $V = 0$, $H = 0$, $M_0 = 0$, wesshalb v und w die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Auch die einmalige Differenziation von Zähler und Nenner giebt kein bestimmtes Resultat. Die zweimalige Differenziation giebt, wenn man die zweiten Differenzialquotienten durch zwei Apostrophe bezeichnet und beachtet, dass für $\beta = \alpha$ auch $V' = 0$ ist,

$$v = \frac{M_0' H'' - M_0'' H'}{V'' H'}, \quad w = \frac{M_0'}{H}.$$

Nimmt man aber auf $\varkappa$ keine Rücksicht, so wird für $\beta = \alpha$ auch $H' = 0$, $M_0' = 0$ und dann giebt erst die viermalige Differenziation, wenn man den dritten Differenzialquotienten mit drei Apostrophen bezeichnet,

$$v = \frac{H'' M_0''' = H''' M_0''}{V'' H''' - V''' H''}, \quad w = \frac{V'' M_0''' - V''' M_0''}{V'' H''' - V''' H''}.$$

Dies giebt mit Berücksichtigung von $\varkappa$

$$232. \quad v = \frac{\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}\,r, \quad w = \frac{2\alpha\sin\alpha - \alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2\alpha\sin\alpha}\,r$$

und ohne Berücksichtigung von $\varkappa$

$$233. \quad v = \frac{1}{2}\,r\sin\alpha, \quad w = \left[1 - \frac{\sin\alpha + \sin^3\alpha - \alpha\cos\alpha}{2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}\right] r.$$

Wie man sieht, hat $\varkappa$, auch wenn es klein ist, in der Nähe dieser Grenzpunkte einen grossen Einfluss, selbst bei grossem Centriwinkel. Im letztern Falle weichen jedoch in geringer Entfernung von diesem Punkte die Werthe von v, w ohne Berücksichtigung von $\varkappa$ nur äusserst wenig von den genauen Werthen ab. Eine weniger grosse Genauigkeit in der Nähe dieses Punktes schadet aber für die Berechnung der Beanspruchung nichts, weil hier die Stützendrücke in Null übergehen.

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformeln für kleine Centriwinkel

$$v = v_0, \quad w = w_0\left[1 + \frac{90\,W\,a^2}{F\,h^2(23\,a^2 + 20\,a\,\xi + 5\,\xi^2)}\right],$$

wenn v_0, w_0 die in §. 336 entwickelten Werthe von v, w ohne Berücksichtigung von $\varkappa$ bezeichnen. Nimmt man $\beta > \alpha$ an, was allerdings keine reelle Bedeutung hat, so nähert sich mit wachsendem β v der Grenze 0 und w einer Grenze, welche sich ergiebt, wenn man in den Ausdrücken

Digitized by Google

für V, H, M_0, V′, H′, M_0' nur diejenigen Glieder beibehält, welche β als Bogen enthalten, und nun $\beta = \infty$ setzt. In dieser Weise ergiebt sich leicht

$$w = \frac{1}{2} r \left(2 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha\right).$$

Nach den genauen Formeln ist ohne Rücksicht auf $\varkappa$ folgende Tabelle berechnet.

β	$\alpha = 0$		$\alpha = 30^0$		$\alpha = 60^0$		$\alpha = 90^0$	
	v	w	v	w	v	w	v	w
∞	0	0,333	0	0,324	0	0,291	0	0,215
+ 1	0,500	0,400	0,500	0,396	0,500	0,385	0,500	0,363
+ 0,8	0,526	0,410	0,531	0,310	0,539	0,387	0,577	0,390
+ 0,6	0,556	0,426	0,560	0,424	0,578	0,409	0,646	0,423
+ 0,4	0,588	0,446	0,595	0,444	0,616	0,451	0,864	0,446
+ 0,2	0,625	0,472	0,633	0,472	0,661	0,473	0,733	0,482
0	0,667	0,501	0,676	0,512	0,709	0,517	0,786	0,526
− 0,2	0,714	0,571	0,725	0,574	0,773	0,605	0,843	0,609
− 0,4	0,769	0,675	0,780	0,681	0,818	0,704	0,899	0,739
− 0,6	0,833	0,889	0,843	0,899	0,877	0,937	0,932	0,868
− 0,8	0,909	1,546	0,916	1,567	0,937	1,644	0,978	1,361
− 1	1	∞	1	∞	1	∞	1	∞
	. a	. h	. a	. h	. a	. h	. a	. h

Einfacher als die Berechnung der Coordinaten der Kämpferdruck-Umhüllungslinie wird allerdings die Bestimmung der Durchschnittspunkte Φ, Ψ der Kämpferdrücke mit den durch die Kämpfer gehenden Verticalen, nach 197 (Seite 330). Hierbei wird $M_1 = M_0 - H h + (G - V) a - G \xi$, $M_2 = M_1 - H h + V a$. Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke für kleine Centriwinkel:

$$234. \quad c_1 = -\frac{2h}{15(a+\xi)}\left[a - 5\xi - \frac{45 W a}{F h^2}\right], \quad c_2 = -\frac{2h}{15(a+\xi)}\left[a + 5\xi - \frac{45 W a}{F h^2}\right].$$

§. 344. Formänderung. Zur Bestimmung der Formänderung erübrigt noch die Feststellung der Constanten A, A′, B, B′ C, C′. A und A′ sind durch die Gleichungen I und II, B und B′ durch die Gleichungen IV und V, endlich C und C′ durch die Gleichungen VIII und IX in §. 339 bestimmt. Es ergiebt sich

$$235. \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} G r^2 [\cos\alpha + \cos\beta + (1+\varkappa)(\alpha+\beta)\sin\beta] - V r^2 \cos\alpha, \\ A' = \frac{1}{2} G r^2 [\cos\alpha - \cos\beta + (1+\varkappa)(\alpha-\beta)\sin\beta] - V r^2 \cos\alpha; \\ B = -\frac{1}{4} G r (4 - \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta) + \frac{1}{2} V r (2 - \sin^2\alpha), \\ B' = +\frac{1}{4} G r (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + \frac{1}{2} V r (2 - \sin^2\alpha); \\ \left.\begin{matrix} C \\ C' \end{matrix}\right\} = \begin{cases} +\frac{1}{4} G r^3 [\alpha \pm \beta + \sin\alpha\cos\alpha \pm \sin\beta\cos\beta - 2\sin(\alpha-\beta) + 2(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta] \\ -M_0 r^2 [\cos\alpha + \alpha\sin\alpha) + \frac{1}{2} H r^3 (2\cos\alpha + 2\alpha\sin\alpha - \sin^2\alpha) \\ -\varkappa (M_0 - H r) r^2 \alpha \sin\alpha + \frac{1}{2} \varkappa G r^3 (\alpha - \beta)\sin\alpha\sin\beta, \end{cases} \end{cases}$$

Digitized by Google

Für die Verrückungen $\Delta_0 x$, $\Delta_0 y$ des Scheitels ergiebt sich, wenn man in den Ausdrücken 214, 215 für $\Delta x'$, $\Delta y'$ $\varphi = 0$ setzt:

$$E W \Delta_0 x = A' + B', \quad E W \Delta_0 y = M_0 r^2 - H r^3 + C',$$

d. i.

236.
$$\begin{cases} E W \Delta_0 x = + \frac{1}{2} V r^3 (2 - \sin^2\alpha - 2\cos\alpha) \\ \quad - \frac{1}{4} G r^3 [2(\cos\beta - \cos\alpha) - (\sin\alpha - \sin\beta)^2 - 2(1+\varkappa)(\alpha-\beta)\sin\beta]. \\ E W \Delta_0 y = - \frac{1}{2} H r^3 (2 - 2\cos\alpha - 2\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) + M_0 r^2 (1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha) \\ \quad + \frac{1}{4} G r^3 [\alpha - \beta + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta - 2\sin(\alpha-\beta) + 2(\alpha-\beta)\sin\alpha\sin\beta] \\ \quad - \varkappa (M_0 - H r) r^2 \alpha \sin\alpha + \frac{1}{2} \varkappa G r^3 (\alpha - \beta)\sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Annähernd ergiebt sich durch Reihenverwandlung für kleine Centriwinkel, wenn man die entsprechenden Werthe ohne Rücksicht auf $\varkappa$ nach 211 (Seite 340) mit $\Delta_0 x'$, $\Delta_0 y'$ bezeichnet,

237.
$$\begin{cases} \Delta_0 x = \Delta_0 x' = \dfrac{G h \xi (a - \xi)}{2 E F a^2}, \\ \Delta_0 y = \Delta_0 y' + \dfrac{225 G (a^2 - \xi^2)^2}{128 E (4 F h^2 + 45 W) a}. \end{cases}$$

Nach der genauen Formel ist ohne Rücksicht auf $\varkappa$ folgende Tabelle berechnet.

β	$\Delta_0 x$				$\Delta_0 y$			
	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$	$\alpha = 0$	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 60^0$	$\alpha = 90^0$
0	0	0	0	0	+ 0,00521	+ 0,00590	+ 0,00797	+ 0,001143
0,2	0,00373	0,00411	0,00589	0,00882	+ 0,00267	+ 0,00291	+ 0,00362	+ 0,00480
0,4	0,00540	0,00587	0,00748	0,01073	− 0,00113	− 0,00107	− 0,00089	− 0,00060
0,6	0,00440	0,00535	0,00550	0,00630	− 0,00251	− 0,00250	− 0,00247	− 0,00242
0,8	0,00173	0,00179	0,00186	0,00134	− 0,00146	− 0,00139	− 0,00117	− 0,00080
1	0	0	0	0	0		0	0
. α	. $-\frac{G a^2 h}{E W}$				. $\frac{G a^3}{E W}$			

B. Gleichmässige Belastung bei constantem Querschnitte.

a) Gleichmässige Belastung der Horizontalen.

§. 345. Grundgleichungen. Der im Scheitelquerschnitte zwischen beiden Bogenhälften wirkende Druck ist der Symmetrie wegen horizontal, daher ist seine Verticalcomponente $V = 0$. Mithin wird

238. $$P = - H\cos\varphi - q r \sin^2\varphi, \quad Q = H\sin\varphi - q r \sin\varphi\cos\varphi,$$

239. $$M = M_0 - H r (1 - \cos\varphi) + \tfrac{1}{2} q r^2 \sin^2\varphi.$$

Daher wird $P + \frac{M}{r} = \frac{M_0}{r} - H - \frac{1}{2} q r \sin^2\varphi$. In der bekannten Weise ergiebt sich hiernach leicht

$$E W \Delta\varphi = (1+\varkappa) M_0 r \varphi - H r^2 [(1+\varkappa)\varphi - \sin\varphi] + \tfrac{1}{4}(1-\varkappa) q r^3 (\varphi - \sin\varphi\cos\varphi);$$

Digitized by Google

240.
$$\begin{cases} E\,W\,\Delta x = -M_0 r^2[\sin\varphi - (1+\varkappa)\varphi\cos\varphi] + \frac{1}{2} H r^3[2\sin\varphi - 2(1+\varkappa)\varphi\cos\varphi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi] \\ \qquad - \frac{1}{4} q r^4(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi) - \frac{1}{4}\varkappa q r^4\cos\varphi(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi), \\ E\,W\,\Delta y = +M_0 r^2[\cos\varphi + (1+\varkappa)\varphi\sin\varphi] - \frac{1}{2} H r^3[2\cos\varphi + 2(1+\varkappa)\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi] \\ \qquad + \frac{1}{4} q r^4(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi) - \frac{1}{4}\varkappa q r^4\sin\varphi(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) + C. \end{cases}$$

Die Grössen M_0, H, C bestimmen sich durch die Bedingungen, dass für $\varphi = \alpha$ $\Delta\varphi = 0$, $\Delta x = 0$ und $\Delta y = 0$ wird. Zunächst ergiebt sich als Horizontalschub

241.
$$H = \frac{1}{6} q r \sin\alpha \frac{3\alpha - 2\alpha\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha - \varkappa(3\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha)}{(1+\varkappa)\alpha(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha}.$$

Die Reihenverwandlung giebt

$$H = q r\left(1 - \frac{3}{14}\alpha^2 + \ldots\right)\frac{1 - \frac{15\varkappa}{\alpha^2}\left(1 - \frac{8}{105}\alpha^2 + \ldots\right)}{1 + \frac{45\varkappa}{\alpha^4}\left(1 - \frac{4}{21}\alpha^2 + \ldots\right)}.$$

Für kleine Winkel wird hiernach annähernd, wenn wir $\varkappa = \frac{W}{F r^2} = \frac{4 W h^2}{F a^4}$, $\alpha = \frac{2h}{a}$ setzen,

242.
$$H = \frac{q a^2}{2 h}\frac{4 F h^2}{45 W + 4 F h^2}.$$

Ferner ergiebt sich als Moment im Scheitel

243.
$$M_0 = H r\frac{(1+\varkappa)\alpha - \sin\alpha}{(1+\varkappa)\alpha} - \frac{1}{4} q r^2\frac{(1-\varkappa)(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}{(1+\varkappa)\alpha}$$
$$= \frac{3\sin^2\alpha - 6\sin^2\alpha\cos\alpha + \sin^4\alpha + 6\alpha\sin\alpha - 4\alpha\sin^3\alpha - 3\alpha^2 - J\varkappa}{12[(1+\varkappa)\alpha(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]},$$

worin zur Abkürzung

$$J = 3\sin^2\alpha - 6\sin^2\alpha\cos\alpha - 3\sin^4\alpha + 6\alpha\sin\alpha + 4\alpha\sin^3\alpha - 3\alpha^2$$

gesetzt ist. Die Reihenverwandlung giebt

$$M_0 = -\frac{3}{280} q r^2\alpha^4\frac{1 + \frac{700\varkappa}{\alpha^6}}{1 + \frac{45\varkappa}{\alpha^4}}.$$

Vernachlässigt man $\frac{45\varkappa}{\alpha^4}$ gegen $\frac{700\varkappa}{\alpha^6}$ und setzt wie oben $\varkappa = \frac{4 W h^2}{F a^4}$, $\alpha = \frac{2h}{a}$, so wird

244.
$$M_0 = -\frac{3}{70} q h^2\frac{4 F h^4 + 175 W a^2}{4 F h^4}.$$

Wie früher kann man allgemein $H = H_0\frac{1 - A\varkappa}{1 + B\varkappa}$, $M_0 = M_{00}\frac{1 + C\varkappa}{1 + B\varkappa}$ setzen. Die für H_0, M_{00}, A, B, C nach den genauen Formeln berechneten Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Digitized by Google

α	H_0	M_{00}	A	B	C
0	1,0000	0,04286	3,750	2,813	10,94
30	0,9420	0,04324	3,847	2,931	12,63
60	0,7831	0,04460	4,186	3,440	17,69
90	0,5601	0,04647	5,000	5,278	31,87
Gr.	$\cdot q r$	$\cdot -g h^2$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^6$

§. 346. Beanspruchung. P, Q und M sind nun nach Ermittelung von M_0 und H durch die Gleichungen 238 und 239 bestimmt. Auf Taf. XI ist in Fig. 7 P, Q, M für $\alpha = 60^0$ dargestellt.

Für kleine Winkel ergiebt sich durch Reihenverwandlung

$$245. \quad \begin{cases} P = -qr\left(1 - \frac{3}{14}\alpha^2 + \frac{1}{2}\varphi^2\right) + \frac{45\,\varkappa\, q\, r}{\alpha^4 + 45\,\varkappa}\left(1 + \frac{5}{42}\alpha^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\right), \\ Q = -\frac{1}{14}\, q\, r\, \varphi\left(3\alpha^2 - 7\varphi^2\right) - \frac{45\,\varkappa\, q\, r\, \varphi}{\alpha^4 + 45\,\varkappa}, \\ M = -\frac{1}{280}\, q\, r^2\left(3\alpha^4 - 30\alpha^2\varphi^2 + 35\varphi^4\right) - \frac{15\,\varkappa\, q\, r^2(\alpha^2 - 3\varphi^2)}{2\alpha^4 + 90\,\varkappa}. \end{cases}$$

Die Glieder mit $\varkappa$ können hier, besonders bei den Grössen Q und M unter Umständen einen sehr grossen Einfluss haben. P ist stets negativ und wird zum analytischen Maximum für $\cos\varphi = \frac{H}{2qr}$ und zwar ist

$$\max P = \frac{H^2 + 4\,q^2 r^2}{4\,q\,r}.$$

Wenn aber $\alpha > 74^0$ ist, so wird das entsprechende $\varphi > \alpha$, das analytische Maximum also ohne Bedeutung. Alsdann wird P an den Kämpfern zum Maximum. Q wird Null, also M zum analytischen Maximum für $\varphi = 0$ und für $\cos\varphi = \frac{H}{qr}$, d. i. bei kleinen Centriwinkeln ohne Rücksicht auf $\varkappa$ für $\varphi = \sqrt{\frac{3}{7}}\,\alpha = 0{,}655\,\alpha$. Ausserdem kann aber M zum wirklichen Maximum auch für $\varphi = \alpha$ werden. Bezeichnen wir die Werthe von M für $\varphi = \alpha$ und für $qr\cos\varphi = H$ bezüglich mit M_1, M_3, so ergiebt sich

$$M_1 = M_0 - Hr(1 - \cos\alpha) + \tfrac{1}{2}\, q\, r^2 \sin^2\alpha, \quad M_3 = M_0 - Hr + \frac{H^2}{2q} + \tfrac{1}{2}\, q\, r^2.$$

Annähernd wird für kleine Winkel ohne Correction:

$$246. \quad \begin{cases} M_0 = -\frac{3}{280}\, q\, r^2\alpha^4 = -\frac{3}{70}\, q\, h^2, \\ M_1 = -\frac{1}{35}\, q\, r^2\alpha^4 = -\frac{4}{35}\, q\, h^2, \\ M_3 = +\frac{3}{245}\, q\, r^2\alpha^4 = +\frac{12}{245}\, q\, h^2, \end{cases}$$

also $-M_0 : -M_1 : M_3 = 21 : 56 : 24$, so dass das absolut grösste Moment am Kämpfer stattfindet.

Digitized by Google

Der Abstand e der Stützlinie von der Axe ist $\frac{M}{P}$, d. i. bei kleinen Centriwinkeln

$$247.\quad e = \frac{1}{280} r (3\alpha^4 - 30\alpha^2\varphi^2 + 35\varphi^4) + \frac{15\varkappa r(\alpha^2 - 3\varphi^2)}{2\alpha^4 + 90\varkappa}$$
$$= \frac{1}{35} h \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left[3 - 30\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 35\left(\frac{x}{a}\right)^4\right] + \frac{15 W h (a^2 - 3x^2)}{a^2(4Fa^2 + 45W)}.$$

Für $x = 0$, $x = 0{,}655\,a$, $x = a$ wird e zum Maximum, für $x = 0{,}166\,a$, $x = 0{,}729\,a$ aber zu Null.

Die wichtigsten Grössen ohne Correction sind für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0 und 90^0 in folgender Tabelle zusammengestellt.

α	max P	M_0	M_3	M_1	e_0	e_3	e_1	φ für M_3	φ für e_3
	—	—	+	—	+	—	+		
0	1,000	0,0429	0,0490	0,1142	0,0857	0,0980	0,2286	0,655	0,655
30	1,066	0,0432	0,0491	0,1134	0,0856	0,0916	0,1985	0,651	0,645
60	1,142	0,0444	0,0495	0,1111	0,0851	0,0724	0,1459	0,641	0,625
90	1,078	0,0465	0,0528	0,1066	0,0830	0,0507	0,1066	0,622	0,597
Gr.	$\cdot q r$		$\cdot q h^2$			$\cdot \frac{h^3}{a^2}$		$\cdot \alpha$	

§. 347. Formänderung. Für die verticale Verrückung des Scheitels ergiebt sich nach 240: $E W \Delta_0 y = M_0 r^2 - H r^3 + \frac{1}{3} q r^4 + C$, d. i.

$$248.\quad E W \Delta_0 y = M_0 r^2 [1 - \cos\alpha - (1 + \varkappa)\alpha \sin\alpha]$$
$$+ \tfrac{1}{2} H r^3 [2(1 + \varkappa)\alpha \sin\alpha - 2(1 - \cos\alpha) - \sin^2\alpha]$$
$$- \tfrac{1}{12} q r^4 [-4 + 3\cos\alpha + 3\alpha\sin\alpha + \cos^3\alpha] + \tfrac{1}{4}\varkappa q r^4 \sin\alpha(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Umgekehrt ist $C = E W \Delta_0 y - M_0 r^2 + H r^3 - \frac{1}{3} q r^4$, so dass man hiernach nach Berechnung von $\Delta_0 y$ die Constante C und somit nach 240 die Verrückung eines beliebigen Punktes bestimmen kann.

Die Reihenverwandlung und Einsetzung der Werthe von M_0, H giebt ohne Rücksicht auf $\varkappa$ $E W \Delta_0 y = \frac{1}{1680} q r^4 \alpha^6 = \frac{1}{420} q a^2 h^2$, wonach $\Delta_0 y$ halb so gross ist, als beim Bogen mit Kämpfergelenken (Seite 319). Genauer aber wird

$$249.\quad \Delta_0 y = \frac{q a^2}{840 E W} \cdot \frac{8 F h^4 + 1575 W a^2}{4 F h^2 + 45 W}$$

und wenn 45 W gegen $4 F h^2$ klein ist,

$$250.\quad \Delta_0 y = \frac{q a^2 h^2}{420 E W} + \frac{15 q a^4}{32 E F h^2}.$$

b) Gleichmässige Belastung der Axe.

§. 348. Grundgleichungen. Wenn die Last für die Längeneinheit des Bogens constant und zwar $= g$ ist, so ist die Last zwischen dem Scheitel und dem fraglichen Querschnitte $= g r \varphi$ und das Moment

Digitized by Google

derselben für den fraglichen Querschnitt $= \int_0^\varphi g\,r\,d\psi \,.\, r\,(\sin\varphi - \sin\psi)$
$= g\,r^2(\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$. Mithin wird

251. $P = -H\cos\varphi - g\,r\,\varphi\sin\varphi, \quad Q = H\sin\varphi - g\,r\,\varphi\cos\varphi;$

252. $M = M_0 - H\,r\,(1-\cos\varphi) + g\,r^3(\varphi\sin\varphi - 1 + \cos\varphi).$

Daher wird nun $P + \frac{M}{r} = \frac{M_0}{r} - H - g\,r\,(1-\cos\varphi)$. In bekannter Weise ergiebt sich hiernach

$$E\,W\,\Delta\varphi = (1+\varkappa)\,M_0\,r\,\varphi - H\,r^2[(1+\varkappa)\,\varphi - \sin\varphi] + g\,r^3[2\sin\varphi - \varphi\cos\varphi - \varphi - \varkappa\,(\varphi - \sin\varphi)].$$

253.
$$\begin{cases} E\,W\,\Delta x = -M_0 r^2[\sin\varphi - (1+\varkappa)\,\varphi\cos\varphi] + \frac{1}{2}H\,r^2[2\sin\varphi - 2\,(1+\varkappa)\,\varphi\cos\varphi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi] \\ \quad - \frac{1}{4}g\,r^4(5\varphi - 4\sin\varphi - 5\sin\varphi\cos\varphi + 4\varphi\cos\varphi - 2\varphi\sin^2\varphi) - \varkappa\,g\,r^4\cos\varphi\,(\varphi - \sin\varphi), \\ E\,W\,\Delta y = +M_0 r^2[\cos\varphi + (1+\varkappa)\,\varphi\sin\varphi] - \frac{1}{2}H\,r^2[2\cos\varphi + 2\,(1+\varkappa)\,\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi] \\ \quad - \frac{1}{2}g\,r^4(\varphi^2 - 3\sin^2\varphi + 2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi + 2\varphi\sin\varphi\cos\varphi) - \varkappa\,g\,r^4\sin\varphi\,(\varphi - \sin\varphi) + C. \end{cases}$$

Die Grössen M_0, H, C bestimmen sich wiederum durch die Bedingungen, dass für $\varphi = \alpha$ oder an den Kämpfern $\Delta\varphi = 0$, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ werden muss. Zunächst ergiebt sich für den Horizontalschub der Ausdruck

254. $$H = g\,r\,\frac{8\sin^2\alpha - 7\,\alpha\sin\alpha\cos\alpha - \alpha^2 - 2\,\alpha^2\sin^2\alpha - \varkappa\,(\alpha^2 + 3\,\alpha\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 2\,\alpha^2\sin^2\alpha)}{2\,[(1+\varkappa)\,\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]}.$$

Die Reihenverwandlung giebt

$$H = g\,r\left(1 - \frac{1}{7}\alpha^2 + \ldots\right)\frac{1 - \frac{15\,\varkappa}{\alpha^2}\left(1 - \frac{26}{105}\alpha^2 + \ldots\right)}{1 + \frac{45\,\varkappa}{\alpha^4}\left(1 - \frac{4}{21}\alpha^2 + \ldots\right)}.$$

Der Näherungsausdruck 242 (Seite 346) gilt auch hier, wenn man g für q setzt. Ferner ergiebt sich für das Moment M_0 im Scheitel

255. $$M_0 = H\,r\,\frac{(1+\varkappa)\,\alpha - \sin\alpha}{(1+\varkappa)\,\alpha} - g\,r^2\,\frac{2\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \alpha - \varkappa\,(\alpha - \sin\alpha)}{(1+\varkappa)\,\alpha}$$
$$= -g\,r^2\,\frac{-4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + \alpha\sin\alpha + 5\,\alpha\sin\alpha\cos\alpha - \alpha^2 - 2\,\alpha^2\cos\alpha + 2\,\alpha^2\sin^2\alpha + J\,\varkappa}{2\,[(1+\varkappa)\,\alpha\,(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]},$$

wenn man zur Abkürzung

$$J = -2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha\sin\alpha\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \alpha^2\sin^2\alpha$$

setzt. Die Reihenverwandlung giebt

$$M_0 = -\frac{1}{140}\,g\,r^2\alpha^4\,\frac{1 + \frac{525\,\varkappa}{\alpha^6}}{1 + \frac{45\,\varkappa}{\alpha^4}},$$

d. i., wenn man $\frac{45}{\alpha^4}$ gegen $\frac{525}{\alpha^6}$ vernachlässigt und $\varkappa = \frac{4\,W\,h^2}{F\,a^4}$, $\alpha = \frac{2\,h}{a}$ setzt,

256. $$M_0 = -\frac{1}{35}\,g\,h^2\,\frac{16\,F\,h^4 + 525\,W\,a^2}{16\,F\,h^4}.$$

Wir setzen wiederum $H = H_0\frac{1 - A\,\varkappa}{1 + B\,\varkappa}$, $M_0 = M_{00}\frac{1 + C\,\varkappa}{1 + B\,\varkappa}$. Die Werthe von H_0, M_{00}, A, B, C, welche sich nach den genauen Formeln ergeben, sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Digitized by Google

α	H_0	M_{00}	A	B	C
0	1,0000	0,02857	3,750	2,813	8,20
30	0,9585	0,02979	3,886	2,931	9,28
60	0,8417	0,03344	4,358	3,440	12,51
90	0,6395	0,04086	5,692	5,278	21,06
Gr.	$\cdot g r$	$\cdot -g h^2$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^2$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^4$	$\cdot \left(\frac{a}{h}\right)^6$

§. 349. Beanspruchung. Nach Berechnung von H und M_0 sind P, Q und M durch die Gleichungen 251 und 252 bestimmt. Für kleine Winkel wird annähernd

$$257.\quad \begin{cases} P = -g r\left(1 - \frac{1}{7}\alpha^2 + \frac{1}{2}\varphi^2\right) + \frac{45\,\varkappa\, g r}{\alpha^4 + 45\,\varkappa}\left(1 + \frac{4}{21}\alpha^2 - \frac{1}{2}\varphi^2\right), \\ Q = -\frac{1}{21} g r \varphi\left(3\alpha^2 - 7\varphi^2\right) - \frac{45\,\varkappa\, g r \varphi}{\alpha^4 + 45\,\varkappa}, \\ M = -\frac{1}{420} g r^2\left(3\alpha^4 - 30\,\alpha^2\varphi^2 + 35\,\varphi^4\right) - \frac{15\,\varkappa\, g r^2(\alpha^2 - 6\varphi^2)}{4\,(\alpha^4 + 45\,\varkappa)} \end{cases}$$

Die Transversalkraft Q und das Moment M sind hiernach nur $\frac{2}{3}$ so gross, als bei gleichmässiger Belastung der Horizontalen. P ist stets negativ und wird zum wirklichen Maximum für $\varphi = \alpha$ und zwar ist

$$\max P = -H\cos\alpha - g r \alpha \sin\alpha,$$

das ist annähernd für kleine Winkel bei Vernachlässigung von $\varkappa = -g r\left(1 + \frac{5}{14}\alpha^2\right)$. Q wird Null, also M zum Maximum für $\varphi = 0$ und für $g r \varphi \cos\varphi = H \sin\varphi$, d. i. bei kleinen Centriwinkeln für $\varphi = \sqrt{\frac{3}{7}}\,\alpha = 0{,}655\,\alpha$. Für kleine Winkel ergiebt sich ohne Rücksicht auf $\varkappa$, wenn M_1, M_3 dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Falle

$$258.\quad \begin{cases} M_0 = -\frac{1}{140} g r^2\alpha^4 = -\frac{1}{35} g h^2, \\ M_1 = -\frac{2}{105} g r^2\alpha^4 = -\frac{8}{105} g h^2, \\ M_3 = +\frac{2}{245} g r^2\alpha^4 = +\frac{8}{245} g h^2. \end{cases}$$

Als Abstand der Stützlinie von der Axe ergiebt sich für kleine Winkel annähernd:

$$259.\quad e = \frac{1}{420}\left(3\alpha^4 - 30\,\alpha^2\varphi^2 + 35\,\varphi^4\right) + \frac{15\,\varkappa\, r(\alpha^2 - 6\varphi^2)}{4\,(\alpha^4 + 45\,\varkappa)}$$
$$= \frac{2}{105} h\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[3 - 30\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 35\left(\frac{x}{a}\right)^4\right] + \frac{15\,W h\,(a^2 - 6x^2)}{2a^2(4Fa^2 + 45W)}.$$

Die wichtigsten Grössen für $\alpha = 0$, 30^0, 60^0 und 90^0 ohne Correction sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Digitized by Google

α	max P	M_0	M_3	M_1	e_0	e_3	e_1	φ für M_3	φ für e_3
	—	—	+	—	+	—	+		
0	1,000	0,0286	0,0327	0,0762	0,0571	0,0653	0,1524	0,655	0,655
30	1,1919	0,0298	0,0341	0,0795	0,0578	0,0623	0,1395	0,653	0,648
60	1,3278	0,0334	0,0383	0,0893	0,0596	0,0534	0,1009	0,648	0,629
90	1,5708	0,0409	0,0469	0,1096	0,0639	0,0403	0,0698	0,639	0,604
Gr.	. g r		. g h²			$\cdot \frac{h^3}{a^2}$		. α	

§. 350. Formänderung. Für die verticale Verrückung des Scheitels ergiebt sich nach 253 (Seite 349) $E W \Delta_0 y = M r^2 - H r^3 - g r^4 + C$, d. i.

60. $$E W \Delta_0 y = M_0 r^2 [1 - \cos\alpha - (1+\varkappa)\alpha \sin\alpha] + \tfrac{1}{2} H r^3 [2(1+\varkappa)\alpha \sin\alpha - 2(1-\cos\alpha) - \sin^2\alpha]$$
$$- \tfrac{1}{4} g r^4 [4 - 4\cos\alpha + 5\sin^2\alpha - 4\alpha\sin\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha - \alpha^2] + \varkappa g r^4 \sin\alpha (\alpha - \sin\alpha).$$

Die Reihenverwandlung und Einsetzung der Werthe von M_0, H giebt ohne Rücksicht auf $\varkappa$ $E W \Delta_0 y = \frac{1}{2520} g r^4 \alpha^6$, so dass unter sonst gleichen Umständen $\Delta_0 y$ nur $\frac{2}{3}$ so gross ist, als bei gleichmässiger Belastung der Horizontalen. Genauer aber wird mit Rücksicht auf $\varkappa$ für kleine Winkel

261. $$\Delta_0 y = \frac{g a^2}{2520 E W} \frac{16 F h^4 + 4725 W a^2}{4 F h^2 + 45 W}$$

und wenn 45 W gegen 4 F h² klein ist,

262. $$\Delta_0 y = \frac{g a^2 h^2}{630 E W} + \frac{15 g a^4}{32 E F h^2}.$$

C. Beliebige Belastung bei beliebiger Form der Axe und variabelem Querschnitte.

§. 351. Grundgleichungen. Wir setzen, wie in §. 330, zur Abkürzung

263. $$\frac{P}{E F} + \frac{M}{E F r} = \mathfrak{P}, \quad \frac{M}{E W} + \frac{\mathfrak{P}}{r} = \frac{M}{E W} + \frac{P}{E F r} + \frac{M}{E F r^2} = \mathfrak{M}.$$

Wie in §. 330 ergiebt sich nun nach Sonderung der Constanten:

a. $$\Delta\varphi = \int^s \mathfrak{M}\, ds + A,$$

b. $$\begin{cases} \Delta x = -y\left(\int^s \mathfrak{M}\, ds + A\right) + \int^s y\, \mathfrak{M}\, ds + \int^x \mathfrak{P}\, dx + B, \\ \Delta y = +x\left(\int^s \mathfrak{M}\, ds + A\right) - \int^s y\, \mathfrak{M}\, ds + \int^y \mathfrak{P}\, dy + C. \end{cases}$$

Die Anwendung dieser drei Gleichungen auf die Kämpfer, für welche $\Delta\varphi$, Δx und Δy Null werden muss, liefert die Constanten und die Unbekannten V, H und M_0. Wir bezeichnen hierbei die halbe Bogenlänge

Digitized by Google

mit b und die Ordinaten der beiden Kämpfer, obwohl dieselben gleich sind, dennoch zur Unterscheidung mit h_1 und h_2. Setzen wir zunächst für $s = +b$ und $s = -b$ $\Delta\varphi = 0$, so ergiebt sich

$$\text{c.}\quad 0 = \int_{}^{+b} \mathfrak{M}\,ds + A, \quad 0 = \int_{}^{-b} \mathfrak{M}\,ds + A.$$

Die Gleichungen, welche sich ergeben, wenn man für die Kämpfer $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ setzt, stimmen genau mit den Gleichungen b, c (Seite 322, 323) überein. Die Subtraction der Gleichungen c giebt

$$264.\quad \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M}\,ds = 0.$$

Die Subtraction der Gleichungen b (Seite 322) giebt mit Rücksicht auf die eben aufgestellte Gleichung

$$265.\quad \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M}\,y\,ds + \int_{-a}^{+a} \mathfrak{P}\,dx = 0.$$

Ferner giebt die Addition der Gleichungen c (Seite 352) und die Subtraction der Gleichungen c (Seite 323):

$$0 = \int_{}^{b} \mathfrak{M}\,ds + \int_{}^{-b} \mathfrak{M}\,ds + 2A,$$

$$0 = a\int_{}^{b} \mathfrak{M}\,ds + a\int_{}^{-b} \mathfrak{M}\,ds + 2Aa - \int_{-b}^{b} \mathfrak{M}\,x\,ds - \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy.$$

Die Elimination von A aus diesen beiden Gleichungen giebt

$$266.\quad \int_{-b}^{+b} \mathfrak{M}\,x\,ds + \int_{h_1}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy = 0.$$

Durch diese drei Gleichungen 264, 265 und 266 aber ist V, H und M_0 bestimmt.

Die Gleichungen 186 (Seite 323) für die Formänderung behalten auch hier ihre Giltigkeit. Nur vereinfachen sich dieselben mit Rücksicht auf die Gleichungen 264 und 266. Somit ergiebt sich

$$267.\quad \begin{cases} \Delta x = -\frac{1}{2}\,y\left[\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,ds\right] + \int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,y\,ds + \int_{a}^{x} \mathfrak{P}\,dx, \\ \Delta y = +\frac{1}{2}\,x\left[\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,ds - \int_{s}^{-b} \mathfrak{M}\,ds\right] - \frac{1}{2}\left[\int_{b}^{s} \mathfrak{M}\,x\,ds - \int_{s}^{b} \mathfrak{M}\,x\,ds\right] \\ \qquad + \frac{1}{2}\int_{h_1}^{y} \mathfrak{P}\,dy - \frac{1}{2}\int_{y}^{h_2} \mathfrak{P}\,dy. \end{cases}$$

Für die Verrückungen des Scheitels kommen die Glieder, welche x, y als Factoren vor dem Integralzeichen haben, in Wegfall.

Digitized by Google

§. 352. Kreisförmige Axe. Setzen wir in den Gleichungen 264—266 $x = r \sin\varphi$, $y = r(1 - \cos\varphi)$, $dx = r\cos\varphi\, d\varphi$, $dy = r\sin\varphi\, d\varphi$, und für $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}$ die Ausdrücke 263, so ergeben sich, indem sich in den zwei letzten Gleichungen Glieder gegenseitig heben, folgende einfache Gleichungen:

$$268. \quad \begin{cases} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{M}{W} + \frac{P}{F\,r} + \frac{M}{F\,r^2}\right) d\varphi = 0, \\ \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{M}{W} \cos\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{M}{W} \sin\varphi\, d\varphi = 0. \end{cases}$$

Bei constantem Querschnitte würde man die drei Gleichungen

$$(1 + \varkappa) \int M\, d\varphi + \varkappa\, r \int P\, d\varphi = 0,$$
$$\int M \cos\varphi\, d\varphi = 0, \quad \int M \sin\varphi\, d\varphi = 0$$

erhalten. Handelt es sich nur um die Bestimmung der Kräfte, nicht um die Formänderung, so führen diese Gleichungen schneller zum Ziele, als die in §. 339 bis §. 350 angewendete Methode.

§. 353. Symmetrische Form und Belastung. Bei symmetrischer Form der Axe und bei gleichzeitiger symmetrischer Belastung lassen sich die Formeln des §. 351 noch vereinfachen, wenn man von den in §. 330 zu diesem Zwecke aufgestellten Beziehungen Gebrauch macht. Die Gleichungen 264 und 265 gehen über in

$$269. \quad \begin{cases} \int_0^b M\, ds = 0, \\ \int_0^b \mathfrak{M}\, y\, ds + \int_0^a \mathfrak{P}\, dx = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung 266 kommt in Wegfall, dafür aber auch die Bestimmung von V, weil hier offenbar der Druck im Scheitel horizontal wirkt, also $V = 0$ ist.

Als Verrückungen eines beliebigen Punktes ergeben sich nach 267 oder nach 188 (Seite 324):

$$270. \quad \begin{cases} \Delta x = -y \int_0^a \mathfrak{M}\, ds - \int_a^b \mathfrak{M}\, y\, ds - \int_x^a \mathfrak{P}\, dx, \\ \Delta y = +x \int_0^a \mathfrak{M}\, ds + \int_a^b \mathfrak{M}\, x\, ds - \int_y^h \mathfrak{P}\, dy, \end{cases}$$

und somit als Verrückungen des Scheitels $\Delta_0 x = 0$ und

$$271. \quad \Delta_0 y = \int_0^b \mathfrak{M}\, x\, ds - \int_0^{h_1} \mathfrak{P}\, dy.$$

Digitized by Google

§. 354. Isolirte Belastung bei kreisförmiger Axe. Bezeichnen wir links von der Last G Alles ohne, rechts von derselben Alles mit Apostroph, so wird nach §. 334

$$272.\quad \begin{cases} P = -H\cos\varphi + V\sin\varphi - G\sin\varphi, \quad P' = -H\cos\varphi + V\sin\varphi; \\ M = M_0 - H\,r\,(1-\cos\varphi) - V\,r\sin\varphi + G\,r\,(\sin\varphi - \sin\beta), \\ M' = M_0 - H\,r\,(1-\cos\varphi) - V\,r\sin\varphi. \end{cases}$$

Dies in die Gleichungen 268 eingesetzt, giebt

$$0 = M_0\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\varphi}{W} - H\,r\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} - V\,r\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{W} + G\,r\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\sin\varphi-\sin\beta)\,d\varphi}{W}$$
$$+\frac{M_0 - H\,r}{r^2}\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{d\varphi}{F} - \frac{G\sin\beta}{r}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{d\varphi}{F}.$$

$$0 = M_0\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W} - H\,r\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi}{W} - V\,r\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{W}$$
$$+ G\,r\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\sin\varphi-\sin\beta)\cos\varphi\,d\varphi}{W},$$

$$0 = M_0\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{W} - H\,r\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{(1-\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi}{W} - V\,r\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{W}$$
$$+ G\,r\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\sin\varphi-\sin\beta)\sin\varphi\,d\varphi}{W} = 0.$$

Wenden wir die in §. 331 zur Vereinfachung aufgestellten Relationen an, so ergiebt sich

$$0 = 2\,M_0\int_{0}^{\alpha}\frac{d\varphi}{W} - 2\,H\,r\int_{0}^{\alpha}\frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} + G\,r\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\sin\varphi-\sin\beta)\,d\varphi}{W}$$
$$+\frac{2\,(M_0 - H\,r)}{r^2}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\varphi}{F} - \frac{G\sin\beta}{r}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{d\varphi}{F},$$

$$0 = 2\,M_0\int_{0}^{\alpha}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W} - 2\,H\,r\int_{0}^{\alpha}\frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi}{W} + G\,r\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\sin\varphi-\sin\beta)\cos\varphi\,d\varphi}{W},$$

$$0 = -2\,V\,r\int_{0}^{\alpha}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{W} + G\,r\int_{\beta}^{\alpha}\frac{(\sin\varphi-\sin\beta)\sin\varphi\,d\varphi}{W}.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

Digitized by Google

273.
$$\begin{cases} A = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W}, \quad A_1 = \int_0^\alpha \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{W}, \quad A_2 = \int_0^\alpha \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{W}, \\ A_3 = \int_0^\alpha \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{W}, \quad A_4 = \int_0^\alpha \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{W}, \quad A_5 = \int_0^\alpha \frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{W}, \\ B = \int_0^\beta \frac{d\varphi}{W}, \quad B_1 = \int_0^\beta \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{W} \text{ u. s. w.} \\ \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{r^2}\int_0^\beta \frac{d\varphi}{F}. \end{cases}$$

Hiernach gehen die vorigen Gleichungen über in

274.
$$\begin{cases} 2A M_0 - 2(A - A_2) H r + [A_1 - B_1 - (A - B)\sin\beta] G r \\ \qquad + 2\mathfrak{A}((M_0 - H r) - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) G r \sin\beta = 0, \\ 2A_2 M_0 - 2(A_2 - A_4) H r + [A_5 - B_5 - (A_2 - B_2)\sin\beta] G r = 0, \\ 2A_3 V - [A_3 - B_3 - (A_1 - B_1)\sin\beta] G = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich

275. $$V = \frac{A_3 - B_3 - (A_1 - B_1)\sin\beta}{2A_3},$$

276. $$H = \frac{(A_1 - B_1)A_2 - (A - B + \mathfrak{A} - \mathfrak{B})A_3\sin\beta - (A + \mathfrak{A})[A_5 - B_5 - (A_2 - B_2)\sin\beta]}{2(A A_4 - A_2^2 - A_4\mathfrak{A})},$$

277. $$M_0 = \frac{A_2 - A_4}{A_2} H r - \frac{A_5 - B_5 - (A_2 - B_2)\sin\beta}{2A_2} G r.$$

Die einzelnen Integrale berechnet man am besten in der in §. 331 gezeigten Weise. Haben ε und δ dieselbe Bedeutung wie dort, so wird

278.
$$\begin{cases} B W_0 = \beta + \int_0^\beta \varepsilon\, d\varphi, \quad \mathfrak{B} F_0 r^2 = \beta + \int_0^\beta \delta\, d\varphi. \\ B_1 W_0 = 1 - \cos\beta + \int_0^\beta \varepsilon\sin\varphi\, d\varphi, \\ B_2 W_0 = \sin\beta + \int_0^\beta \varepsilon\cos\varphi\, d\varphi, \\ B_3 W_0 = \frac{1}{2}(\beta - \sin\beta\cos\beta) + \int_0^\beta \varepsilon\sin^2\varphi\, d\varphi, \\ B_4 W_0 = \frac{1}{2}(\beta + \sin\beta\cos\beta) + \int_0^\beta \varepsilon\cos^2\varphi\, d\varphi, \\ B_5 W_0 = \frac{1}{2}\sin^2\beta + \int_0^\beta \varepsilon\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi. \end{cases}$$

Digitized by Google

Die Ausdrücke für die A_n ergeben sich, wenn man α für β setzt. Durch successive Berechnung der Werthe der B_n für die verschiedenen angenommenen β ergeben sich auch diejenigen der A_n mit.

§. 355. Construction. Nach der Berechnung der Werthe von V, H, M für die verschiedenen angenommenen β ergeben sich die entsprechenden Ordinaten η der Kämpferdrucklinie leicht nach der Formel 196 (Seite 329). Setzen wir $\xi = r \sin\beta$, so wird

$$279. \quad \eta = \frac{V r \sin\beta - M}{H}.$$

Die Durchschnittspunkte Φ, Ψ der Kämpferdrücke mit den durch A, B gehenden Verticalen (Fig. 112, Seite 329) sind durch die Formeln 197, nämlich

$$c_1 = -\frac{M_1}{H}, \quad c_2 = -\frac{M_2}{H}$$

bestimmt, wobei $M_1 = M_0 - H r (1 - \cos\alpha) - V r \sin\alpha + G r (\sin\alpha - \sin\beta)$, $M_2 = M_0 - H r (1 - \cos\alpha) + V r \sin\alpha$ ist. Umständlicher ist allerdings die Berechnung der Coordinaten der Kämpferdruck-Umhüllungslinie nach 198 (Seite 330). Setzt man in den Ausdrücken für V, H, M_0 die Werthe für die B_n ein, differenziirt nach β und beachtet, dass $\frac{1}{d\beta}\int_0^\beta f(\varphi)\, d\varphi = f(\beta)$ ist, so ergiebt sich nach gehöriger Reduction

$$280. \quad \begin{cases} \frac{dV}{d\beta} = -\frac{(A_1 - B_1)\cos\beta}{2 A_2}, \\ \frac{dH}{d\beta} = \frac{A_1 A_2 + [A_2 (B + \mathfrak{B}) - B_2 (A + \mathfrak{A})\cos\beta + \frac{A_2}{F r^2}\sin\beta}{2 (A A_4 - A_2^2 - A_4 \mathfrak{A})}, \\ \frac{dM_0}{d\beta} = \frac{(A_2 - A_4) r}{A_2}\frac{dH}{d\beta} + \frac{A_2 - B_2}{2 A_2}\cos\beta. \end{cases}$$

§. 356. Stetige, symmetrische Belastung bei kreisförmiger Axe. Die Last pro horizontale Längeneinheit in einem beliebigen Punkte sei q, die Gesammtlast vom Scheitel bis zum fraglichen Querschnitte $= G$ und das Moment derselben für die horizontale Schweraxe des fraglichen Querschnittes $= N$. Alsdann wird

$$281. \quad \begin{cases} P = -H\cos\varphi - G\sin\varphi, \\ M = M_0 - H r (1 - \cos\varphi) + N. \end{cases}$$

Die Gleichungen 268 gehen im vorliegenden Falle über in

$$\int_0^\alpha \left(\frac{M}{W} + \frac{P r + M}{F r^2}\right) d\varphi = 0, \quad \int_0^\alpha \frac{M\cos\varphi\, d\varphi}{W} = 0,$$

d. i. nach Einsetzung der vorstehenden Ausdrücke für P und M:

Digitized by Google

282.
$$\begin{cases} M_0 \int \frac{d\varphi}{W} - H r \int \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} + \int \frac{N\,d\varphi}{W} \\ \quad + \frac{M_0}{r^2}\int \frac{d\varphi}{F} - \frac{H}{r}\int \frac{d\varphi}{F} + \frac{1}{r^2}\int \frac{N\,d\varphi}{F} - \frac{1}{r}\int \frac{G \sin\varphi\,d\varphi}{F} = 0, \\ M_0 \int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W} - H r \int \frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi}{W} + \int \frac{N\cos\varphi\,d\varphi}{W} = 0, \end{cases}$$

wobei die Integrale zwischen den Grenzen 0 und α zu nehmen sind. Die Grössen G und N berechnen sich leicht, wenn q für verschiedene Querschnitte bekannt ist. Es ist nämlich

$$G = \int_0^x q\,dx = r \int_0^\varphi q \cos\varphi\,d\varphi,$$

$$N = \int_0^x G\,dx = \int_0^\varphi G \cos\varphi\,d\varphi.$$

Beispiel. Wir nehmen als Beispiel ein Gewölbe von 10 Mtr. mittlerer Spannweite und 60 Grad halben Centriwinkel an, was einem mittleren Radius von 5,774 Meter entspricht. Der Einfachheit wegen denken wir uns das Gewölbe mit Steinmaterial überschüttet, welches dasselbe specifische Gewicht, wie der Bogen selbst hat, und oben horizontal abgegrenzt ist. Ist an einer beliebigen Stelle die Gewölbs-Dicke ∂, die Ueberschüttungshöhe u, das Gewicht des Cubikmeters $= \gamma$, die Last pro einen horizontalen Meter $= q$, so ist $q = u\gamma + \partial\gamma \sec\varphi$. Wir nehmen $\gamma = 1$ an. In folgender Tabelle sind die Werthe von ∂, u, q, F, W, $\frac{1}{F}$, $\frac{1}{W}$, ε, δ und die hiernach berechneten Werthe von G, H, $\frac{N}{W}$, $\frac{N}{F}$, $\frac{G}{F}$ zusammengestellt.

φ	∂	u	q	F	W	$\frac{1}{F}$	$\frac{1}{W}$	δ	ε	G	N	$\frac{N}{W}$	$\frac{N}{F}$	$\frac{G}{F}$
0	0,70	1,30	2,00	0,70	0,0286	1,43	35,0	+ 0,23	+ 14,0	0	0	0	0	0
12	0,72	1,43	2,17	0,72	0,0311	1,39	32,2	+ 0,19	+ 11,2	2,488	1,488	47,9	2,07	3,46
24	0,76	1,81	2,64	0,76	0,0366	1,32	27,3	+ 0,12	+ 6,3	5,226	5,877	160,4	7,76	6,90
36	0,84	2,43	3,47	0,84	0,0494	1,19	20,2	− 0,01	− 0,8	8,389	12,945	261,5	15,40	9,98
48	0,96	3,26	4,70	0,96	0,0737	1,04	13,6	− 0,16	− 7,4	12,027	22,069	300,1	22,95	12,51
60	1,10	4,26	6,46	1,10	0,1109	0,91	9,0	− 0,29	− 12,0	15,935	31,969	287,7	29,09	14,50
Gr.	Mittel			0,83	0,0476	1,20	21,0							

Hiernach wird z. B., da $W_0 = 0{,}0476$, $\frac{1}{W_0} = 21{,}0$ ist, nach der im Anhange gegebenen Regel zur Berechnung einer Fläche aus 6 Ordinaten: $\int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W} = 21{,}0 \cdot \sin 60° + \frac{\text{Arc } 60°}{288}\Big[19 \cdot 14{,}0 \cdot \cos 0 + 75 \cdot 11{,}2 \cdot \cos 120 + 50 \cdot 6{,}3 \cdot \cos 24° - 50 \cdot 0{,}8 \cdot \cos 36° - 75 \cdot 7{,}4 \cdot \cos 48° - 19 \cdot 12{,}0 \cdot \cos 60°\Big] = 21{,}0 \cdot 0{,}86603 + \frac{1.04720}{288}\Big[266{,}0 + 821.6 + 287{,}8 - 32{,}36 - 371{,}4 - 114{,}0\Big] = 18{,}1865 + 3{,}1184 = 21{,}3049.$

In dieser Weise ergiebt sich

Digitized by Google

$$\int \frac{d\varphi}{W} = 21{,}9911 + 2{,}1740 = 24{,}1651,$$

$$\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{W} = 18{,}1865 + 3{,}1184 = 21{,}3049,$$

$$\int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{W} = 15{,}5422 + 3{,}7074 = 19{,}2496,$$

$$\int \frac{(1-\cos\varphi)\, d\varphi}{W} = 24{,}1651 - 21{,}3049 = 2{,}8602,$$

$$\int \frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi}{W} = 21{,}3049 - 19{,}2496 = 2{,}0553,$$

$$\int \frac{d\varphi}{F} = 1{,}2566 + 0{,}0240 = 1{,}2806,$$

$$\int \frac{N\, d\varphi}{W} = 191{,}482, \qquad \int \frac{N\cos\varphi\, d\varphi}{W} = 142{,}579,$$

$$\int \frac{N\, d\varphi}{F} = 13{,}044, \qquad \int \frac{G\sin\varphi\, d\varphi}{F} = 5{,}176.$$

Daher wird nun nach 282:

$$24{,}1267\, M_0 - 16{,}2931\, H + 190{,}997 = 0,$$
$$21{,}3049\, M_0 - 11{,}8673\, H + 142{,}579 = 0$$

und hieraus ergiebt sich

$$H = 10{,}348, \quad M_0 = -0{,}9281.$$

Nach 281 wird nun

$$P = -10{,}348\cos\varphi - G\sin\varphi, \quad M = -60{,}677 + 59{,}749\cos\varphi + N.$$

Die hiernach für P, M und $e = \frac{M}{P}$ berechneten Werthe sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

φ	P	M	e	φ	P	M	e
0	−10,848	−0,928	+0,0897	36°	−13,303	+0,606	−0,0456
12°	−10,639	−0,745	+0,0700	48°	−17,903	+1,372	−0,0766
24°	−11,587	−0,215	+0,0186	60°	−18,974	+1,167	−0,0615

Bei constantem Querschnitte würde sich für die vorausgesetzte Belastung für den Scheitel $H = 10{,}674$ $M_0 = 0{,}7486$, $e = 0{,}702$ und für den Kämpfer $P = 19{,}192$, $M = 1{,}7017$, $e = 0{,}887$ ergeben.

XXXIX. Kapitel.

Einfluss der Temperatur.

§. 357. Allgemeines. Wenn sich die Temperatur eines allseitig freien Körpers, welcher in allen Punkten nach parallelen Richtungen dieselben Elasticitäts- und Ausdehnungcoefficienten besitzt, in allen Punkten um gleichviel ändert, so entstehen durch die Temperaturänderung keine Spannungen. Denn entständen Spannungen, so müssten dieselben in allen Punkten eines ebenen Schnittes constant sein; dann aber könnten, da keine äusseren Kräfte existiren, die beiden durch den Schnitt getrennten Theile nicht im Gleichgewichte sein.

Digitized by Google

Sind die genannten Bedingungen nicht erfüllt, ändert sich also z. B. die Temperatur nicht in allen Punkten um gleich viel oder ist der Körper nicht frei, so dass die Möglichkeit zur Entstehung äusserer Kräfte geboten ist, so können allerdings Spannungen in Folge der Temperaturänderung entstehen.

Wir wollen im Folgenden immer voraussetzen, dass die Temperaturänderung in allen Punkten gleich gross, dass aber der Körper nicht frei sei.

Wir setzen voraus, dass eine Temperatur t_0 existire, bei welcher keine Spannungen vorhanden sind und nennen diese Temperatur die mittlere. Die Abweichung einer beliebigen Temperatur von der mittleren bezeichnen wir mit t und den Längenausdehnungscoefficienten (für einen Grad) mit ε.

Sehr einfach gestaltet sich die Bestimmung der Spannungen bei einem an den Enden festgehaltenen, geraden Stabe. Wäre der Stab, welcher die Länge l haben möge, frei, so würde seine relative Längenänderung εt sein. Da er aber keine Längenänderung annehmen kann, so ist die entstehende Normalspannung N eben so gross, wie bei einer durch eine äussere Kraft erzeugten relativen Längenänderung von εt, nämlich

$$283. \quad N = -E \varepsilon t,$$

wenn man beachtet, dass bei einer Temperaturerhöhung ein Druck, bei einer Temperaturerniederung ein Zug entsteht.

Ist die Querschnittsfläche F, so würde diese Spannung einer äusseren, an jedem Ende wirkenden, Kraft von $NF = EF\varepsilon t$ entsprechen.

In folgender Tabelle sind die Werthe von E, ε (für 1 Grad Celsius), sowie von $E\varepsilon$ für einige Materialien zusammengestellt (E in Kilogrammen pro □Centim.):

Material	E	ε	$E\varepsilon$
Holz	120000	0,0000038	0,46
Stein	130000	0,0000070	0,91
Gusseisen	1010000	0,0000112	11,31
Messing	1020000	0,0000187	19,07
Kupfer	1160000	0,0000172	19,95
Schmiedeeisen	2040000	0,0000118	24,07
Stahl	2350000	0,0000115	27,03

Für die Steine ist natürlich E und ε je nach der Gattung verschieden; wir haben indess nur einen Mittelwerth angegeben, da die Werthe für die einzelnen Gesteinsgattungen noch lange nicht genügend bekannt sind.

§. 358. Einfluss der Temperatur bei Bogenträgern. **Da sich bei der Temperaturänderung die Länge eines Bogenträgers ändert, während die Spannweite wegen der Festhaltung der Bogenenden unveränderlich ist, so muss sich im Allgemeinen die Krümmung der Axe ändern, was natürlich die Entstehung von äusseren Kräften und Spannungen zur Folge hat. In der Folge wollen wir uns hauptsächlich mit der Bestimmung dieser äusseren Kräfte und Spannungen, sowie der entstehenden Formänderung beschäftigen.**

Digitized by Google

Die relative Längenänderung, welche durch die aus der Temperaturänderung entsprungenen äusseren Kräfte entsteht, ist nach 7 (Seite 270) $= \frac{1}{EF}\left(P + \frac{M}{r}\right)$. Direct entsteht durch die Temperaturänderung die relative Längenänderung εt. Die gesammte relative Längenänderung ist daher

$$284. \quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{Pr + M}{EFr} + \varepsilon t.$$

Daher ist die Längenänderung der Axe

$$285. \quad \Delta s = \frac{1}{Er}\int_0^s \frac{Pr + M}{F} ds + \varepsilon t s.$$

Die Aenderung des Winkels zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten und die wirkliche Verdrehung eines Querschnittes ist nach 8 (Seite 270) und 25 (Seite 274) bestimmt durch

$$286. \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{EW} + \frac{Pr + M}{EFr},$$

$$287. \quad \Delta\varphi = \frac{1}{E}\int \frac{M}{W} ds + \frac{1}{Er}\int \frac{Pr + M}{F} ds.$$

Endlich ist die Verrückung eines Punktes nach 30 (Seite 276) bestimmt durch

$$288. \quad \begin{cases} \Delta x = -y\Delta\varphi + \int y\, d\Delta\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds} dx, \\ \Delta y = +x\Delta\varphi - \int x\, d\Delta\varphi + \int \frac{\Delta ds}{ds} dy. \end{cases}$$

In der Folge wollen wir stets eine kreisförmige Krümmung der Axe voraussetzen.

A. Variabeler Querschnitt.

§. 359. Grundgleichungen im Allgemeinen. Unter der Annahme einer kreisförmigen Axe wird allgemein

$$289. \quad \begin{cases} P = +H\cos\varphi, \quad Q = H\sin\varphi, \\ M = M_0 + Hr(1 - \cos\varphi), \\ Pr + M = Hr + M_0. \end{cases}$$

Daher wird nach den vorigen Gleichungen

$$290. \quad \Delta s = \frac{Hr + M_0}{E}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} + r\varepsilon t\varphi,$$

$$291. \quad \Delta\varphi = \frac{M_0 r}{E}\int \frac{d\varphi}{W} + \frac{Hr^2}{E}\int \frac{(1 - \cos\varphi)\, d\varphi}{W} + \frac{Hr + M_0}{Er}\int \frac{d\varphi}{F} + A.$$

$$292. \quad \begin{cases} \Delta x = -r\Delta\varphi(1 - \cos\varphi) + \frac{r^2}{E}\int \frac{M}{W}(1 - \cos\varphi)\, d\varphi + \frac{Hr + M_0}{E}\int \frac{d\varphi}{F} + r\varepsilon t\sin\varphi + B, \\ \Delta y = +r\Delta\varphi\sin\varphi - \frac{r^2}{E}\int \frac{M}{W}\sin\varphi\, d\varphi - r\varepsilon t\cos\varphi + C, \end{cases}$$

Digitized by Google

oder nach Einsetzung des Ausdruckes für M und $\Delta\varphi$:

$$293.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{M_0 r^2}{E}\left[\int\dfrac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} - (1-\cos\varphi)\int\dfrac{d\varphi}{W}\right] \\ \qquad + \dfrac{H r^3}{E}\left[\int\dfrac{(1-\cos\varphi)^2 d\varphi}{W} - (1-\cos\varphi)\int\dfrac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W}\right] \\ \qquad + \dfrac{H r + M_0}{E}\cos\varphi\int\dfrac{d\varphi}{F} + r\varepsilon t\sin\varphi - A r(1-\cos\varphi) + B. \\ \Delta y = \dfrac{M_0 r^2}{E}\left[\sin\varphi\int\dfrac{d\varphi}{W} - \int\dfrac{\sin\varphi\,d\varphi}{W}\right] \\ \qquad + \dfrac{H r^3}{E}\left[\sin\varphi\int\dfrac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} - \int\dfrac{\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W}\right] \\ \qquad + \dfrac{H r + M_0}{E}\sin\varphi\int\dfrac{d\varphi}{F} - r\varepsilon t\cos\varphi + A r\sin\varphi + C. \end{cases}$$

Wir unterscheiden nun die bekannten drei Fälle, in welchen drei Gelenke, zwei Gelenke oder kein Gelenk vorhanden sind.

§. 360. Bogen mit drei Gelenken. Des Scheitelgelenkes wegen ist $M_0 = 0$, also $M = H r(1-\cos\varphi)$. Am Kämpfer ist wegen des Kämpfergelenkes $M = 0$, mithin $0 = H r(1-\cos\alpha)$, folglich $H = 0$. Demnach ist für jeden Querschnitt $P = 0$, $Q = 0$, $M = 0$, d. h.

Bei einem Bogen mit drei Gelenken entstehen durch die Temperaturänderung keine äusseren Kräfte, also auch keine Spannungen.

Es wird nun $\Delta\varphi = A$, $\Delta x = r\varepsilon t\sin\varphi - A r(1-\cos\varphi) + B$, $\Delta y = -r\varepsilon t\cos\varphi + A r\sin\varphi + C$. Für $\varphi = 0$ wird $\Delta x = 0$, daher $B = 0$. Für $\varphi = \alpha$ wird $\Delta x = 0$, daher $A = \dfrac{\varepsilon t\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ und endlich für $\varphi = \alpha$ wird $\Delta y = 0$, daher $C = r\varepsilon t\cos\alpha - A r\sin\alpha = -r\varepsilon t$. Dies eingesetzt giebt

$$294.\quad \begin{cases} \Delta\varphi = \varepsilon t\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \varepsilon t\cot\frac{1}{2}\alpha, \\ \Delta x = r\varepsilon t\dfrac{\sin(\alpha-\varphi) - \sin\alpha + \sin\varphi}{1-\cos\alpha}, \\ \Delta y = -r\varepsilon t\dfrac{1-\cos\alpha+\cos\varphi-\cos(\alpha-\varphi)}{1-\cos\alpha}. \end{cases}$$

Die verticale Verrückung des Scheitels wird hiernach einfach

$$295.\quad \Delta_0 y = -2 r\varepsilon t.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsformeln

$$296.\quad \begin{cases} \Delta x = r\varepsilon t\dfrac{\varphi(\alpha-\varphi)}{\alpha} = \varepsilon t\dfrac{x(a-x)}{a}, \\ \Delta y = -2 r\varepsilon t\dfrac{(\alpha-\varphi)}{\alpha} = -\varepsilon t\dfrac{a(a-x)}{h}. \end{cases}$$

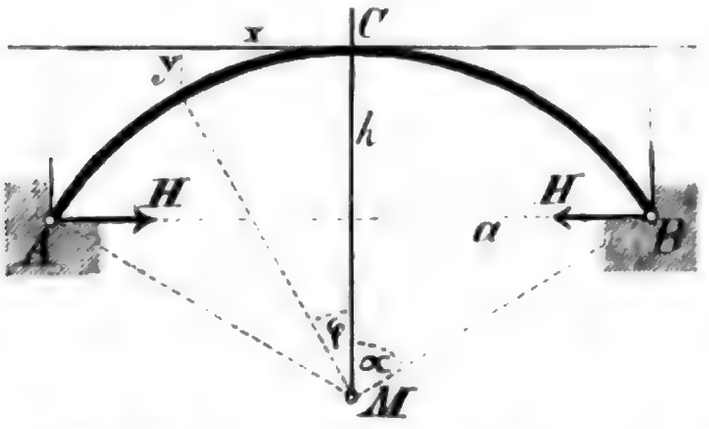
Hiernach verhält sich $\Delta x : \Delta y = x h : a^2$, so dass im Allgemeinen Δx gegen Δy nur klein ist.

Digitized by Google

§. 361. Bogen mit Kämpfergelenken (Fig. 114). Am Kämpfer ist $M = 0$, daher $0 = M_0 + H r (1 - \cos\alpha)$, folglich

$$297. \quad \begin{cases} M_0 = -H r (1 - \cos\alpha), \\ M = -H r (\cos\varphi - \cos\alpha), \\ P r + M = +H r \cos\alpha. \end{cases}$$

Fig. 114.



Nach 291 wird, wenn man beachtet, dass für $\varphi = 0$, $\Delta\varphi = 0$ werden muss,

$$298. \quad \Delta\varphi = -\frac{H r^2}{E}\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{W}\,d\varphi + \frac{H\cos\alpha}{E}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{F}.$$

Aus der ersten der Gleichungen 292 folgt, wenn man beachtet, dass für $\varphi = 0$: $\Delta x = 0$, $\Delta\varphi = 0$ wird, nach Einsetzung des Ausdruckes für $\Delta\varphi$:

$$299. \quad \Delta x = \frac{H r^3}{E}\left[(1 - \cos\varphi)\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{W}\,d\varphi - \int_0^{\varphi}\frac{(1 - \cos\varphi)(\cos\varphi - \cos\alpha)}{W}\,d\varphi\right]$$
$$+ \frac{H r\cos\alpha\cos\varphi}{E}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{F} + r\varepsilon t\sin\varphi.$$

Aus der zweiten der Gleichungen 293 folgt, wenn man beachtet, dass für $\varphi = \alpha$: $\Delta y = 0$ wird und $\Delta\varphi$ einen durch 298 bestimmten Werth annimmt:

$$300. \quad \Delta y = \frac{H r^3}{E}\left[\sin\alpha\int_0^{\alpha}\frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{W}\,d\varphi - \sin\varphi\int_0^{\varphi}\frac{\cos\varphi - \cos\alpha}{W}\,d\varphi\right.$$
$$\left. - \int_{\varphi}^{\alpha}\frac{(\cos\varphi - \cos\alpha)\sin\varphi}{W}\,d\varphi\right]$$
$$+ \frac{H r\cos\alpha}{E}\left[\sin\varphi\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{F} - \sin\alpha\int_0^{\alpha}\frac{d\varphi}{F}\right] - r\varepsilon t(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

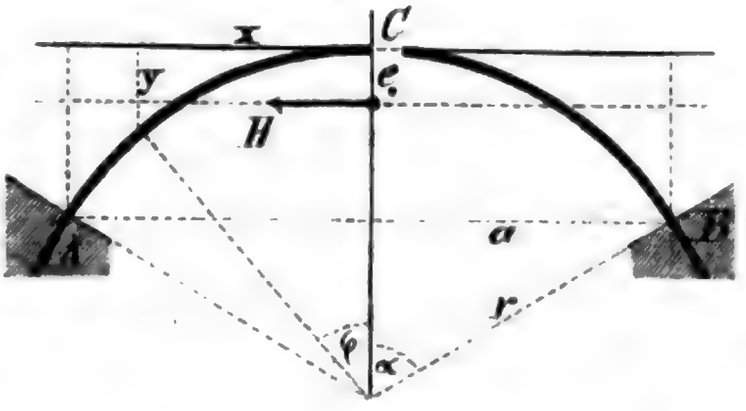
Für $\varphi = \alpha$ muss $\Delta x = 0$ werden. Aus dieser Bedingung ergiebt sich als Ausdruck für den Horizontalschub:

Digitized by Google

301. $$H = -\frac{E\,\varepsilon\,t\sin\alpha}{r^2\int_0^\alpha \frac{\cos\varphi\,(\cos\varphi-\cos\alpha)}{W}\,d\varphi - r^2\cos\alpha\int_0^\alpha \frac{\cos\varphi-\cos\alpha}{W}\,d\varphi + \cos^2\alpha\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}.$$

§. 362. Bogen ohne Gelenk. (Fig. 114.) Hier sind für P, Q, M, P r + M die allgemeinen Ausdrücke 289 beizubehalten. Ebenso ist der Ausdruck 290 für Δs direkt anzuwenden. Nach 291 ergiebt sich, wenn man beachtet, dass für $\varphi = 0$, $\Delta\varphi = 0$ werden muss,

Fig. 115.



302. $$\Delta\varphi = \frac{M_0\,r}{E}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{W} + \frac{H\,r^2}{E}\int_0^\varphi \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} + \frac{H\,r + M_0}{E\,r}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F}.$$

Aus der ersten der Gleichungen 292 folgt mit Beachtung des Umstandes, dass für $\varphi = 0$: $\Delta x = 0$, $\Delta\varphi = 0$ werden muss und nach Einsetzung des Ausdruckes für $\Delta\varphi$:

303. $$\Delta x = \frac{M_0\,r^2}{E}\left[\cos\varphi\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{W} - \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W}\right]$$
$$- \frac{H\,r^3}{E}\left[(1-\cos\varphi)\int_0^\varphi \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} - \int_0^\varphi \frac{(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi}{W}\right]$$
$$+ \frac{H\,r + M_0}{E}\cos\varphi\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} + r\,\varepsilon\,t\sin\varphi.$$

Aus der zweiten der Gleichungen 292 folgt, wenn man beachtet, dass für $\varphi = \alpha$: $\Delta y = 0$, $\Delta\varphi = 0$ werden muss

304. $$\Delta y = \frac{M_0\,r^2}{E}\left[\sin\varphi\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{W} + \int_\varphi^\alpha \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{W}\right]$$
$$+ \frac{H\,r^3}{E}\left[\sin\varphi\int_0^\varphi \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} + \int_\varphi^\alpha \frac{\sin\varphi\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W}\right]$$
$$+ \frac{H\,r + M_0}{E}\sin\varphi\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{F} - r\,\varepsilon\,t\,(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Digitized by Google

Für $\varphi = \alpha$ muss $\Delta\varphi = 0$ werden. Diese Bedingung giebt als Beziehung zwischen H und M_0:

$$305.\quad M_0 = -Hr\,\frac{r^2\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} + \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}{r^2\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{W} + \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{F}}.$$

Ist der Abstand des im Scheitel wirkenden Horizontaldruckes von der Schweraxe des Scheitelquerschnittes $= e_0$, so ist $M_0 = -He_0$. Demnach ist e_0 der Bruch auf der rechten Seite des vorigen Ausdruckes, mit r multiplicirt.

Eine Beziehung zwischen M_0 und Hr, welche F nicht enthält, ergiebt sich, wenn man für $\varphi = \alpha$: $\Delta\varphi = 0$, $\Delta x = 0$ setzt und die mit $r\cos\alpha$ multiplicirte erste Gleichung von der zweiten subtrahirt. In dieser Weise ergiebt sich

$$306.\quad \frac{M_0 r}{E}\int_0^\alpha \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W} + \frac{Hr^2}{E}\left[\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} - \int_0^\alpha \frac{(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi}{W}\right] = \varepsilon t \sin\alpha.$$

Wir setzen $M_0 = -\mu Hr$, worin μ den Bruch auf der rechten Seite der Gleichung 305 bezeichnet. Dies in die vorige Gleichung eingesetzt und auf H reducirt, giebt

$$307.\quad H = \frac{E\varepsilon t \sin\alpha}{r^2\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{W} - r^2\int_0^\alpha \frac{(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi}{W} - \mu r^2\int_0^\alpha \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{W}}.$$

§. 363. Beanspruchung. Die durch die Temperaturänderung eintretende Spannung ist durch 9 (Seite 271) oder 22 (Seite 274) bestimmt. Meist gestatten die letzteren Gleichungen eine bequemere Anwendung. Nach diesen ist die Spannung N_1 in dem obersten und die Spannung N_2 in den untersten Fasern

$$308.\quad N_1 = \frac{H a_1 e_2}{W},\qquad N_2 = \frac{H a_2 e_1}{W},$$

worin a_1, a_2 den Abstand der obersten und untersten Fasern von der Axe und e_1, e_2 den Abstand des Kernpunktes des betreffenden Querschnittes (siehe §. 288) von der Richtung des Horizontaldruckes H bedeutet. Bei Bogenträgern mit Kämpfergelenken wirkt H in der Richtung der Sehne, bei Bogen ohne Gelenk in einer Horizontalen, welche um e_0 unter dem Scheitel liegt.

Besteht der Träger aus zwei unendlich niedrigen Gurten mit den Querschnitten f_1, f_2 und dem Abstande oder der Trägerhöhe b, so wird nach 45 (Seite 280)

$$N_1 = \frac{H e_2}{b f_1},\qquad N_2 = \frac{H e_1}{b f_2}.$$

Hiernach ist es nicht schwer, für specielle Querschnittsformen den

Digitized by Google

Ausdruck zur Berechnung der Querschnittsdimensionen mit Rücksicht auf die Temperatur aufzustellen, indem man zum Ausdruck für die durch die Belastung erzeugte Spannung den Ausdruck für die durch die Temperaturänderung erzeugte Spannung hinzufügt und die Summe dem Sicherheitscoefficienten gleich setzt.

B. Constanter Querschnitt.

§. 364. Bogen mit Kämpfergelenken. Als Horizontalschub ergiebt sich nach 301 durch Ausführung der Integration, wenn man zur Abkürzung $\frac{W}{F r^2} = \varkappa$ setzt,

$$309.\quad H = -\frac{2 E W \varepsilon t \sin\alpha}{r^2(\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha + 2\alpha\cos^2\alpha) + 2\varkappa r^2 \alpha \cos^2\alpha}.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdruck

$$310.\quad H = -\frac{15 E W \varepsilon t}{r^2(2\alpha^4 + 15\varkappa)} = -\frac{15 E W F \varepsilon t}{8 F h^2 + 15 W}.$$

Je kleiner die Stichhöhe h ist, desto grösser ist bei sonst gleichen Dimensionen H; für $h = 0$ wird entsprechend dem geraden Stabe $H = E F \varepsilon t$.

Die Formeln 298, 299, 300 geben durch Ausführung der Integration unter Annahme eines constanten F und W:

$$\Delta\varphi = \frac{H r^2}{E W}(\varphi\cos\alpha - \sin\varphi) + \frac{H}{E F}\varphi\cos\alpha,$$

$$311.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{H r^3}{2 E W}(\varphi - 2\cos\alpha\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi + 2\varphi\cos\alpha\cos\varphi) \\ \qquad + \dfrac{H r}{E F}\varphi\cos\alpha\cos\varphi + r\varepsilon t\sin\varphi, \\ \Delta y = \dfrac{H r^3}{2 E W}\left[\sin^2\alpha - \sin^2\varphi - 2\cos\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi + \alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi)\right] \\ \qquad - \dfrac{H r}{E F}(\alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi) - r\varepsilon t(\cos\varphi - \cos\alpha). \end{cases}$$

Die verticale Verrückung des Scheitels ist hiernach

$$312.\quad \Delta_0 y = -\frac{H r^3}{2 E W}(2 - 2\cos\alpha - 3\sin^2\alpha + 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha) - \frac{H r}{E F}\alpha\sin\alpha - r\varepsilon t(1 - \cos\alpha).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke nach Einsetzung des Ausdruckes für H:

$$313.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\varphi(\alpha^2 - \varphi^2)(4\alpha^2 - \varphi^2)}{2(2\alpha^4 + 15\varkappa)} r\varepsilon t, \\ \Delta y = -\dfrac{5(5\alpha^4 - 6\alpha^2\varphi^2 + \varphi^4)}{8(2\alpha^4 + 15\varkappa)} r\varepsilon t, \\ \Delta_0 y = \dfrac{25\alpha^4}{8(2\alpha^4 + 15\varkappa)} r\varepsilon t = -\dfrac{25 F a^2 h \varepsilon t}{32 F h^2 + 60 W}. \end{cases}$$

Digitized by Google

In folgender Tabelle sind die genauen Werthe von H und $\Delta_0 y$ zusammengestellt. Dabei ist $H = \frac{H_0 F h^2}{F h^2 + A W}$ gesetzt, wenn H_0 den Horizontalschub ohne Rücksicht auf $\varkappa$ bedeutet. Bei den Werthen für $\Delta_0 y$ ist $\varkappa$ vernachlässigt.

α	H_0		A	$\Delta_0 y$
0	∞	1,875	1,875	1,563
10	8089	1,867	1,854	1,564
20	506,7	1,843	1,767	1,566
30	100,4	1,802	1,635	1,570
40	31,92	1,747	1,453	1,576
50	13,14	1,677	1,245	1,583
60	6,372	1,593	0,963	1,593
90	1,273	1,273	0	1,637
Gr.	$\cdot \frac{E W \varepsilon t}{r^2}$	$\cdot \frac{E W \varepsilon t}{h^2}$		$\cdot -r \varepsilon t$

Setzt man $H = \frac{H_0}{1 + B \varkappa}$, so stimmen die Werthe von B mit den in der Tabelle auf Seite 313 enthaltenen überein.

§. 365. Bogen ohne Gelenk. Nach 305 ergiebt sich zunächst als Beziehung zwischen M_0 und H r:

$$314. \quad M_0 = -H r \frac{(1+\varkappa)\alpha - \sin\alpha}{(1+\varkappa)\alpha}.$$

Nach 306 wird

$$M_0 r \sin\alpha - \tfrac{1}{2} H r^2 (\alpha - 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) = E W \varepsilon t \sin\alpha.$$

Setzt man für M_0 den vorigen Ausdruck, so ergiebt sich

$$315. \quad \begin{cases} H = -\dfrac{2 E W \varepsilon t (1+\varkappa)\alpha \sin\alpha}{r^2[(1+\varkappa)(\alpha^2 + \alpha\sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]}, \\ M_0 = \dfrac{2 E W \varepsilon t \sin\alpha [(1+\varkappa)\alpha - \sin\alpha]}{r[(1+\varkappa)(\alpha^2 + \alpha\sin\alpha\cos\alpha) - 2\sin^2\alpha]}. \end{cases}$$

Der Abstand e_0 des Horizontaldruckes im Scheitel von der Axe des Scheitelquerschnittes ist

$$316. \quad e_0 = -\frac{(1+\varkappa)\alpha - \sin\alpha}{(1+\varkappa)\alpha} r.$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke, wenn man nur $\varkappa$ gegen α^4, α^2, nicht aber gegen 1 berücksichtigt,

$$317. \quad e_0 = \frac{\alpha^2 + 6\varkappa}{6} r = \frac{(F a^2 + 6 W) h}{3 F a^2}.$$

Ohne Rücksicht auf $\varkappa$ wird $e_0 = \frac{1}{3} h$. Ferner wird

Digitized by Google

$$318.\quad \begin{cases} H = -\dfrac{45\,E\,W\,\varepsilon\,t}{r^2(\alpha^4+45\,\varkappa)} = -\dfrac{45\,E\,W\,F\,\varepsilon\,t}{4\,F\,h^2+45\,W}, \\ M_0 = \dfrac{15\,E\,W\,\varepsilon\,t\,(\alpha^2+6\,\varkappa)}{2\,r\,(\alpha^4+45\,\varkappa)} = \dfrac{15\,E\,W\,\varepsilon\,t\,(F\,a^2+6\,W)\,h}{(4\,F\,h^2+45\,W)\,a^2}. \end{cases}$$

Nach 302, 303 und 304 ergiebt sich

$$\Delta\varphi = \frac{M_0\,r}{E\,W}\varphi + \frac{H\,r^2}{E\,W}(\varphi - \sin\varphi) + \frac{H\,r + M_0}{E\,F\,r}\varphi,$$

$$319.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{M_0\,r^2}{E\,W}\left(\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\right) - \dfrac{H\,r^3}{2\,E\,W}\left(2\sin\varphi - 2\,\varphi\cos\varphi - \varphi + \sin\varphi\cos\varphi\right) \\ \qquad + \dfrac{H\,r + M_0}{E\,F}\varphi\cos\varphi + r\,\varepsilon\,t\sin\varphi, \\ \Delta y = \dfrac{M_0\,r^2}{E\,W}\left(\varphi\sin\varphi - \cos\alpha + \cos\varphi\right) \\ \qquad + \dfrac{H\,r^3}{2\,E\,W}\left[2\,(\cos\varphi - \cos\alpha - \varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi) - (\sin^2\alpha - \sin^2\varphi)\right] \\ \qquad + \dfrac{H\,r + M_0}{E\,F}\varphi\sin\varphi - r\,\varepsilon\,t\,(\cos\varphi - \cos\alpha). \end{cases}$$

Hierbei ist $H\,r + M_0 = H\,r\,\frac{\sin\alpha}{(1+\varkappa)\,\alpha}$. Die verticale Verrückung des Scheitels wird

$$320.\quad \Delta_0 y = \frac{M_0\,r^2}{E\,W}\left(1-\cos\alpha\right) + \frac{H\,r^3}{2\,E\,W}\left(1-\cos\alpha\right)^2 - r\,\varepsilon\,t\left(1-\cos\alpha\right).$$

Die Reihenverwandlung giebt als Näherungsausdrücke:

$$321.\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\varphi\,(2\,\alpha^2 - 3\,\varphi^2)\,(\alpha^2-\varphi^2) - 30\,\varkappa\,\varphi^3}{2\,(\alpha^4+45\,\varkappa)}\,r\,\varepsilon\,t, \\ \Delta y = -\dfrac{15\,(\alpha^2-\varphi^2)^2}{8\,(\alpha^4+45\,\varkappa)}\,r\,\varepsilon\,t. \\ \Delta_0 y = -\dfrac{15\,\alpha^4}{8\,(\alpha^4+45\,\varkappa)}\,r\,\varepsilon\,t = -\dfrac{15\,F\,a^2\,h\,\varepsilon\,t}{16\,F\,h^2+180\,W}. \end{cases}$$

Nach den genauen Formeln ist folgende Tabelle berechnet. Dabei ist $H = \frac{H_0\,F\,h^2}{F\,h^2+A\,W}$, $M_0 = \frac{M_{00}\,(F\,h^2+B\,W)}{F\,h^2+A\,W}$ gesetzt.

α	H_0		M_0		e_0	A	B	$\Delta_0 y$
0	∞	11,250	∞	3,750	0,333	11,25	6,00	1,875
10	48500	11,194	245,9	3,735	0,333	11,13	5,95	1,875
20	3031	11,024	61,18	3,690	0,335	10,76	5,80	1,876
30	594,7	10,674	26,80	3,591	0,336	10,21	5,55	1,879
40	187,0	10,236	14,82	3,467	0,339	9,48	5,21	1,883
50	75,97	9,694	9,282	3,316	0,342	8,63	4,80	1,888
60	36,08	9,020	6,241	3,121	0,346	7,69	4,34	1,895
90	6,722	6,722	2,499	2,499	0,363	5,28	2,75	1,918
Gr.	$\cdot -\frac{E\,W\,\varepsilon\,t}{r^2}$	$\cdot -\frac{E\,W\,\varepsilon\,t}{h^2}$	$\cdot \frac{E\,W\,\varepsilon\,t}{r}$	$\cdot \frac{E\,W\,\varepsilon\,t}{h}$	$\cdot - h$			$\cdot - r\,\varepsilon\,t$

Digitized by Google

Bei kleinen Stichhöhen ist unter sonst gleichen Umständen der Horizontalschub 6mal so gross, als beim Bogenträger mit zwei Gelenken.

§. 366. Beanspruchung. Die Spannungen in Folge der Temperaturänderung lassen sich leicht nach §. 363 bestimmen. Wir wollen sie hier nur unter der Voraussetzung ermitteln, dass die Höhe des Trägers gegen die Stichhöhe klein sei, so dass wir nach 308 (Seite 364).

$$N = \frac{H e a}{W} = \frac{M a}{W}$$

setzen können, worin e den Abstand der Axe des betreffenden Querschnittes von der Richtung des Horizontalschubes H, a den Abstand der gespanntesten Fasern von der Axe des Querschnittes bedeuten. Nach 309 und 315 können wir allgemein $H = k \frac{E W \varepsilon t}{h^2}$ setzen, wenn k einen nur vom Centriwinkel abhängigen Coefficienten bedeutet; daher ist

$$N = k E \varepsilon t \frac{e a}{h^2}.$$

Bei einem Bogenträger mit Kämpfergelenken ist der grösste Werth von $e = h$; die im Scheitel eintretende grösste Spannung ist daher

$$N_0 = k E \varepsilon t \frac{a}{h}.$$

Bei einem Bogenträger ohne Gelenk kann N im Scheitel oder an den Kämpfern zum Maximum werden. Bezeichnen wir den Abstand der Richtung des Horizontalschubes vom Scheitel C und von der Sehne AB mit e_0, e_1, so sind die betreffenden Spannungen

$$N_0 = k E \varepsilon t \frac{e_0 a}{h^2}, \quad N_1 = k E \varepsilon t \frac{e_1 a}{h^2}.$$

Die absolut grösste Spannung ist N_1, da $e_1 > e_0$ ist. In folgender Tabelle sind diese Werthe von N_0, N_1 (ohne Correction) zusammengestellt.

α	2 Gelenke	Kein Gelenk	
	N_0	N_0	N_1
0	1,875	3,750	7,500
10	1,867	3,735	7,459
20	1,843	3,690	7,334
30	1,802	3,591	7,083
40	1,747	3,467	6,769
50	1,677	3,316	6,378
60	1,593	3,121	5,899
90	1,273	2,499	4,223
Gr.	$. E \varepsilon t \frac{a}{h}$.		

Unter sonst gleichen Umständen verhalten sich also die Spannungen bei zwei Gelenken und bei keinem Gelenke bei flachen Bögen wie 1 : 4, beim Halbkreise wie 1 : 3,32.

Digitized by Google

Da die Werthe von k für verschiedene α fast gleich sind, so ist die Spannung fast nur von $\frac{a}{h}$ oder von dem Verhältnisse der Trägerhöhe zur Stichhöhe abhängig und diesem proportional.

Nimmt man als kleinsten Centriwinkel etwa 20^0, für welchen $h = 0{,}0882$ von der Spannweite ist und a zu $\frac{1}{40}$ der Spannweite an, so ist $\frac{a}{h} = 0{,}2883$. Für Schmiedeeisen und $t = 30^0$ wird $E \varepsilon t \frac{a}{h} = 24.30 . 0{,}2833 = 204$, also bei zwei Gelenken $N_0 = 383$, bei keinem Gelenke $N_1 = 1530$ Kilogr. pro □Cent. d. i. bei einem Festigkeitscoefficienten von 4000 bezüglich 0,090 und 0,382 des Festigkeitscoefficienten. Beim Gusseisen würde sich N nur bezüglich 0,023 und 0,090 und beim Holze sogar nur 0,012 und 0,049 des Festigkeitscoefficienten ergeben. Hiernach ist bei kleinen Centriwinkeln, besonders bei Bogenträgern ohne Gelenk, der Temperatureinfluss ziemlich bedeutend, namentlich beim Schmiedeeisen.

Bei constanter Spannweite, constanter Trägerhöhe, aber verschiedener Stichhöhe oder verschiedenem Centriwinkel ist das Verhältniss der grössten Spannung folgendes:

$\alpha =$	90^0	60,	50,	40,	30,	20,	10,	Grad:
	1	2,3	3,3	4,4	6,3	9,8	20,0.	

In gleicher Weise wie die Bogenträger mit zwei Gelenken und keinem Gelenke lassen sich auch die Bogenträger, welche nur ein Scheitelgelenk haben, behandeln, sowohl in Beziehung auf Belastung, als auf Temperaturänderung. Wir bemerken hier nur der Vollständigkeit wegen, dass diese Träger in Beziehung auf den Temperatureinfluss zwischen denen mit zwei Gelenken und keinem Gelenke liegen. Bei flachen Bogen verhalten sich bei 3, 2, 1 und keinem Gelenke die Horizontalschübe wie 0 : 3 : 8 : 18, die grössten Spannungen wie 0 : 3 : 8 : 12 und die Verrückungen des Scheitels nahe wie 10 : 7 : 12 : 9.

XL. Kapitel.

Ringförmige Körper.

§. 367. Ringförmige Körper im Allgemeinen. Um für jeden beliebigen Querschnitt die Ausdrücke für die äusseren Kräfte aufstellen zu können, denkt man sich den Ring in irgend einem Querschnitt durchschnitten und bringt nun, um das Gleichgewicht nicht zu stören, die als Unbekannte auftretenden Spannungen in diesem Querschnitte als äussere, auf die beiden so erhaltenen Endflächen wirkende Kräfte an.

Wir setzen den fast einzigen wichtigen Fall voraus, dass die Axe des Ringes, sowie die Belastung in Beziehung auf eine Axe, die Axe der y, symmetrisch sei. In dem einen in dieser Axe liegenden Querschnitte B denken wir uns den Ring durchschnitten und bezeichnen die in der Ebene des Schnittes oder in Richtung der Axe der y wirkende Kraft mit V, die senkrecht hierzu wirkende Kraft mit H, den Abstand des Mittelpunktes aller in dem Schnitte thätigen Spannungen von der Axe mit e_0 und das Moment $H e_0$ mit M_0. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Axe

Digitized by Google

seien x, y und der Winkel zwischen der Normalen zur Axe und der Axe der $y = \varphi$. Die Bogenlänge von B aus gerechnet, sei s.

Wir machen ferner die fast immer erfüllte Annahme, dass der Querschnitt constant sei. Unter dieser Annahme wird nach 23 und 25 (Seite 274), wenn man beachtet, dass in Folge der Symmetrie für $\varphi = 0$. $\Delta\varphi = 0$ wird,

322.
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta s = \dfrac{1}{E\,F}\displaystyle\int_0^s \left(P + \frac{M}{r}\right) ds \\ \Delta\varphi = \dfrac{1}{E\,W}\displaystyle\int_0^s M\,ds + \dfrac{1}{E\,F\,r^2}\int_0^s \left(\frac{P}{r} + \frac{M}{r^2}\right) ds. \end{array}\right.$$

Ferner wird nach 32 (Seite 276), wobei hier $-\Delta\varphi$ für $\Delta\varphi$ zu setzen ist, wenn man beachtet, dass für $\varphi = 0$ $\Delta x = 0$ werden muss und wenn man das y des Punktes $B = b$ und die Verrückung des Punktes B in Richtung der Axe der $y = \Delta_0 y$ setzt

323.
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta x = +\,y\,\Delta\varphi - \dfrac{1}{E\,W}\displaystyle\int_0^s M\,y\,ds - \dfrac{1}{E\,F}\int_0^s \left(\frac{P}{r} + \frac{M}{r^2}\right) y\,ds + \dfrac{1}{E\,F}\int_0^x \left(P + \frac{M}{r}\right) dx, \\ \Delta y - \Delta_0 y = -\,x\,\Delta\varphi + \dfrac{1}{E\,W}\displaystyle\int_0^s M\,x\,ds + \dfrac{1}{E\,F}\int_0^s \left(\frac{P}{r} + \frac{M}{r^2}\right) x\,ds + \dfrac{1}{E\,F}\int_0^y \left(P + \frac{M}{r}\right) dy \end{array}\right.$$

In dem dem Punkte B gegenüberliegenden Punkte B_1 oder für $\varphi = \pi$ muss wiederum $\Delta\varphi = 0$, $\Delta x = 0$ werden; die so gebildeten Gleichungen, sowie die Bedingung für das Gleichgewicht der auf die beiden Endflächen des aufgeschnittenen Ringes wirkenden Kräfte V und H mit den äusseren Kräften bestimmen die Unbekannten.

§. 368. Kettenringe im Allgemeinen. Bei den Kettenringen wirken in Richtung der Axe der y zwei entgegengesetzte Kräfte als Zug; derselbe sei $= G$. Der Ring ist ausser in Beziehung auf die Axe der y auch noch auf eine hierzu senkrechte Axe, die Axe der x, symmetrisch. Die Kraft V ist offenbar $= \frac{1}{2} G$, weil sich G zu gleichen Theilen auf die beiden Theile, in welche der Schnitt in B den Ring trennt, zerlegt, so dass also nur noch H und M_0 unbekannt sind. Demnach wird

324. $$P = H\cos\varphi + \tfrac{1}{2} G \sin\varphi, \quad M = M_0 + H\,(b - y) - \tfrac{1}{2} G\,x.$$

Zerschneiden wir den Ring in den Querschnitten B und B_1, so sind die in beiden Schnitten wirkenden, zur Axe der y parallelen Kräfte wegen der Symmetrie in Beziehung auf die Axe der x einander gleich. Ist nun ausser dem eigentlichen Ringe kein weiterer Theil vorhanden, so ist jeder der beiden Ringtheile nur im Gleichgewichte, wenn $H = 0$ ist. Ist aber ein Steg AA_1 (Fig. 116) eingeschaltet, dessen Axe mit der Axe der x zusammenfällt, so wird auf diesen Steg vom Ringe ein Druck ausgeübt, weil der Zug G eine Verkleinerung der in der Richtung des Steges fallenden Ringweite anstrebt. Umgekehrt übt der Steg auf den Ring einen Druck aus, welcher, wenn jeder Ringtheil im Gleichgewicht sein soll, $= 2\,H$ sein muss. Hier ist also H nicht mehr Null.

Digitized by Google

Im Punkte A muss $\Delta\varphi = 0$ werden. Nach der zweiten der Gleichungen 322 wird daher, wenn wir die Bogenlänge $BA = s_1$ setzen,

$$325.\quad 0 = \frac{1}{W}\int_0^{s_1} M\,ds + \frac{1}{F}\int_0^{s_1}\left(\frac{P}{r} + \frac{M}{r^2}\right) ds.$$

Bei einem Ringe ohne Steg giebt diese Gleichung die Unbekannte M_0. Bezeichnen wir die Halbaxen OA und OB mit a und b und ihre Veränderungen mit Δa, Δb, so ergiebt sich zunächst Δa, wenn wir in 323 für $s = s_1$, $\Delta x = \Delta a$, $\Delta\varphi = 0$, $x = a$ setzen, nämlich

$$326.\quad \Delta a = -\frac{1}{E\,W}\int_0^{s_1} M\,y\,ds - \frac{1}{E\,F}\int_0^{s_1}\left(\frac{P}{r} + \frac{M}{r^2}\right) y\,ds + \frac{1}{E\,F}\int_0^{a}\left(P + \frac{M}{r}\right) dx.$$

Bei einem Ringe mit Steg wird $\Delta a = 0$, wenn der Steg absolut steif ist. Genauer aber ist, wenn f den mittleren Querschnitt des Steges, E_1 seinen Elasticitätscoefficienten bedeutet, $\Delta a = \frac{2H}{E_1 f}a$, weil der Druck auf den Steg $= 2H$ ist. Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so bestimmen diese und die Gleichung 325 die Unbekannten H und M_0.

Die Veränderung Δb der Axe b ergiebt sich aus 323, wenn man $\Delta_0 y = \Delta b$ und für $s = s_1$: $\Delta\varphi = 0$, $\Delta y = 0$, $y = 0$ setzt; nämlich

$$327.\quad \Delta b = -\frac{1}{E\,W}\int_0^{s_1} M\,x\,ds - \frac{1}{E\,F}\int_0^{s_1}\left(\frac{P}{r} + \frac{M}{r^2}\right) x\,ds + \frac{1}{E\,F}\int_0^{b}\left(P + \frac{M}{r}\right) dy.$$

Wir wollen nun diese Regeln auf die wichtigsten Formen anwenden.

§. 369. Kreisförmiger Ring ohne Steg. (Fig. 116.) Hier ist $H = 0$, $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$, $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$, $dy = -r\sin\varphi\,d\varphi$, $ds = r\,d\varphi$, daher

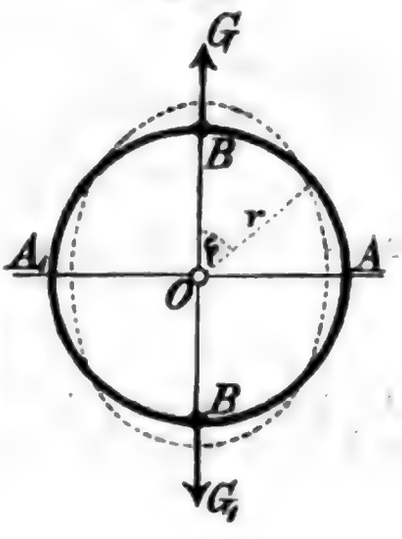
$$328.\quad P = \tfrac{1}{2}G\sin\varphi,\quad M = M_0 - \tfrac{1}{2}G\,r\sin\varphi,\quad P\,r + M = M_0.$$

Die Gleichung 325 giebt

$$0 = \frac{M_0\,r}{W}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi - \frac{G\,r^2}{2\,W}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi\,d\varphi - \frac{M_0}{F\,r}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi,\ \text{d. i.}$$

$$= \frac{M_0\,r\,\pi}{2\,W} - \frac{G\,r}{2\,W} + \frac{M_0\,\pi}{2\,F\,r}$$

Fig. 116.



mithin

$$329.\quad M_0 = \frac{G\,F\,r^2}{\pi\,(F\,r^2 + W)}.$$

Ohne Rücksicht auf F würde $M_0 = \frac{1}{\pi}G\,r = 0{,}3183\,G\,r$. Das Moment M_1 in A und A_1 ist $M_1 = M_0 - \frac{1}{2}G\,r$, d. i.

$$330.\quad M_1 = -\frac{G\,r\,[(\pi - 2)\,F\,r^2 + \pi\,W]}{2\,\pi\,(F\,r^2 + W)}.$$

Ohne Rücksicht auf F wird $M_1 = -\frac{\pi - 2}{2\,\pi}G\,r = -0{,}1817\,G\,r$. M_0 und M_1 sind die Maxima von M; M_0 ist also das absolute Maximum.

Digitized by Google

Die Spannung der gespanntesten Fasern wird nach 9 (Seite 271), wenn wir mit e den Abstand der äusseren Fasern von der Schweraxe des Querschnittes (einen symmetrischen Querschnitt vorausgesetzt) bezeichnen,

$$N = \frac{M_0}{F\,r} \pm \frac{M\,r\,e}{\mathfrak{W}\,(r \pm e)}.$$

Da nur das zweite Glied variabel ist, so wird N in demselben Querschnitte am grössten, in welchem M zum absoluten Maximum wird, also in B oder B_1. Die absolut grösste Spannung N_0 ist daher

$$331.\quad N_0 = \frac{G\,r^2(\mathfrak{W}\,r + \mathfrak{W}\,e + F\,r^2\,e)}{\pi\,(F\,r^2 + \mathfrak{W})\,\mathfrak{W}\,(r + e)}.$$

Beim kreisförmigen Querschnitte mit dem Durchmesser ∂ ist $e = \frac{1}{2}\partial$, $F = \frac{1}{4}\partial^2$ und $\mathfrak{W} = \frac{1}{64}\pi\,\partial^4\left(1 + \frac{\partial^2}{8\,r^2}\right)$. Dies eingesetzt giebt

$$332.\quad N_0 = \pm \frac{32\,G\,r}{\pi^2\partial^3} \frac{16 + \frac{\partial}{r}\left(1 \pm \frac{\partial}{2\,r}\right)\left(1 + \frac{\partial^2}{8\,r^2}\right)}{\left[16 + \frac{\partial^2}{r^2}\left(1 + \frac{\partial^2}{8\,r^2}\right)\right]\left(1 \pm \frac{\partial}{2\,r}\right)\left(1 + \frac{\partial^2}{8\,r^2}\right)}$$

$$= \pm \frac{32\,G\,r}{\pi^2\partial^3}\left[1 \mp \frac{3\,\partial}{8\,r} + \frac{\partial^2}{16\,r^2} \mp \frac{3\,\partial^3}{128\,r^3} + \ldots\right].$$

Bezeichnet man die grösste positive Spannung, welche in den äussern Fasern stattfindet, mit N_0', die grösste negative Spannung, welche in den innern Fasern stattfindet, mit N_0'', so ergiebt sich beispielsweise für

$r =$	1	2	3	5	10	$\cdot\,\partial,$
$+ N_0'\,\pi^2\partial^3 =$	0,676	0,825	0,902	0,927	0,963	$\cdot\,32\,G\,r,$
$- N_0''\,\pi^2\partial^3 =$	1,723	1,334	1,134	1,078	1,038	$\cdot\,32\,G\,r.$

Am grössten ist hiernach die negative Spannung, so dass die Festigkeitsbedingung für Schmiedeeisen $-N_0'' = \mathfrak{K}$ zu setzen ist. Ist das Verhältniss $\frac{\partial}{r}$ gegeben, so ergiebt sich, wenn man $1 + \frac{3\,\partial}{8\,r} + \frac{\partial^2}{16\,r^2} + \ldots = \mu$ setzt,

$$333.\quad \partial = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{32\,\mu\,G\,r}{\mathfrak{K}\,\partial}}.$$

$\frac{r}{\partial} =$	1	2	3	5	10	
$\partial =$	2,364	2,941	3,321	4,180	5,800	$\cdot\,\sqrt{\frac{G}{\mathfrak{K}}}.$

Ist dagegen r gegeben, so ergiebt sich, wenn man in dem zweiten der Ausdrücke 332 die Glieder bis zum dritten Grade berücksichtigt

$$334.\quad \left(\frac{\mathfrak{K}\,\pi^2}{32\,G\,r} - \frac{3}{128\,r^3}\right)\partial^3 - \frac{\partial^2}{16\,r^2} - \frac{3\,\partial}{8\,r} = 1.$$

Als ersten Näherungswerth kann man annehmen:

$$\partial = \sqrt[3]{\frac{32\,G\,r}{\pi^2\,\mathfrak{K}}} = 1{,}480\sqrt[3]{\frac{G}{\mathfrak{K}}}.$$

Als Veränderungen der beiden Axen ergeben sich nach 327 und 328, wobei sich die beiden Glieder mit $P\,r + M$ heben,

Digitized by Google

$$\Delta a = -\frac{M_0 r^2}{E W}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi \, d\varphi + \frac{G r^3}{2 E W}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi,$$

$$\Delta b = -\frac{M_0 r^2}{E W}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi \, d\varphi + \frac{G r}{2 E W}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi, \text{ d. i.}$$

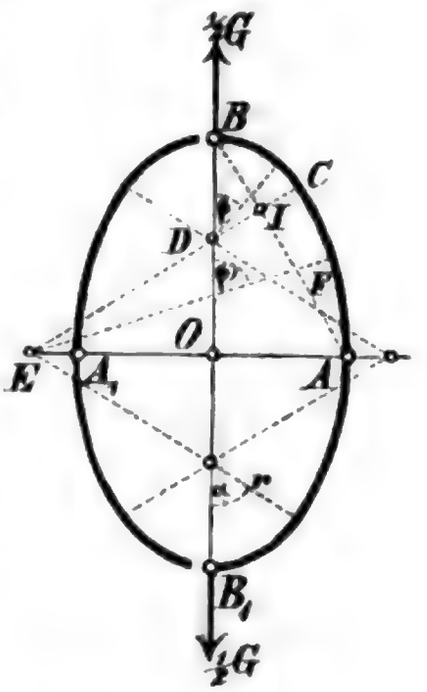
335.
$$\begin{cases} \Delta a = -\dfrac{r^2}{E W}\left(M_0 - \dfrac{1}{4} G r\right) = -\dfrac{G r^3}{E W}\dfrac{(4-\pi) F r^2 - \pi W}{4\pi (F r^2 + W)}, \\ \Delta b = +\dfrac{r^2}{E W}\left(\dfrac{\pi}{8} G r - M_0\right) = -\dfrac{G r^3}{E W}\dfrac{(\pi^2 - 8) F r^2 + \pi^2 W}{8\pi (F r^2 + W)}. \end{cases}$$

Für den kreisförmigen Querschnitt wird beispielsweise für

$r =$	1	2	3	5	∞	$\cdot \frac{G r^3}{E W}$
$\Delta a =$	$-0{,}0498$	$0{,}0634$	$0{,}0661$	$0{,}0675$	$0{,}0683$	
$\Delta b =$	$+0{,}0931$	$0{,}0793$	$0{,}0766$	$0{,}0752$	$0{,}0744$	

§. 370. Ovaler Ring. (Fig. 117.) Wir setzen die Axe als eine Korblinie aus vier Mittelpunkten voraus, und bezeichnen die Radien der Bogen BC und CA mit r, r_1 den Winkel BDC mit α. Den Querschnitt nehmen wir als Kreis mit dem Durchmesser ∂ an. Die Korblinie schliesst sich an eine Ellipse am besten an, wenn man bei gegebenen a und b die Radien r und r_1 so bestimmt, dass das Verhältniss $\frac{r}{r_1}$ ein Maximum wird. Hierdurch ergiebt sich

Fig. 117.



$$r = \frac{a^2 + b^2 - (b-a)\sqrt{a^2+b^2}}{2b},$$

$$r_1 = \frac{a^2 + b^2 + (b-a)\sqrt{a^2+b^2}}{2a},$$

woraus sich die bekannte Construction ableiten lässt, bei welcher $AF = b - a$, $FJ = BJ$, $JE \perp AB$ ist. Hierbei wird

$$\tan\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Damit kein Klemmen der einzelnen Ringe eintrete, muss $r > \partial$ sein. Setzt man den Ausdruck für r ein, so ergiebt sich als Bedingung

$$(a - 2\partial)(a^2 + b^2) + 2 b \partial^2 > 0.$$

Wir wollen das Verhältniss $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ wählen. Alsdann wird $\tan\alpha = 0{,}8321$, $\alpha = 39^\circ\ 45'\ 44''$ und $b^2 - 3 b \partial + 2{,}07692\,\partial^2 > 0$ oder $b > 1{,}916\,\partial$,

Digitized by Google

$a \geqq 1{,}284\,\partial$. Wir wählen $b = 2\,\partial$, $a = \frac{3}{4}\,\partial$. Alsdann wird

$$r = 1{,}0438\,\partial, \qquad r_1 = 2{,}7676\,\partial.$$

Wir bezeichnen innerhalb der Strecke BC Alles ohne, innerhalb der Strecke CA Alles mit Apostroph und setzen $OD = c$, $OE = c_1$, wobei $c = b - r$, $c_1 = r_1 - a$ ist. Alsdann wird $x = r\sin\varphi$, $y = c + r\cos\varphi$, $x' = r_1\sin\varphi - c_1$, $y' = r_1\cos\varphi$, $dx = r\cos\varphi\,d\varphi$, $dy = -r\sin\varphi\,d\varphi$, $dx' = r_1\cos\varphi\,d\varphi$, $dy' = -r_1\sin\varphi\,d\varphi$, $ds = r\,d\varphi$, $ds' = r_1\,d\varphi$. Sonach wird:

336.
$$\begin{cases} P = H\cos\varphi + \frac{1}{2}G\sin\varphi, & M = M_0 + H\,r\,(1-\cos\varphi) - \frac{1}{2}G\,r\sin\varphi, \\ P' = H\cos\varphi + \frac{1}{2}G\sin\varphi, & M' = M_0 + H\,(b - r_1\cos\varphi) - \frac{1}{2}G\,(r_1\sin\varphi - c_1), \\ P\,r + M = M_0 + H\,r, & P'r + M' = M_0 + H\,b + \frac{1}{2}G\,c_1. \end{cases}$$

Die Gleichungen 326—328 geben nun, wenn man die Integrale in zwei Integrale zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ zerlegt und die Integration ausführt:

337.
$$\begin{cases} 0 = \frac{M_0}{W}\left[\frac{1}{2}r_1\pi - (r_1 - r)\,\alpha\right] + \frac{H}{W}\left[\frac{1}{2}b\,r_1\pi + (b\,r_1 - r^2)\,\alpha - r_1^2 + (r_1^2 - r^2)\sin\alpha\right] \\ \quad - \frac{G}{EW}\left[r^2 + (r_1^2 - r^2)\cos\alpha - c_1 r_1\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right)\right] \\ \quad + \frac{M_0}{F}\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{\pi}{2r_1} - \frac{\alpha}{r_1}\right) + \frac{H}{F}\left[\alpha + \frac{6(\pi - 2\alpha)}{2r}\right] + \frac{G\,c_1(\pi - 2\alpha)}{4\,r_1}. \\ \Delta a \quad - \frac{M_0}{EW}\left[c\,r\,\alpha + r_1^2 - (r_1^2 - r^2)\sin\alpha\right] \\ \quad - \frac{H}{EW}\left[r^2(c\,\alpha + r\sin\alpha) - \frac{1}{2}r^3(\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\right. \\ \qquad\qquad \left. + b\,r_1^2(1 - \sin\alpha) - \frac{1}{4}r_1^2(\pi - 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha)\right] \\ \quad + \frac{G}{2EW}\left[c\,r^2(1 - \cos\alpha) + \frac{1}{2}r^3\sin\alpha + \frac{1}{2}r_1^2\cos^2\alpha - c_1 r_1^2(1 - \sin\alpha)\right] - \frac{M_0 + H\,r}{EFr}c\,\alpha, \\ \Delta b = - \frac{M_0}{EW}\left[r^2 + (r_1^2 - r^2)\cos\alpha - \frac{1}{2}c_1 r_1(\pi - 2\alpha)\right] \\ \quad - \frac{H}{EW}\left[r^3(1 - \cos\alpha) - \frac{1}{2}r^3\sin^2\alpha + b\,r_1^2\cos\alpha\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{1}{2}r_1^3\cos^2\alpha - \frac{1}{2}b\,c_1 r_1(\pi - 2\alpha) + c_1 r_1^2(1 - \sin\alpha)\right] \\ \quad + \frac{G}{2EW}\left[\frac{1}{2}r^3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) - 2\,c_1 r_1^2\cos\alpha\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{4}r_1^3(\pi - 2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha) + \frac{1}{2}c_1^2 r_1(\pi - 2\alpha)\right] \end{cases}$$

Setzt man a, b, c, c_1, r, r_1, nach dem Obigen als Vielfache von ∂, sowie α ein und ausserdem $\frac{W}{F} = \frac{\partial^2}{16}$, so ergiebt sich

338.
$$\begin{cases} 0 = M_0 + 0{,}6958\,H\,\partial - 0{,}4095\,G\,\partial, \\ EW\,\Delta a = -4{,}1898\,M_0\,\partial^2 - 2{,}2565\,H\,\partial^3 + 1{,}3887\,G\,\partial^3, \\ EW\,\Delta b = -2{,}6491\,M_0\,\partial^2 - 2{,}5209\,H\,\partial^3 + 1{,}3684\,G\,\partial^3. \end{cases}$$

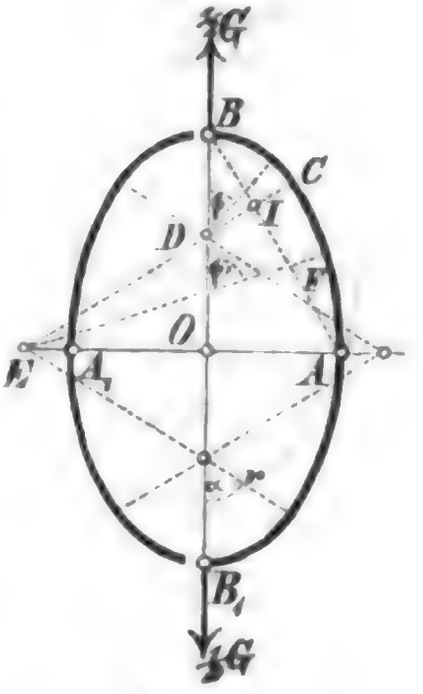
Für das Weitere ist zu unterscheiden, ob der Ring einen Steg hat oder nicht.

Digitized by Google

§. 371. Ovaler Kettenring ohne Steg. (Fig. 118.) Hier ist $H = 0$, daher wird nach der ersten der Gleichungen 338:

339. $$M_0 = 0{,}4095\, G\, \partial.$$

Fig. 118.



Wählen wir für die Punkte B und A bezüglich die Indices 0 und 1, so wird nach 336:

$$P_0 = 0, \quad M_0 = +0{,}4095\, G\, \partial,$$
$$P_0\, r + M_0 = +0{,}4095\, G\, \partial;$$
$$P_1 = +0{,}5\, G, \quad M_1 = -0{,}2572\, G\, \partial,$$
$$P_1\, r_1 + M_1 = +1{,}1267\, G\, \partial.$$

Die grösste Spannung findet im Querschnitte B statt. Dieselbe ist nach 9 (Seite 271):

$$N_0 = \frac{M_0}{F\, r} \pm \frac{M_0\, r\, e}{\mathfrak{W}\,(r \pm e)}.$$

Setzen wir $M_0 = 0{,}4095\, G\, \partial$, $F = \frac{\pi}{4}\partial^2$, $\mathfrak{W} = \frac{\pi}{64}\partial^4\left(1 + \frac{\partial^2}{8\,r^2} + \frac{5\,\partial^4}{256\,r^4} + \ldots\right) = 1{,}136\,\frac{\pi}{64}\partial^4$, $r = 1{,}0438\,\partial$, $e = \frac{1}{3}\partial$, so ergiebt sich als grösster Zug N_0' und als grösster Druck N_0'':

$$N_0' = +2{,}976\,\frac{G}{\partial^2}, \quad N_0'' = -8{,}115\,\frac{G}{\partial^2}.$$

Die Festigkeitsbedingung ist demnach beim Schmiedeeisen $-N_0'' = \mathfrak{K}$, d. i. $\mathfrak{K}\,\partial^2 = 8{,}115\,G$ oder

340. $$\begin{cases} G = 0{,}1232\,\mathfrak{K}\,\partial^2, \\ \partial = 2{,}849\,\sqrt{\frac{G}{\mathfrak{K}}}. \end{cases}$$

Als Veränderung der beiden Axen ergiebt sich nach 338, wenn wir für M_0 seinen Werth einsetzen:

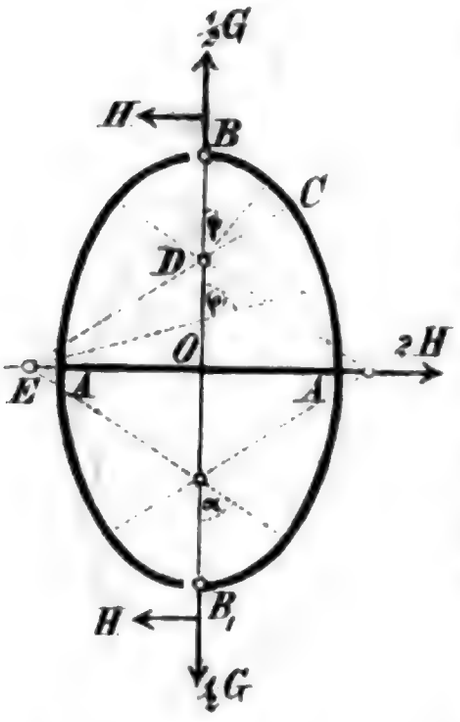
341. $$\begin{cases} \Delta a = -0{,}3270\,\frac{G\,\partial^3}{E\,W} = -6{,}616\,\frac{G}{E\,\partial}, \\ \Delta b = +0{,}2836\,\frac{G\,\partial^3}{E\,W} = +5{,}738\,\frac{G}{E\,\partial}. \end{cases}$$

Die Bruchbelastung ergiebt sich in Wirklichkeit allerdings grösser, als sie sich nach 340 ergeben würde, wenn man für $\mathfrak{K}$ den Bruchfestigkeitscoefficienten setzt, weil sich die kleine Axe, und mit ihr M_0 durch die Streckung merklich vermindert und sich der Ring in der Nähe der Punkte A, A_1 auf die durch ihn hindurch gehenden Ringe so auflegt, dass daselbst eine weitere Vergrösserung der Krümmung unmöglich wird.

§. 372. Ovaler Kettenring mit Quersteg. (Fig. 119.) Wir setzen beispielsweise den Quersteg von Gusseisen und den mittleren Querschnitt zu $0{,}52\,\partial^2$ voraus. Für Gusseisen ist $E_1 = 1010000$, für Schmiede-

Digitized by Google

Fig. 119.



eisen $E = 2040000$, also $E_1 = \frac{1}{2} E$, folglich $\Delta a = -\frac{2 H a}{\frac{1}{2} E \, 0{,}52 \, \partial^2} = 10{,}257 \frac{H}{E \partial}$, und wenn man $W = \frac{\pi}{64} \partial^2$ setzt,

342. $E W \Delta a = -0{,}5070 H \partial^3$.

Setzt man dies in die zweite der Gleichungen 338 ein, so ergiebt sich aus dieser Gleichung und der ersten der Gleichungen 338

343. $H = +0{,}2806 G$, $M_0 = +0{,}2142 G \partial$.

M wird zum analytischen Maximum für $\tan\varphi = \frac{G}{2H} = 1{,}7819$, $\varphi = 60^0 44' 56''$.

Bezeichnen wir das analytische Maximum von M mit M_2, während M_0, M_1 die Bedeutung, wie im vorigen §. haben, so wird

$$M_0 = +0{,}2142 G \partial,$$
$$M_2 = -0{,}0943 G \partial,$$
$$M_1 = +0{,}1087 G \partial.$$

Da der absolute Werth von M_0 bedeutend grösser ist, als der von M_1 und M_2, so wird auch die Spannung in B zum Maximum und zwar ist N_0 nach 9 (Seite 271):

$$N_0 = \frac{M_0 + H r}{F r} \pm \frac{M_0 r e}{\mathfrak{W}(r \pm e)}.$$

Die Einsetzung der betreffenden Werthe giebt

$$N_0' = +1{,}914 G \partial^2, \quad N_0'' = -3{,}887 G \partial^2.$$

Auch hier ist für Schmiedeeisen die Festigkeitsbedingung $-N_0' = \mathfrak{K}$. d. i. $\mathfrak{K} \partial^2 = 3{,}887 G$ oder

344. $$\begin{cases} G = 0{,}2573 \mathfrak{K} \partial^2, \\ \partial = 1{,}972 \sqrt{\frac{G}{\mathfrak{K}}}. \end{cases}$$

Bei gleichen Dimensionen ist demnach die Tragkraft des Kettenringes mit Steg 2,088mal so gross, als die des Kettenringes ohne Steg.

Als Veränderungen der Axen ergeben sich nach 342 und nach der dritten der Gleichungen 338:

345. $$\begin{cases} \Delta a = -0{,}1423 \frac{G \partial^3}{E W} = -2{,}878 \frac{G}{E \partial}, \\ \Delta b = +0{,}0936 \frac{G \partial^3}{E W} = +1{,}894 \frac{G}{E \partial}. \end{cases}$$

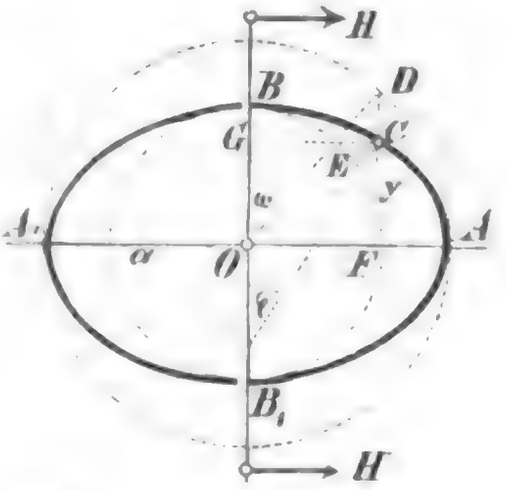
Auch hier ergiebt sich die Bruchbelastung in Wirklichkeit grösser, als nach 344, weil der Ring durch das Strecken sich mehr der Form eines Rhombus nähert, wodurch M_0 vermindert wird und weil auch hier der Vergrösserung der Krümmung in B durch die hindurch gesteckten Ringe und in A durch den Steg eine Grenze gesetzt wird.

Digitized by Google

§. 373. Elliptischer Ring mit constanter Normalbelastung.

(Fig. 120.) Auf einen elliptischen Ring wirke normal auf die Axe eine gleichmässig vertheilte Last q pro Längeneinheit der Axe; also etwa eine elliptische Röhre, auf welche von aussen oder innen Wasser- oder Dampfdruck wirkt. Die grosse (horizontale) Halbaxe sei = a, die kleine Halbaxe = b. Wir schlagen aus dem Mittelpunkte O mit OA = a und OB = b Kreise, ziehen einen Radius, welcher die Kreise in D und E schneidet, und ziehen sodann durch D und E Parallelen DF und CG zu den Axen, welche sich in C schneiden, so ist bekanntlich C ein Punkt der Ellipse. Bezeichnen wir den Winkel DOB mit ω, so wird

Fig. 120.



$$x = a \sin\omega, \quad y = b \cos\omega.$$

$$dx = a \cos\omega \, d\omega, \quad dy = -b \sin\omega \, d\omega,$$

$$ds = d\omega \sqrt{a^2 \cos^2\omega + b^2 \sin^2\omega}.$$

Bezeichnen wir die numerische Excentricität $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ mit ε, so wird

$$ds = a \, d\omega \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2\omega} = a \, d\omega \left[1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2\omega - \tfrac{1}{8} \varepsilon^4 \sin^4\omega + \ldots\right].$$

Ist wie früher φ der Winkel zwischen der Normalen CJ und der Axe der y, so ist $\tan\varphi = -\frac{dy}{dx}$, d. i.

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \tan\omega.$$

Wir denken uns nun den Ring wiederum in B und B_1 durchschnitten und bezeichnen den zwischen beiden Ringtheilen in jedem Querschnitte senkrecht zu demselben wirkenden Druck mit H, den Abstand desselben von den Axen der Querschnitte mit e_0 und das Moment $H e_0$ für die Querschnitte B, B_1 mit M_0. Alsdann kann jeder Ringtheil nur im Gleichgewichte sein, wenn 2 H gleich der Summe aller Horizontalcomponenten der auf den Bogen BAB_1 wirkenden äusseren Drücke, d. i. = q . 2 b ist, demnach ist

$$346. \quad H = q\,b.$$

Die Summe der Horizontal- und Verticalcomponenten der zwischen A und C wirkenden äusseren Drücke ist $q \cdot BG = q(b - y)$ und $q \cdot CG = q\,x$. Demnach ist die Axial- und Transversalkraft in C: $P = -H\cos\varphi + q(b - y)\cos\varphi - q\,x\sin\varphi$, $Q = -H\sin\varphi + q(b - y)\sin\varphi + q\,x\cos\varphi$, oder, wenn wir $H = q\,b$ und für x, y obige Ausdrücke setzen,

$$347. \quad \begin{cases} P = -q\,b(1 - \cos\varphi) - q\,a\sin\varphi\sin\omega - q\,b\cos\varphi\cos\omega, \\ Q = +q\,a\cos\varphi\sin\omega - q\,b\sin\varphi\cos\omega. \end{cases}$$

Als Moment für den Punkt C ergiebt sich $M = -H(e_0 + b - y) + q(b - y) \cdot \frac{1}{2}(b - y) + q\,x \cdot \frac{1}{2}\,x = M_0 - q\,b(b - y) + \frac{1}{2} q (b - y)^2 + \frac{1}{2} q\,x^2 = M_0 - \frac{1}{2} q (b^2 - y^2) + \frac{1}{2} q\,x^2$, oder

Digitized by Google

348. $M = M_0 + \frac{1}{2} q (a^2 - b^2) \sin^2\omega = M_0 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 q a^2 \sin^2\omega.$

Die Dicke des Ringes wollen wir als sehr klein voraussetzen, so dass wir für die Formänderung die Näherungsformeln, welche Glieder mit F nicht enthalten, anwenden können. Nach 322 wird zunächst, da in A, A_1: $\Delta\varphi = 0$ werden muss

$$0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[M_0 + \frac{1}{2} q \varepsilon^2 a^2 \sin^2\omega\right]\left[1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2\omega - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \sin^4\omega + \ldots\right] d\omega.$$

Nun aber ist, wenn n eine gerade Zahl bedeutet,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n} \frac{\pi}{2}.$$

Führt man hiernach die Integration in der vorigen Formel aus und reducirt auf M_0, so ergiebt sich

$$349. \quad M_0 = -\frac{1}{2} q \varepsilon^2 a^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2.4}\varepsilon^4 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2.4}\varepsilon^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 - \ldots}$$

$$= -\frac{1}{4} q \varepsilon^2 a^2 \left(1 + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \frac{37}{1024}\varepsilon^6 - \ldots\right).$$

Bei kleiner Excentricität ist demnach nahezu

$$350. \quad \begin{cases} M_0 = -\frac{1}{4} q \varepsilon^2 a^2 = -\frac{1}{4} q (a^2 - b^2), \\ M = -\frac{1}{4} q (a^2 - b^2)(1 - 2\sin^2\omega) = -q (a^2 - b^2)\cos 2\omega. \end{cases}$$

Für $2\omega = 90^0$ also $\omega = 45^0$ wird $M = 0$. Zum Maximum wird M für $\omega = 0$ oder $\omega = 90^0$. Bezeichnen wir den Werth von M für $\omega = 90^0$ mit M_1, so wird

$$-M_0 = M_1 = \tfrac{1}{4} q \varepsilon^2 a^2 = \tfrac{1}{4} q (a^2 - b^2),$$

so dass also beide Momente dem absoluten Werthe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind. Für $\varphi = 0$ wird $P = -q b$, $r = \frac{a^2}{b}$, für $\varphi = 90^0$ aber $P = -q a$, $r = \frac{b^2}{a}$, wobei r den Krümmungsradius bezeichnet. Die grössten Spannungen in B und A, welche wir mit N_0, N_1 bezeichnen, werden daher nach 9 (Seite 271), wenn wir einen rechteckigen Querschnitt von der Breite c und der Höhe ∂ annehmen, also $F = c\partial$, $W = \frac{1}{12} c \partial^3$, $v = \pm\frac{1}{2}\partial$ setzen,

$$351. \quad \begin{cases} N_0 = -\frac{q b}{4 c \partial}\left[\frac{5 a^2 - b^2}{a^2} \pm \frac{6 (a^2 - b^2)}{b \partial}\right], \\ N_1 = -\frac{q a}{4 c \partial}\left[\frac{5 b^2 - a^2}{b^2} \mp \frac{6 (a^2 - b^2)}{a \partial}\right]. \end{cases}$$

Bei einigermaassen grosser Excentricität und kleiner Dicke ist das erste Glied gegen das zweite klein. Setzen wir für eine sehr kleine Excen-

Digitized by Google

tricität $\frac{1}{2}(a+b)=r$, $a=r+\delta$, $b=r-\delta$, so wird $a^2-b^2=4r\delta$ und daher sehr nahe

$$352.\quad N_0=-\frac{qr}{c\,\partial}\left(1\pm 6\frac{\delta}{\partial}\right),\quad N_1=-\frac{qr}{c\,\partial}\left(1\mp 6\frac{\delta}{\partial}\right),$$

so dass also durch die Excentricität die Spannung im Verhältniss von $\partial:\partial+6\delta$ vergrössert wird. Ist z. B. $\delta=\partial$, so wird die Spannung 7mal so gross, als bei vollständig kreisförmiger Form. Hieraus ist ersichtlich, dass schon eine kleine Excentricität die Spannung bedeutend vermehren kann.

Sind Δa, Δb die Aenderungen der beiden Halbaxen, so ergiebt sich nach 326 (Seite 371) Δa, wenn wir $s=s_1$ $\Delta\varphi=0$, $\Delta x=\Delta a$, und Δb, wenn wir $s=s_1$, $\Delta\varphi=0$, $\Delta y=0$, $\Delta_0 y=\Delta b$ setzen, wobei s_1 den Bogen AB bezeichnet, also

$$\Delta a=-\frac{1}{EW}\int_0^{s_1} M\,y\,ds,\quad \Delta b=-\frac{1}{EW}\int_0^{s_1} M\,x\,ds.$$

Wir setzen hierein $x=a\sin\omega$, $y=b\cos\omega$ und annähernd für eine kleine Excentricität $M=-\frac{1}{4}q(a^2-b^2)(1-2\sin^2\omega)$, $ds=r\,d\omega$. Alsdann wird

$$EW\Delta a=\frac{1}{4}qbr(a^2-b^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-2\sin^2\omega)\cos\omega\,d\omega$$

$$EW\Delta b=\frac{1}{4}qar(a^2-b^2)\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-2\sin^2\omega)\sin\omega\,d\omega$$

d. i.

$$353.\quad\begin{cases} EW\Delta a=+\frac{1}{12}qbr(a^2-b^2), \\ EW\Delta b=-\frac{1}{12}qar(a^2-b^2). \end{cases}$$

Setzen wir auch hier $\frac{1}{2}(a+b)=r$, $a=r+\delta$, $b=r-\delta$, so wird sehr nahe

$$354.\quad \Delta a=-\Delta b=\frac{qr^3\delta}{3EW}=\frac{4qr^3\delta}{Ec\,\partial^3}.$$

Digitized by Google

Anhang.

I. Integralformeln. Die in der Theorie der gekrümmten Stäbe sehr häufig vorkommenden Integralformeln sind in Folgendem zusammengestellt

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x,$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x, \qquad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x,$$

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x,$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x\,(2+\sin^2 x), \qquad \int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\sin x\,(2+\cos^2 x),$$

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x, \qquad \int \sin x\cos^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x,$$

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x, \qquad \int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x,$$

$$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{1}{2}x\sin x\cos x,$$

$$\int x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{1}{2}x\sin x\cos x.$$

$$\int x\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{8}(\sin 2x - 2x\cos 2x) = \frac{1}{4}(2x\sin^2 x - x + \sin x\cos x).$$

II. Reihen. Die in der Theorie der gekrümmten Stäbe ebenfalls häufig nöthigen Formeln zur Verwandlung goniometrischer Funktionen in unendliche Potenzenreihen sind im Folgenden (allerdings ohne Angabe des Bildungsgesetzes der Coefficienten) zusammengestellt.

$$\sin x = x\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \frac{1}{362880}x^8 - \frac{1}{39916800}x^{10} + .\,-\ldots\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 - \frac{1}{3628800}x^{10} + .\,-\ldots$$

$$\sin^2 x = x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 - \frac{1}{315}x^6 + \frac{2}{14175}x^8 - \frac{2}{467775}x^{10} + .\,-\ldots\right)$$

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{45}x^6 + \frac{1}{315}x^8 - \frac{2}{14175}x^{10} + .\,-\ldots$$

$$\sin x\cos x = x\left(1 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 - \frac{4}{315}x^6 + \frac{2}{2835}x^8 - \frac{4}{155925}x^{10} + .\,-\ldots\right)$$

$$\sin^3 x = x^3\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{120}x^4 - \frac{41}{3024}x^6 + \frac{671}{604800}x^8 - \frac{511}{7983360}x^{10} + .\,-\ldots\right)$$

$$\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 + \frac{547}{13440}x^8 - \frac{703}{172800}x^{10} + .\,-\ldots$$

$$\tan x = x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \frac{17}{315}x^6 + \frac{62}{2835}x^8 + \frac{1382}{155925}x^{10} + .\,-\ldots\right)$$

Digitized by Google

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3}\left(1 + \frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{315}x^4 + \frac{1}{1575}x^6 + \frac{2}{31185}x^8 + . - \ldots\right),$$

$$\sin x \sin y = x\,y\left[1 - \frac{1}{6}(x^2 + y^2) + \frac{1}{360}(3\,x^4 + 10\,x^2y^2 + 3\,y^4)\right.$$
$$- \frac{1}{5040}(x^6 + 7\,x^4y^2 + 7\,x^2y^4 + y^6)$$
$$\left. + \frac{1}{1814400}(5\,x^8 + 60\,x^6y^2 + 126\,x^4y^4 + 60\,x^2y^6 + 5\,y^8) - . + \ldots\right],$$

$$\cos x \cos y = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{24}(x^4 + 6\,x^2y^2 + y^4)$$
$$- \frac{1}{720}(x^6 + 15\,x^4y^2 + 15\,x^2y^4 + y^6)$$
$$+ \frac{1}{40320}(x^8 + 28\,x^6y^2 + 70\,x^4y^4 + 28\,x^2y^6 + y^8) - . + \ldots.$$

$$\sin x \cos y = x\left[1 - \frac{1}{6}(x^2 + 3\,y^2) + \frac{1}{120}(x^4 + 10\,x^2y^2 + 5\,y^4)\right.$$
$$- \frac{1}{5040}(x^6 + 21\,x^4y^2 + 35\,x^2y^4 + 7\,y^6)$$
$$\left. + \frac{1}{362880}(x^8 + 36\,x^6y^2 + 126\,x^4y^4 + 84\,x^2y^6 + 9\,y^8) - . + \ldots\right].$$

III. Berechnung bestimmter Integrale. Die Berechnung des Integrals $\int_{x_0}^{x_n} y\,dx$ kommt überein mit der Berechnung einer Fläche, bei welcher der Abscisse x die Ordinate y entspricht. In dem Falle, dass sich die Abhängigkeit zwischen y und x nicht in ein bestimmtes Gesetz oder nur in ein sehr complicirtes Gesetz bringen lässt, was in der Elasticitätstheorie häufig vorkommt, sind die folgenden Methoden zur Integration anzuwenden. Die Ordinaten in den gleichen Abständen e mögen $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$, die zwischen den einzelnen Ordinaten liegenden Flächen $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$, und die gesammte Fläche zwischen der ersten und letzten Ordinate F sein.

1. Nimmt man y in Beziehung auf x vom zweiten Grade an, so wird nach der Sympson'schen Regel:

$$f_1 = \frac{e}{12}(5\,y_0 + 8\,y_1 - y_2).$$

$$f_2 = \frac{e}{12}(5\,y_1 + 8\,y_2 + y_3) \text{ oder } \frac{e}{12}(5\,y_2 + 8\,y_1 - y_0) \text{ u. s. w.}$$

$$F = \frac{1}{3}\left[(y_0 + y_n) + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots)\right].$$

2. Nimmt man y in Beziehung auf x vom dritten Grade an, so wird

$$f_1 = \frac{e}{24}(9\,y_0 + 19\,y_1 - 5\,y_2 + y_3).$$

$$f_2 = \frac{e}{24}(-\,y_0 + 13\,y_1 + 13\,y_2 - y_3) \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

Bei 3 Theilen: $F = \frac{3e}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$,

Bei 4 Theilen: $F = \frac{e}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$,

Bei 5 Theilen: $F = \frac{e}{24}(8y_0 + 31y_1 + 21y_2 + 21y_3 + 31y_4 + 8y_5)$,

Bei 6 Theilen: $F = \frac{e}{24}(8y_0 + 31y_1 + 20y_2 + 26y_3 + 20y_4 + 31y_5 + 8y_6)$,

Bei 6 u. mehr Theilen: $F = \frac{e}{24}\left[8(y_0 + y_n) + 31(y_1 - y_{n-1}) + 20(y_2 + y_{n-2}) + 25(y_3 + y_{n-3}) + 24(y_4 + y_5 + \ldots)\right]$.

3. Nimmt man y in Beziehung auf x vom vierten Grade an, so wird

$$f_1 = \frac{e}{720}(251y_0 + 646y_1 - 264y_2 + 106y_3 - 19y_4),$$

$$f_2 = \frac{e}{720}(-19y_0 + 346y_1 + 456y_2 - 74y_3 + 11y_4) \text{ u. s. w.}$$

$$F = \frac{2}{45}e(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).$$

4. Nimmt man endlich y in Beziehung auf x vom fünften Grade an, so ergiebt sich

$$f_1 = \frac{e}{1440}(+475y_0 + 1427y_1 - 798y_2 + 482y_3 - 173y_4 + 27y_5)$$

$$f_2 = \frac{e}{1440}(-27y_0 + 637y_1 + 1022y_2 - 258y_3 + 77y_4 - 11y_5)$$

$$f_3 = \frac{e}{1440}(+11y_0 - 93y_1 + 802y_2 + 802y_3 - 93y_4 + 11y_5)$$

$$F = \frac{5}{288}e(19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5).$$

Die Formeln für die ganze Fläche unter 2, 3 und 4 wurden zuerst von Schaffer aufgestellt.

IV. Goniometrische Tabellen. Die Berechnung der in der Theorie der Bogenträger vorkommenden Ausdrücke wird sehr umständlich, wenn man die vorkommenden goniometrischen Funktionen, wie $\sin^2\alpha$, $\alpha\cos^2\alpha$ u. s. w. in jedem speciellen Falle besonders berechnen muss. Die folgenden Tabellen werden diese Rechnungen bedeutend erleichtern. Dieselben enthalten allerdings nur die Funktionen für ganze Grade; jedoch wird man bei Bogenträgern immer leicht eine solche Anordnung treffen können, dass man es nur mit ganzen Graden zu thun hat. Bei kleinen Winkeln, in einigen Fällen schon bei 25^0, in andern erst bei 20^0 bis 10^0 genügen indess die 7stelligen Zahlen der Tabelle nicht mehr. In solchen Fällen wird man den Ausdruck am besten in eine Reihe verwandeln und die numerische Berechnung nach dieser vornehmen.

Es sei bemerkt, dass beim ersten Studium folgende Theile ohne Nachtheil für das Weitere übergangen werden können:

II. Kapitel §. 21 bis 24. — III. Kap. §. 29, 31, 32. — IV. Kap. — V. Kap. §. 55, 56. — X. Kap. §. 87 bis 91. — XI. Kap. §. 108, 109. — XX. Kap. §. 195. — XXVIII. Kap. und XXIX. Kap.

Digitized by Google

x	arc x		log arc x		(arc x)²		
0	0	1,5707963	$-\infty$	0,1961199	0	2,4674012	90
1	0,0174533	1,5533430	0,2418776—2	0,1912673	0,0003046	2,4128739	89
2	0,0349066	1,5358897	0,5429075—2	0,1863600	0,0012185	2,3589571	88
3	0,0523599	1,5184364	0,7189988—2	0,1813966	0,0027416	2,3056489	87
4	0,0698132	1,5009832	0,8439375—2	0,1763759	0,0048739	2,2529513	86
5	0,0872665	1,4835299	0,9408476—2	0,1712964	0,0076154	2,2008619	85
6	0,1047198	1,4660766	0,0200276—1	0,1661567	0,0109662	2,1493812	84
7	0,1221730	1,4486233	0,0869752—1	0,1609555	0,0149263	2,0985097	83
8	0,1396263	1,4311700	0,1449700—1	0,1556912	0,0194953	2,0482472	82
9	0,1570796	1,4137167	0,1961198—1	0,1503624	0,0246740	1,9985949	81
10	0,1745329	1,3962634	0,2418773—1	0,1449673	0,0304617	1,9495511	80
11	0,1919862	1,3788101	0,2832700—1	0,1395044	0,0368588	1,9011167	79
12	0,2094395	1,3613568	0,3210585—1	0,1339719	0,0438649	1,8532919	78
13	0,2268928	1,3439035	0,3558207—1	0,1283681	0,0514803	1,8060780	77
14	0,2443461	1,3264502	0,3880054—1	0,1226910	0,0597050	1,7594705	76
15	0,2617994	1,3089969	0,4179687—1	0,1169386	0,0685389	1,7134727	75
16	0,2792527	1,2915436	0,4459974—1	0,1111091	0,0779821	1,6680851	74
17	0,2967060	1,2740904	0,4723263—1	0,1052002	0,0880344	1,6233060	73
18	0,3141593	1,2566371	0,4971499—1	0,0992099	0,0986961	1,5791371	72
19	0,3316126	1,2391838	0,5206310—1	0,0931357	0,1099669	1,5355763	71
20	0,3490659	1,2217305	0,5429074—1	0,0869754	0,1218476	1,4925254	70
21	0,3665191	1,2042772	0,5640966—1	0,0807265	0,1343361	1,4502840	69
22	0,3839724	1,1868239	0,5843000—1	0,0743865	0,1474348	1,4085523	68
23	0,4014257	1,1693706	0,6036052—1	0,0679521	0,1611426	1,3674271	67
24	0,4188790	1,1519173	0,6220886—1	0,0614213	0,1754597	1,3269135	66
25	0,4363323	1,1344640	0,6398174—1	0,0547914	0,1903859	1,2870124	65
26	0,4537856	1,1170107	0,6568506—1	0,0480574	0,2059213	1,2477132	64
27	0,4712389	1,0995574	0,6732401—1	0,0411170	0,2220651	1,2084648	63
28	0,4886922	1,0821041	0,6890355—1	0,0342690	0,2388202	1,1709491	62
29	0,5061455	1,0646508	0,7042754—1	0,0272072	0,2561833	1,1334815	61
30	0,5235988	1,0471976	0,7189986—1	0,0200286	0,2741556	1,0966227	60
31	0,5410521	1,0297443	0,7332391—1	0,0127294	0,2927374	1,0603734	59
32	0,5585054	1,0122910	0,7470274—1	0,0053062	0,3119283	1,0247370	58
33	0,5759587	0,9948377	0,7603913—1	0,9977522—1	0,3317284	0,9897018	57
34	0,5934119	0,9773844	0,7733563—1	0,9900654—1	0,3521378	0,9552802	56
35	0,6108652	0,9599311	0,7859454—1	0,9822402—1	0,3731563	0,9214683	55
36	0,6283185	0,9424778	0,7981798—1	0,9742711—1	0,3947841	0,8882643	54
37	0,6457718	0,9250245	0,8100791—1	0,9661532—1	0,4170212	0,8556702	53
38	0,6632251	0,9075712	0,8216610—1	0,9578807—1	0,4398677	0,8236855	52
39	0,6806784	0,8901179	0,8329420—1	0,9494476—1	0,4633232	0,7923102	51
40	0,6981317	0,8726646	0,8439373—1	0,9408474—1	0,4873877	0,7615437	50
41	0,7155850	0,8552113	0,8546613—1	0,9320735—1	0,5120620	0,7313866	49
42	0,7330383	0,8377580	0,8651267—1	0,9231186—1	0,5373452	0,7018386	48
43	0,7504916	0,8203047	0,8753458—1	0,9139752—1	0,5632376	0,6728998	47
44	0,7679449	0,8028515	0,8853300—1	0,9046352—1	0,5897392	0,6445704	46
45	0,7853982	0,7853982	0,8950899—1	0,8950899—1	0,6168503	0,6168503	45
		arc x		log arc x		(arc x)²	

Digitized by Google

x	sin x	cos x	1 − cos x		log(1 − cos x)		
0	0	1	0	0	−∞	0	90
1	0,0174524	0,9998475	0,0001525	0,9825476	0,1827138−4	0,9923536−1	89
2	0,0348995	0,9993910	0,0006090	0,9651005	0,7847406−4	0,9845725−1	88
3	0,0523359	0,9986293	0,0013707	0,9476641	0,1368680−3	0,9766544−1	87
4	0,0697565	0,9975640	0,0024360	0,9302435	0,3866684−3	0,9685966−1	86
5	0,0871547	0,9961947	0,0038053	0,9128453	0,5793892−3	0,9603972−1	85
6	0,1045287	0,9945218	0,0054782	0,8954713	0,7386304−3	0,9520516−1	84
7	0,1218694	0,9925462	0,0074538	0,8781306	0,8723806−3	0,9435591−1	83
8	0,1391731	0,9902682	0,0097318	0,8608269	0,9881990−3	0,9349158−1	82
9	0,1564345	0,9876882	0,0123118	0,8435655	0,0903166−2	0,9261188−1	81
10	0,1736482	0,9848079	0,0151921	0,8263518	0,1816220−2	0,9171650−1	80
11	0,1908090	0,9816273	0,0183727	0,8091910	0,2641758−2	0,9080510−1	79
12	0,2079117	0,9781476	0,0218524	0,7920883	0,3394992−2	0,8987736−1	78
13	0,2249510	0,9743700	0,0256300	0,7750490	0,4087476−2	0,8893291−1	77
14	0,2419219	0,9702957	0,0297043	0,7580781	0,4728190−2	0,8797139−1	76
15	0,2588190	0,9659258	0,0340742	0,7411810	0,5324254−2	0,8699243−1	75
16	0,2756374	0,9612614	0,0387386	0,7243626	0,5881406−2	0,8599560−1	74
17	0,2923717	0,9563046	0,0436954	0,7076283	0,6404342−2	0,8498052−1	73
18	0,3091070	0,9510565	0,0489435	0,6908930	0,6896948−2	0,8394108−1	72
19	0,3255681	0,9455187	0,0544813	0,6744319	0,7362484−2	0,8289381−1	71
20	0,3420202	0,9396926	0,0603074	0,6579798	0,7803704−2	0,8182126−1	70
21	0,3583680	0,9335804	0,0664196	0,6416310	0,8222960−2	0,8072854−1	69
22	0,3746066	0,9271839	0,0728161	0,6253934	0,8622276−2	0,7961533−1	68
23	0,3907311	0,9205049	0,0794951	0,6092689	0,9003406−2	0,7848090−1	67
24	0,4067366	0,9135455	0,0864545	0,5932634	0,9367878−2	0,7732476−1	66
25	0,4226183	0,9063077	0,0936923	0,5773817	0,9717036−2	0,7614630−1	65
26	0,4383712	0,8987941	0,1012059	0,5616288	0,0052060−1	0,7494494−1	64
27	0,4539905	0,8910065	0,1089935	0,5460095	0,0374006−1	0,7372002−1	63
28	0,4694717	0,8829476	0,1170524	0,5305283	0,0683804−1	0,7247085−1	62
29	0,4848096	0,8746198	0,1253802	0,5151904	0,0982292−1	0,7119677−1	61
30	0,5000000	0,8660254	0,1339746	0,5000000	0,1270224−1	0,6989700−1	60
31	0,5150380	0,8571673	0,1428327	0,4849620	0,1548276−1	0,6857076−1	59
32	0,5299192	0,8480480	0,1519520	0,4700808	0,1817062−1	0,6721725−1	58
33	0,5446391	0,8386706	0,1613294	0,4553609	0,2077136−1	0,6583558−1	57
34	0,5591929	0,8290375	0,1709625	0,4408071	0,2329006−1	0,6442486−1	56
35	0,5735764	0,8191521	0,1808479	0,4264236	0,2573136−1	0,6298413−1	55
36	0,5877853	0,8090169	0,1909831	0,4122147	0,2809948−1	0,6151235−1	54
37	0,6018150	0,7986355	0,2013645	0,3981850	0,3039828−1	0,6000849−1	53
38	0,6156615	0,7880108	0,2119892	0,3843385	0,3263138−1	0,5847139−1	52
39	0,6293204	0,7771459	0,2228541	0,3706796	0,3480206−1	0,5689987−1	51
40	0,6427876	0,7660446	0,2339554	0,3572124	0,3691334−1	0,5529265−1	50
41	0,6560589	0,7547096	0,2452904	0,3439411	0,3896806−1	0,5364840−1	49
42	0,6691306	0,7431449	0,2568551	0,3308694	0,4096894−1	0,5196566−1	48
43	0,6819983	0,7313537	0,2686463	0,3180017	0,4291808−1	0,5024294−1	47
44	0,6946584	0,7193398	0,2806602	0,3053416	0,4481808−1	0,4847860−1	46
45	0,7071068	0,7071068	0,2928932	0,2928932	0,4667094−1	0,4667094−1	45
	cos x	sin x		1 − cos x		log(1 − cos x)	

Digitized by Google

x	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\sin x \cos x$	$\sin^3 x$	$\cos^3 x$	
0	0	1	0	0	1	90
1	0,0003046	0,9996953	0,0174498	0,0000053	0,9995428	89
2	0,0012180	0,9987822	0,0348782	0,0000425	0,9981739	88
3	0,0027391	0,9972609	0,0522644	0,0001437	0,9958942	87
4	0,0048660	0,9951340	0,0695866	0,0003394	0,9927100	86
5	0,0075961	0,9924037	0,0868241	0,0006620	0,9886273	85
6	0,0109262	0,9890738	0,1039539	0,0011421	0,9836552	84
7	0,0148521	0,9851477	0,1209609	0,0018100	0,9778047	83
8	0,0193692	0,9806310	0,1378187	0,0026957	0,9710876	82
9	0,0244717	0,9755283	0,1545085	0,0038282	0,9635178	81
10	0,0301537	0,9698463	0,1710101	0,0052361	0,9551124	80
11	0,0364080	0,9635920	0,1873033	0,0069470	0,9458883	79
12	0,0432273	0,9567727	0,2033683	0,0089875	0,9358650	78
13	0,0506030	0,9493969	0,2191856	0,0113832	0,9250638	77
14	0,0585262	0,9414737	0,2347358	0,0141588	0,9135079	76
15	0,0669873	0,9330127	0,2500000	0,0173376	0,9012213	75
16	0,0759760	0,9240239	0,2649596	0,0209418	0,8882288	74
17	0,0854812	0,9145187	0,2795964	0,0249923	0,8745788	73
18	0,0954915	0,9045085	0,2938927	0,0295085	0,8602386	72
19	0,1059947	0,8940055	0,3078308	0,0345085	0,8452989	71
20	0,1169778	0,8830222	0,3213938	0,0400088	0,8297694	70
21	0,1284274	0,8715726	0,3345653	0,0465573	0,8136828	69
22	0,1403301	0,8596700	0,3473292	0,0525686	0,7970722	68
23	0,1526708	0,8473292	0,3596699	0,0596532	0,7799707	67
24	0,1654347	0,8345653	0,3715724	0,0672884	0,7624135	66
25	0,1786062	0,8213938	0,3830222	0,0754823	0,7444355	65
26	0,1921693	0,8078308	0,3940055	0,0842415	0,7260735	64
27	0,2061079	0,7938921	0,4045084	0,0935708	0,7073636	63
28	0,2204036	0,7795964	0,4145188	0,1034732	0,6883427	62
29	0,2350403	0,7649599	0,4240241	0,1139498	0,6690480	61
30	0,2500000	0,7500000	0,4330127	0,1250000	0,6495189	60
31	0,2652642	0,7347358	0,4417483	0,1366211	0,6297915	59
32	0,2808144	0,7191857	0,4493971	0,1488090	0,6099040	58
33	0,2966310	0,7033684	0,4567727	0,1615573	0,5898943	57
34	0,3126968	0,6873033	0,4653920	0,1748579	0,5698003	56
35	0,3289899	0,6710101	0,4698463	0,1887009	0,5496592	55
36	0,3454915	0,6545085	0,4755282	0,2030748	0,5295083	54
37	0,3621813	0,6378187	0,4806307	0,2179661	0,5093846	53
38	0,3790391	0,6209609	0,4851478	0,2333598	0,4893237	52
39	0,3960442	0,6039558	0,4890738	0,2492387	0,4693619	51
40	0,4131759	0,5868241	0,4924039	0,2655844	0,4495335	50
41	0,4304134	0,5695866	0,4951341	0,2823766	0,4298726	49
42	0,4477358	0,5522642	0,4972610	0,2995937	0,4104124	48
43	0,4651217	0,5348782	0,4987821	0,3172122	0,3911853	47
44	0,4825503	0,5174497	0,4996955	0,3352075	0,3722223	46
45	0,5000000	0,5000000	0,5000000	0,3535534	0,3535534	45
	$\cos^2 x$	$\sin^2 x$	$\sin x \cos x$	$\cos^3 x$	$\sin^3 x$	x

Digitized by Google

x	x sin x		x cos x		$\frac{\sin x}{x}$		
0	0	1,5707963	0	0	1	0,6366197	90
1	0,0003046	1,5531061	0,0174506	0,0271096	0,9999486	0,6436748	89
2	0,0012182	1,5349541	0,0348853	0,0536018	0,9997967	0,6506919	88
3	0,0027404	1,5163554	0,0522881	0,0794688	0,9995428	0,6576697	87
4	0,0048699	1,4973273	0,0696431	0,1047033	0,9991875	0,6646070	86
5	0,0076058	1,4778850	0,0869344	0,1292982	0,9987307	0,6715028	85
6	0,0109462	1,4580453	0,1041458	0,1532468	0,9981757	0,6783559	84
7	0,0148892	1,4378255	0,1212623	0,1765428	0,9975147	0,6851651	83
8	0,0194324	1,4172388	0,1382684	0,1991804	0,9967479	0,6919290	82
9	0,0245727	1,3963116	0,1551457	0,2211540	0,9958928	0,6986465	81
10	0,0303073	1,3750509	0,1718814	0,2424585	0,9949309	0,7053168	80
11	0,0366327	1,3534774	0,1884589	0,2630893	0,9938682	0,7119380	79
12	0,0435449	1,3316077	0,2048627	0,2830419	0,9927055	0,7185100	78
13	0,0510398	1,3094594	0,2210775	0,3023125	0,9914420	0,7250297	77
14	0,0591126	1,2870480	0,2370880	0,3208974	0,9900789	0,7314980	76
15	0,0677587	1,2643939	0,2528788	0,3387933	0,9886157	0,7379131	75
16	0,0769725	1,2415131	0,2684355	0,3559977	0,9870534	0,7442735	74
17	0,0867484	1,2184185	0,2837413	0,3725079	0,9853918	0,7505785	73
18	0,0970806	1,1951320	0,2987832	0,3883223	0,9833316	0,7568267	72
19	0,1079625	1,1716702	0,3135459	0,4034387	0,9817725	0,7630174	71
20	0,1193876	1,1480497	0,3280146	0,4178564	0,9798155	0,7691489	70
21	0,1313487	1,1242896	0,3421750	0,4315745	0,9777607	0,7752204	69
22	0,1438386	1,1004046	0,3560130	0,4445923	0,9756082	0,7812309	68
23	0,1568495	1,0764112	0,3695144	0,4569094	0,9733584	0,7871798	67
24	0,1703731	1,0523289	0,3826650	0,4685270	0,9710122	0,7930653	66
25	0,1844020	1,0281752	0,3954514	0,4794460	0,9685698	0,7989851	65
26	0,1989265	1,0039628	0,4078597	0,4896654	0,9660318	0,8046422	64
27	0,2139380	0,9797109	0,4198760	0,4990726	0,9634002	0,8105204	63
28	0,2294272	0,9554411	0,4314897	0,5080171	0,9606691	0,8159544	62
29	0,2453842	0,9311647	0,4426849	0,5161530	0,9578462	0,8215086	61
30	0,2617994	0,9068996	0,4534498	0,5235988	0,9549298	0,8269933	60
31	0,2786605	0,8826632	0,4637722	0,5303574	0,9519194	0,8324079	59
32	0,2959628	0,8584731	0,4736395	0,5364335	0,9488167	0,8377498	58
33	0,3136896	0,8343410	0,4830396	0,5418275	0,9456220	0,8432167	57
34	0,3318318	0,8102883	0,4919608	0,5465465	0,9424352	0,8482206	56
35	0,3503779	0,7863297	0,5003915	0,5505941	0,9389574	0,8533443	55
36	0,3693163	0,7624804	0,5083202	0,5539746	0,9354896	0,8583937	54
37	0,3886352	0,7387573	0,5157363	0,5566936	0,9319313	0,8633671	53
38	0,4083222	0,7151757	0,5226286	0,5587567	0,9282843	0,8682632	52
39	0,4283649	0,6917516	0,5289864	0,5601695	0,9245487	0,8730820	51
40	0,4487501	0,6685000	0,5347999	0,5609380	0,9207255	0,8778223	50
41	0,4694661	0,6454363	0,5400590	0,5610692	0,9168148	0,8824831	49
42	0,4904986	0,6225756	0,5447538	0,5605695	0,9128181	0,8870639	48
43	0,5118340	0,5999330	0,5488748	0,5594464	0,9087354	0,8915636	47
44	0,5334592	0,5775230	0,5524133	0,5577075	0,9045682	0,8959812	46
45	0,5553604	0,5553604	0,5553604	0,5553604	0,9003163	0,9003163	45
		x sin x		x cos x		$\frac{\sin x}{x}$	x

Digitized by Google

x	x sin²x		x cos²x	x sin x cos x			
0	0	1,5707963	0	0	0	0	90
1	0,0000053	1,5528336	0,0174480	0,0004731	0,0003046	0,0271055	89
2	0,0000425	1,5340191	0,0348641	0,0018707	0,0012175	0,0535691	88
3	0,0001434	1,5142774	0,0522165	0,0041591	0,0027366	0,0793599	87
4	0,0003397	1,4936797	0,0694735	0,0073037	0,0048580	0,1044483	86
5	0,0006629	1,4722610	0,0866036	0,0112691	0,0075768	0,1288061	85
6	0,0011445	1,4500577	0,1035753	0,0160187	0,0108862	0,1524072	84
7	0,0018145	1,4271082	0,1203585	0,0215152	0,0147782	0,1752269	83
8	0,0027036	1,4034495	0,1369227	0,0277206	0,0192432	0,1967883	82
9	0,0038440	1,3759486	0,1532356	0,0345961	0,0242696	0,2184312	81
10	0,0052628	1,3541611	0,1692701	0,0421025	0,0298469	0,2387751	80
11	0,0069898	1,3286104	0,1849964	0,0501998	0,0359597	0,2582557	79
12	0,0090536	1,3025090	0,2003859	0,0588477	0,0426032	0,2768568	78
13	0,0114814	1,2758979	0,2154113	0,0669182	0,0497316	0,2898545	77
14	0,0143007	1,2545824	0,2300454	0,0776321	0,0573578	0,3113654	76
15	0,0175372	1,2213107	0,2442622	0,0876861	0,0654498	0,3272492	75
16	0,0212165	1,1934174	0,2580362	0,0981263	0,0739907	0,3422069	74
17	0,0253628	1,1651794	0,2713432	0,1089108	0,0829579	0,3562311	73
18	0,0299996	1,1366392	0,2841597	0,1199979	0,0923291	0,3684670	72
19	0,0351491	1,1078370	0,2964635	0,1313468	0,1020806	0,3814589	71
20	0,0408330	1,0788151	0,3082329	0,1429154	0,1121876	0,3926566	70
21	0,0470712	1,0496147	0,3194479	0,1546625	0,1225963	0,4029094	69
22	0,0538829	1,0202775	0,3300896	0,1665472	0,1333648	0,4122188	68
23	0,0612860	0,9908418	0,3401397	0,1785287	0,1443808	0,4205874	67
24	0,0692976	0,9613504	0,3495819	0,1905671	0,1556439	0,4280207	66
25	0,0779317	0,9318432	0,3584015	0,2026227	0,1671250	0,4345256	65
26	0,0872036	0,9023558	0,3665819	0,2146552	0,1787939	0,4401084	64
27	0,0971256	0,8727278	0,3741122	0,2265743	0,1906197	0,4446770	63
28	0,1077095	0,8436043	0,3809827	0,2384996	0,2025721	0,4485524	62
29	0,1189646	0,8144150	0,3871810	0,2502359	0,2146179	0,4514376	61
30	0,1308998	0,7853982	0,3926990	0,2617994	0,2267254	0,4534498	60
31	0,1435218	0,7565900	0,3975304	0,2731543	0,2388603	0,4546051	59
32	0,1568363	0,7280265	0,4016691	0,2842664	0,2509907	0,4549215	58
33	0,1708476	0,6997373	0,4051110	0,2951004	0,2630822	0,4544147	57
34	0,1855580	0,6717595	0,4078540	0,3056249	0,2751010	0,4531075	56
35	0,2009685	0,6441236	0,4098967	0,3165358	0,2870128	0,4510202	55
36	0,2170789	0,6168597	0,4112396	0,3256181	0,2987832	0,4481748	54
37	0,2338865	0,5899977	0,4118853	0,3350265	0,3103779	0,4445962	53
38	0,2513883	0,5635661	0,4118369	0,3440050	0,3217622	0,4403062	52
39	0,2695787	0,5375920	0,4110997	0,3525260	0,3329020	0,4353334	51
40	0,2884511	0,5121006	0,4096806	0,3605640	0,3437628	0,4297035	50
41	0,3079975	0,4871170	0,4075877	0,3680945	0,3543106	0,4234443	49
42	0,3282075	0,4626638	0,4048309	0,3750942	0,3645114	0,4165892	48
43	0,3490699	0,4387632	0,4014216	0,3815415	0,3747317	0,4091532	47
44	0,3705725	0,4154354	0,3973728	0,3874163	0,3837385	0,4011812	46
45	0,3926991	0,3926991	0,3926991	0,3926991	0,3926991	0,3926991	45
		x sin²x		x cos²x		x sin x cos x	x

Digitized by Google

Berichtigungen.

Seite 5, Fig. 2: P_1, P_2 statt P, P_z.
„ 6, Zeile 11 v. unten: N_1, T_2, T_3 statt N_1, T_2, N_2 und f statt f_1.
„ 9, Formel 16: T_2 statt T_4; Zeile 20 v. oben: Nach 4 (§. 10) statt Nach 4 (§. 5); Zeile 1 v. unten ist noch $+ 2\,T_1\,T_2\,T_3$ hinzuzufügen.
„ 12, Zeile 1 v. oben: $\sin 2\beta$ statt $\sin 2\alpha$; Zeile 16 u. 21 v. oben: 28 statt 26. Zeile 19 v. unten: $-N_1 T_1^2 - N_2 T_2$ statt $-N_1 T^2 - N_2 T^2$.
„ 17, Zeile 9 v. oben: 48 statt 44.
„ 19, Zeile 6 v. oben: schniger statt sehmiger.
„ 20, Formel 52: m E statt E.
„ 24, 32, 35, 51 und 61: Faser statt Fasser.
„ 31, Zeile 15 v. unten: $\frac{K}{E}$ statt $\frac{E}{K}$.
„ 32, Zeile 4 v. oben ist hinzuzufügen: Formel 49 (§. 27); Zeile 12 v. oben $\max(\tau)$ statt $\max g$.
„ 36, Zeile 2 v. oben: Gleitungsfestigkeit statt Schubfestigkeit.
„ 42, Formel 27 unter der Wurzel $\frac{A^2}{K^2}$ statt $\frac{A^2}{K}$.
„ 43, Zeile 21 v. unten und Seite 54, Zeile 3 v. oben: ν und ω statt u und v.
„ 49, Zeile 4 v. unten: $d\nu\ d\omega$ statt $du\ dv$.
„ 51, Zeile 2 v. oben: N statt M und Gleich. 9: $\int d\,f$ statt $\int f\,d\,f$.
„ 55, Zeile 1 v. unten: $\frac{y\,dy}{n^2}$ statt $\frac{y\,dx}{m^2}$.
„ 56, Zeile 2 v. oben: zweimal $\tan\alpha$ statt $\tan\varphi$.
„ 65. Zu den Gleichungen Zeile 12 v. unten kommt nach 58 (Seite 22), da $T_1 = 0$ ist, noch hinzu: $\frac{\partial\,\nu}{\partial\,w} + \frac{\partial\,\omega}{\partial\,v} = 0$ Nach Einsetzung des Ausdruckes für N giebt die Integration statt der Gleichungen 52:

$$52.\quad \nu = -\frac{M(v^2 - w^2)}{2\,m\,E\,W}, \qquad \omega = -\frac{M\,v\,w}{m\,E\,W}.$$

„ 66, Formel 53: $\frac{v^2 - w^2}{2\,m}$ statt $\frac{v^2}{m}$; Formel 54: 12 statt 6; Zeile 15 von unten δ statt b.
„ 67, Fig. 23. Statt des rechten Q soll Q′ stehen.
„ 77, Zeile 10 v. unten: 12650 statt 16500.
„ 98, Zeile 14 v. unten: Taf. VI. statt Taf. V.
„ 106, Zeile 7 v. oben: $l(\tau_1 + 2\tau_2)$ statt $l(\tau_1 + 2\tau_3)$; Zeile 7 von unten: $M_1 = -\frac{2\,E\,W}{l^2}\left[l(\ldots$ statt $M_1 = -\frac{2\,E\,W}{l^3}\left[l(\ldots$
„ 119, Formel 141: $M_{m-1}\,l_m + 2\,M_m\,(l_m + \ldots$ statt $M_m\,l_m + 2\,M_m\,(l_m + \ldots$
„ 142, Zeile 5 v. unten: 0,2047 statt 0,2697.
„ 183, Fig. 56: G statt C_1.
„ 191, Zeile 4 und 5 v. unten: ν^2 statt $2\,\nu^2$; Zeile 2 v. unten: 3,6 statt 3,2.
„ 192, Zeile 2 v. oben: $\frac{21}{16}$ statt $\frac{11}{8}$; Zeile 5 v. oben: $\frac{21}{32}$ statt $\frac{11}{16}$.
„ 205, Zeile 2 v. unten: 6 statt b.
„ 206, Formel 102: $13\,a\,(x_1 - x_2) + 6$ etc. statt $19\,a\,(x_1 - x_2) - 6$ etc.
„ 271, Formel 10. Rechts fehlt der Factor r.
„ 274. Zu Formel 25 ist zu bemerken, dass der zweite Ausdruck für $\Delta\varphi$ nur bei constantem r gilt.
„ 284, Zeile 1 v. oben: R statt $\mathfrak{R}$.
„ 317, Formel 160: H statt H_0; Zeile 14 v. oben: $\frac{15}{2\,\alpha^4}$ statt $\frac{15}{2\,\alpha^2}$.
„ 318, Zeile 10 v. oben: α^4 statt α^2.
„ 319, Zeile 14 v. oben: $\frac{25}{64}$ statt $\frac{175}{448}$.
„ 320, Zeile 8 v. unten: Rechts fehlt der Factor $g\,r^2$.
„ 322, Formel 184: $\Delta y = -\int x\,\mathfrak{R}\,d\,s + \ldots$ statt $\Delta y = -\int y\,\mathfrak{R}\,d\,s + \ldots$
„ 325, Zeile 8 v. unten: eben statt oben.
„ 332, Zeile 5 u. 7 v. oben fehlt rechts: $= o$.

Digitized by Google

Spannungen im Allgemeinen.

Fig. 1.

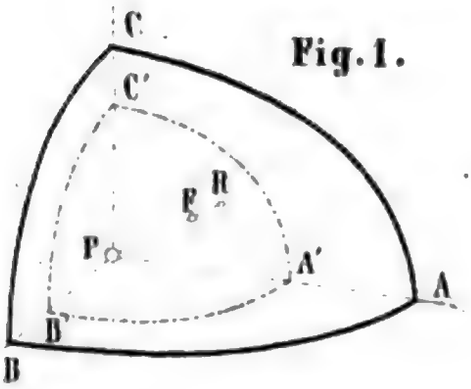


Fig. 2.

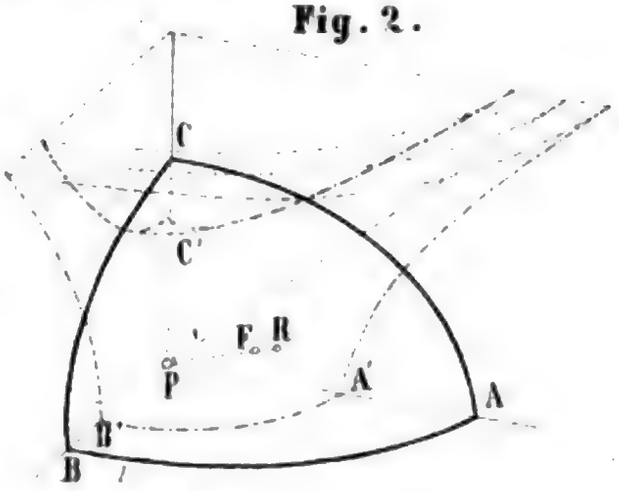


Fig 3.

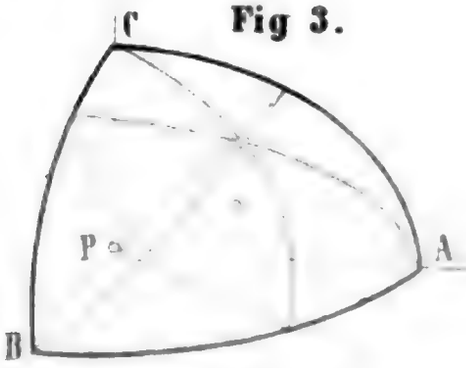


Fig. 7.

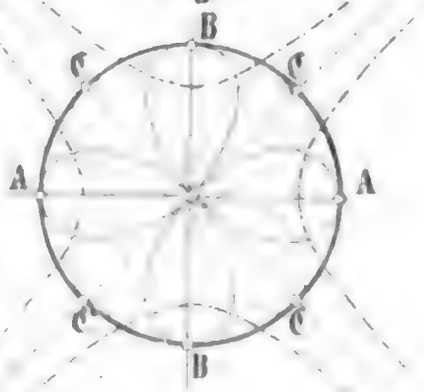


Fig. 4.

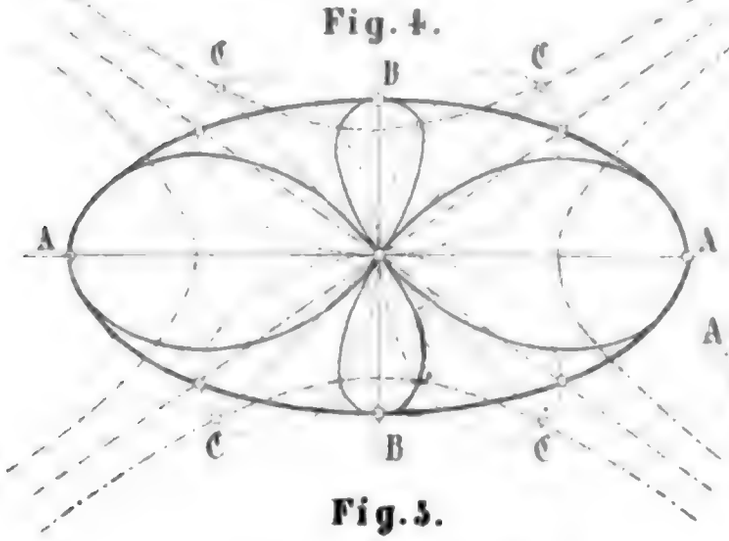


Fig. 6.

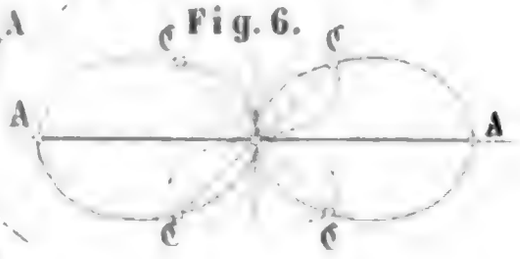


Fig. 5.

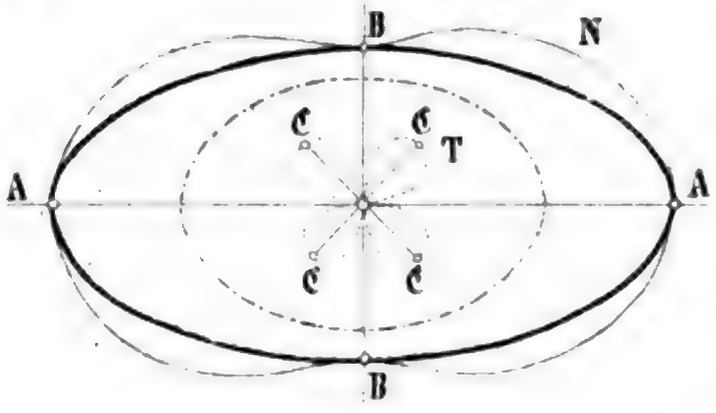
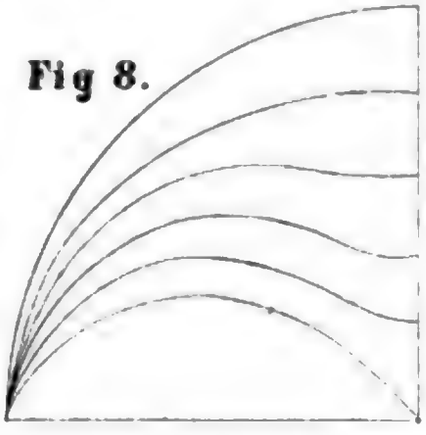


Fig 8.



Spannungsellipsoid, Normalspannung N,
Schubspannung T, Stellungsfläche.

Digitized by Google

Transversalkräfte und Momente gerader Stäbe.

Fig. 1.

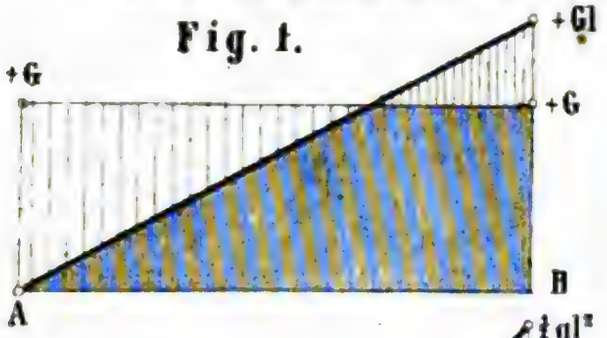


Fig. 2.

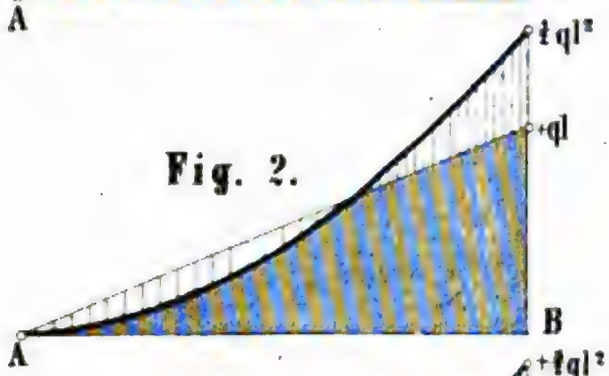


Fig. 3.

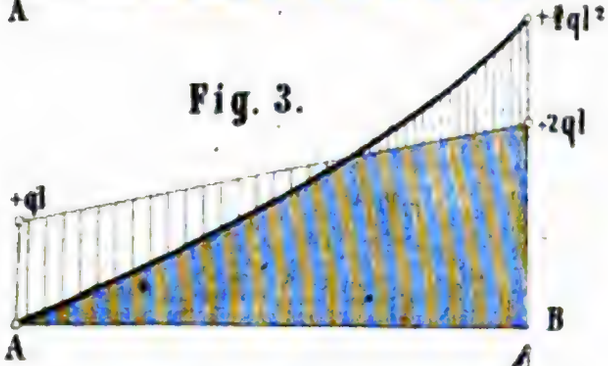


Fig. 9.

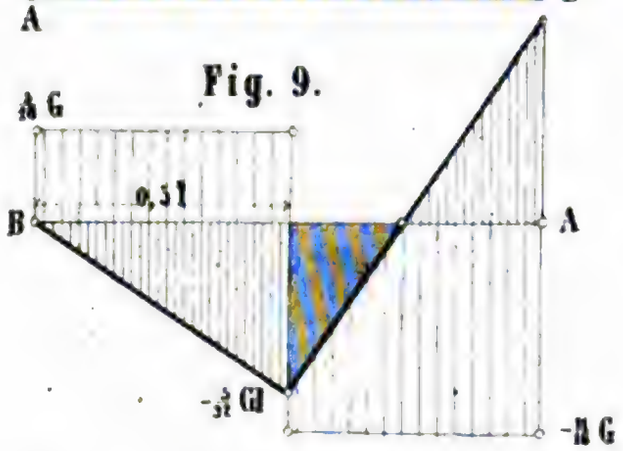


Fig. 10.

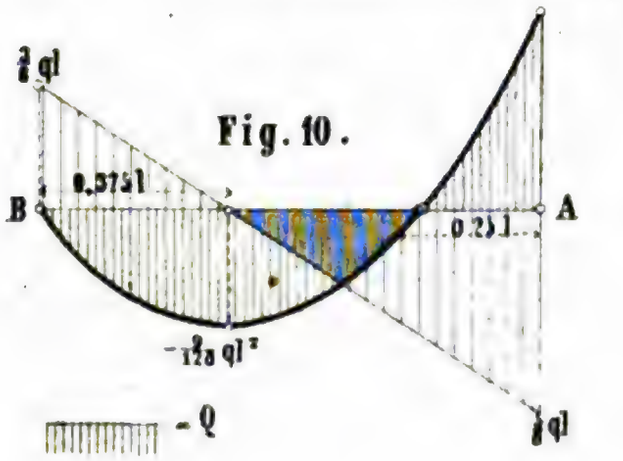


Fig. 4.

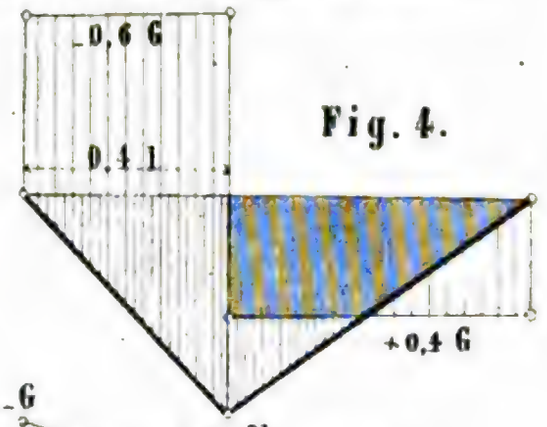


Fig. 5.

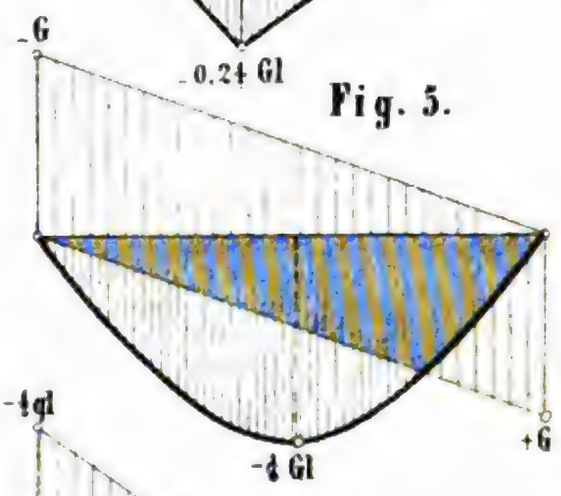


Fig. 7.

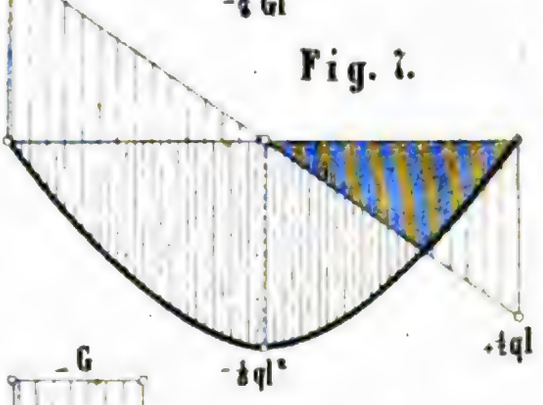


Fig. 6.

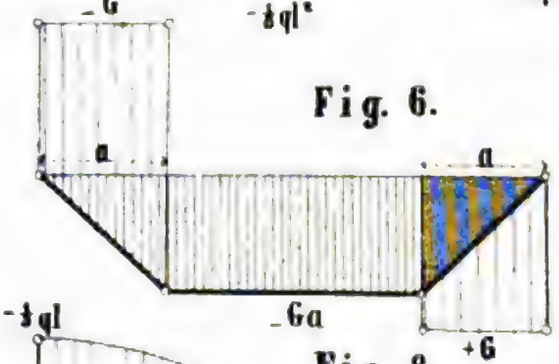
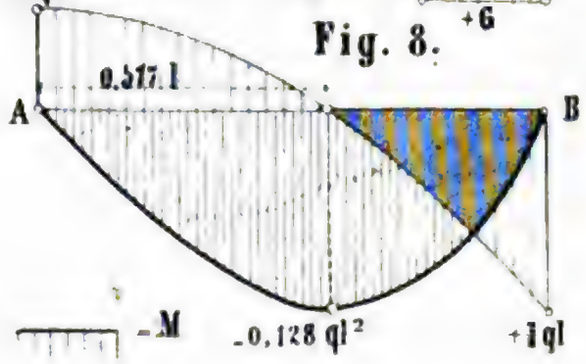


Fig. 8.



Digitized by Google

Taf. III.

Körper von constanter Festigkeit.

Fig. 1.

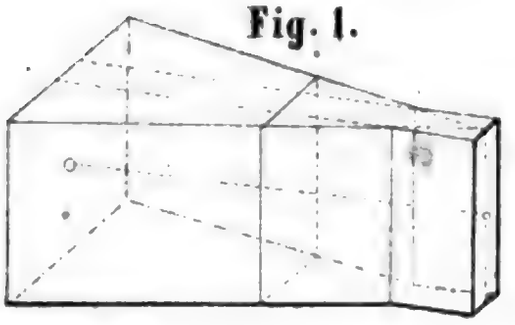


Fig. 4.

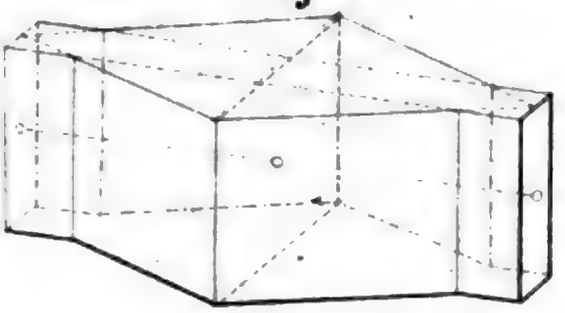


Fig. 2.

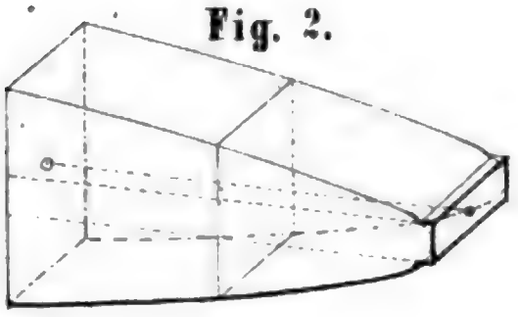


Fig. 5.

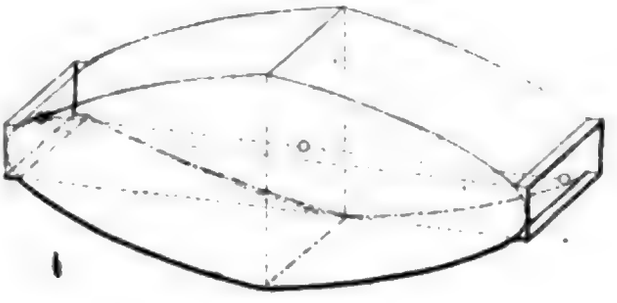


Fig. 3.

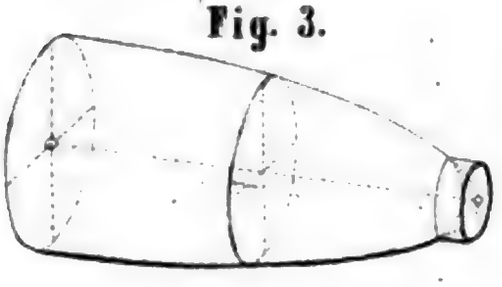


Fig. 6.

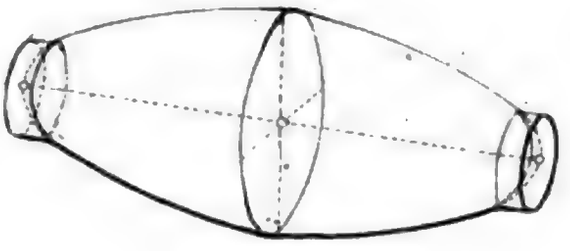


Fig. 7.

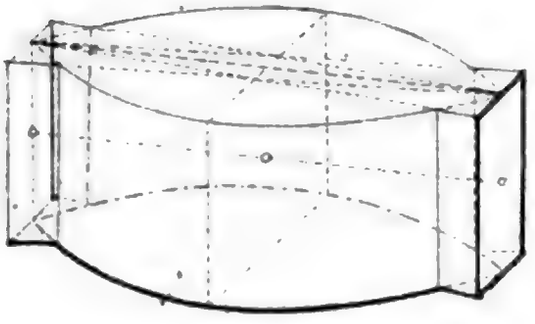


Fig. 9.

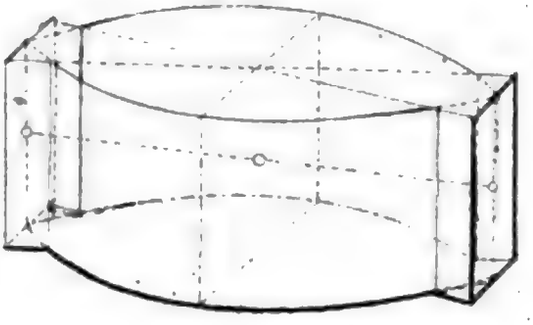


Fig. 8.

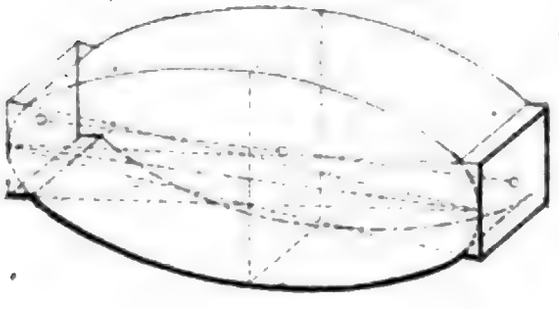
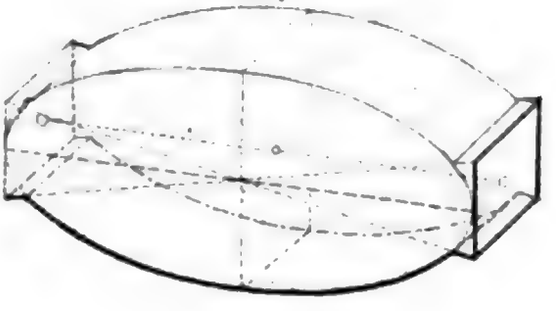


Fig. 10.



Digitized by Google

Digitized by Google

Körpervon constanter Festigkeit.

Fig. 1.

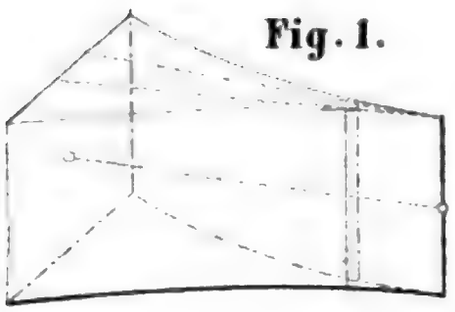


Fig. 2.

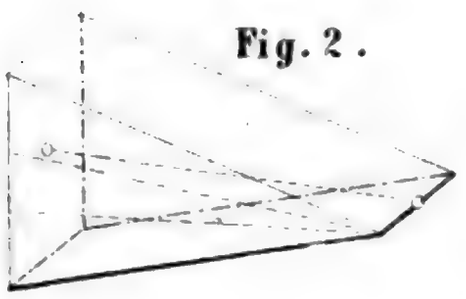


Fig. 3.

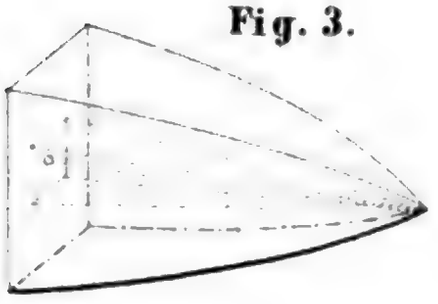


Fig. 4.

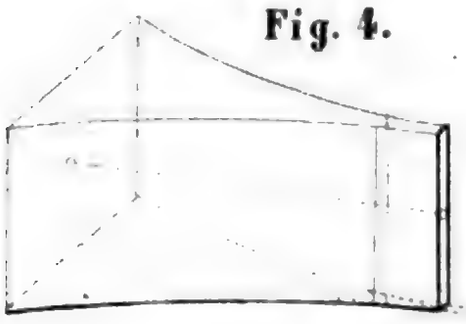


Fig. 5.

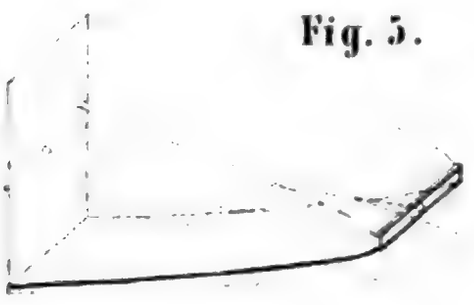


Fig. 6.

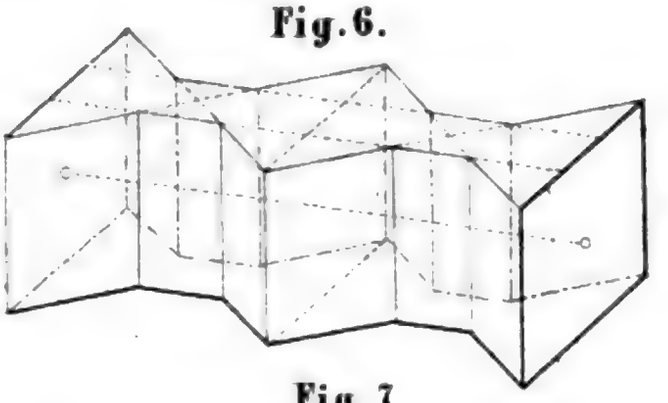


Fig. 7.

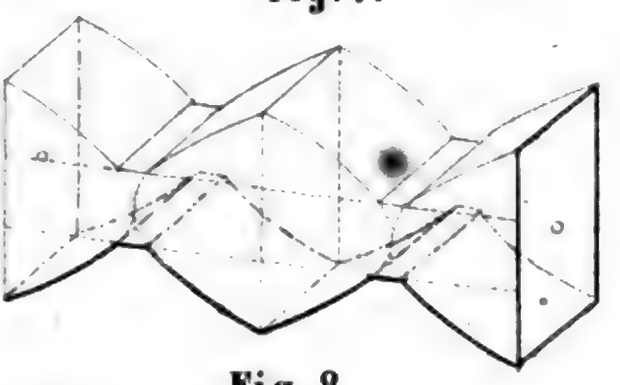


Fig. 8.

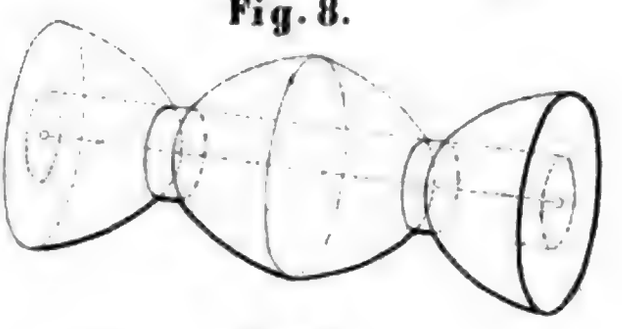


Fig. 9.

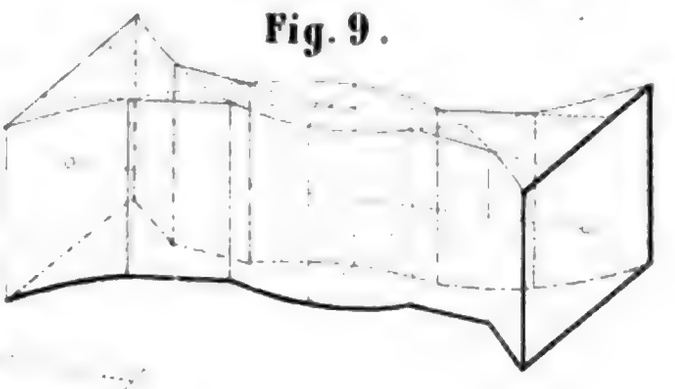
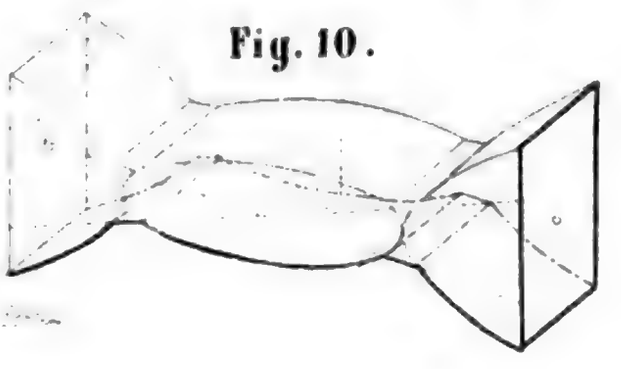


Fig. 10.



Digitized by Google

Digitized by Google

Continuirliche Träger.

Fig. 2.

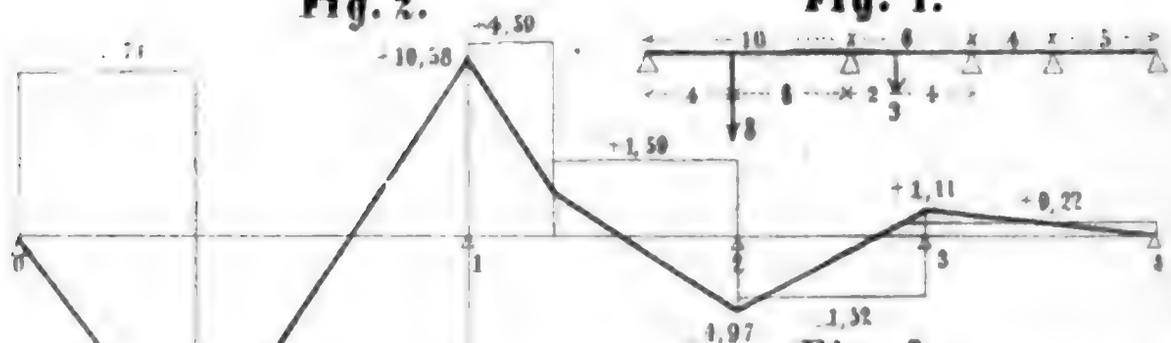


Fig. 1.

Fig. 3.

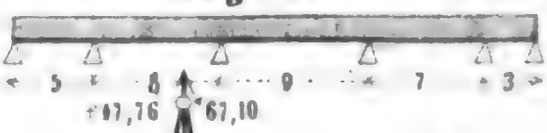


Fig. 4.

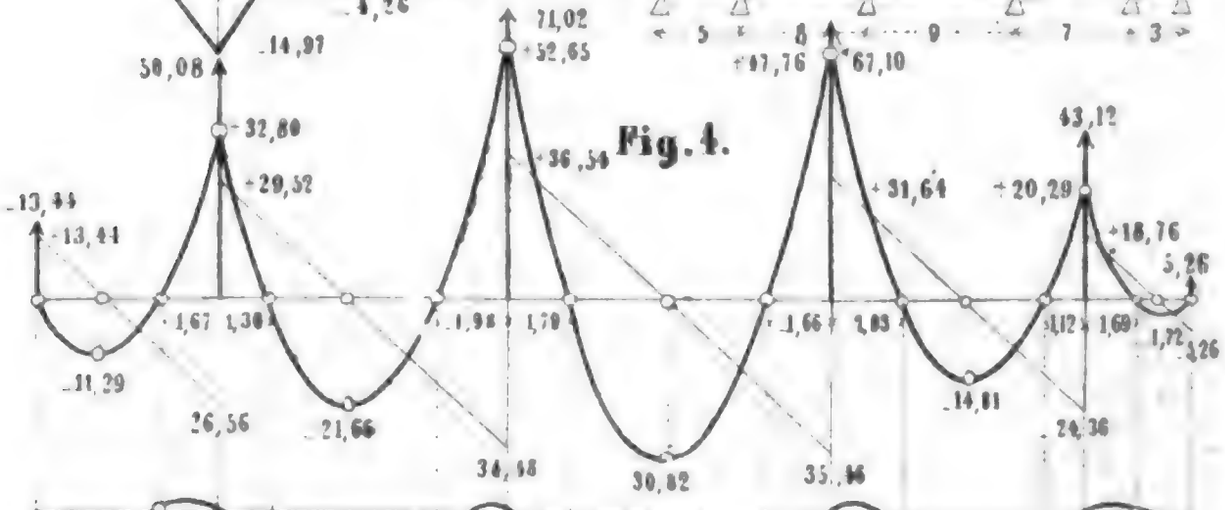
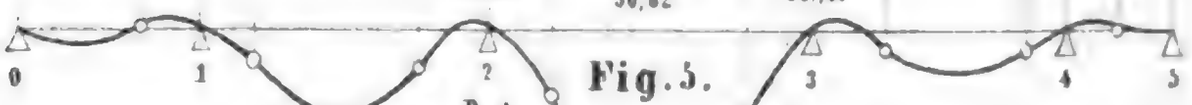


Fig. 5.



Transversalkräfte Q

Momente M

Fig. 6.

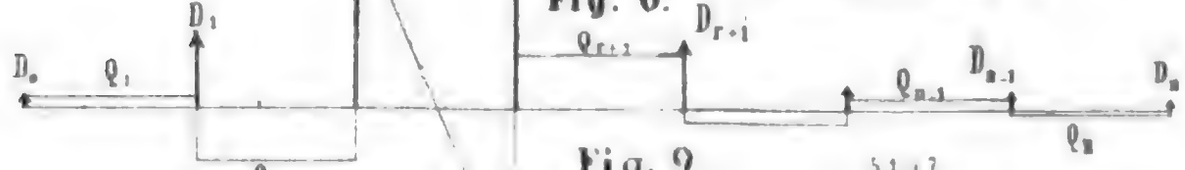


Fig. 9.

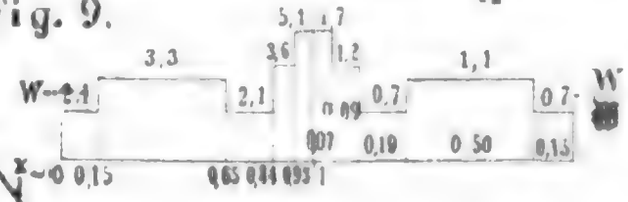


Fig. 7.

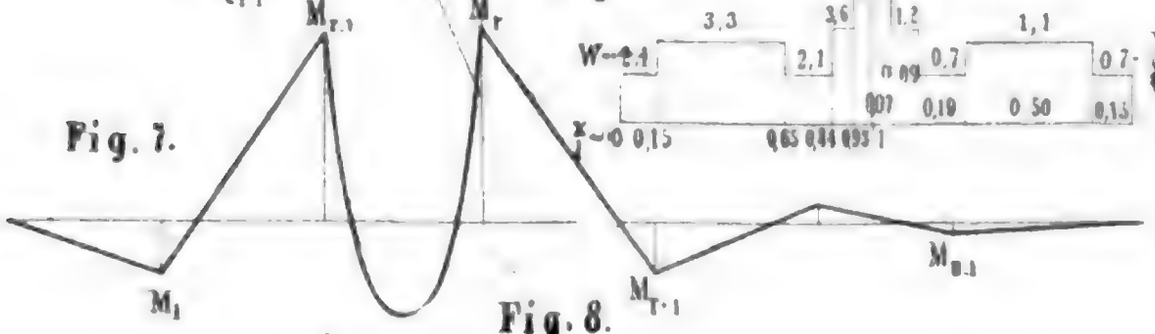
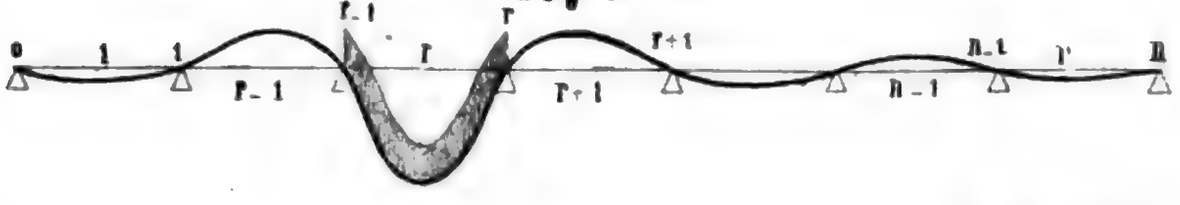


Fig. 8.



Verlag von H. Dominicus

Lith. v. Mitsag & Widmer, Prag

Digitized by Google

Digitized by Google

Transversalkräfte und Momente continuirlicher Träger.

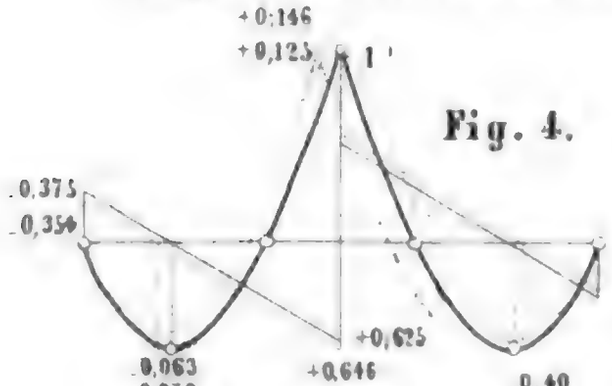


Fig. 4.

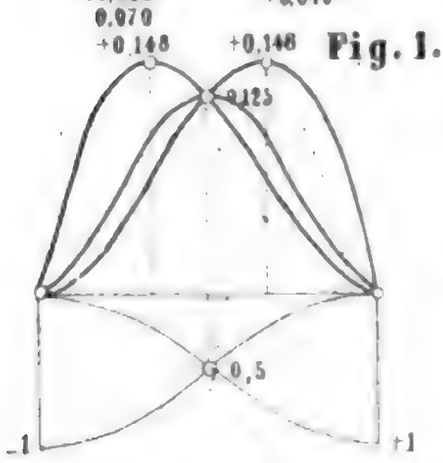


Fig. 1.

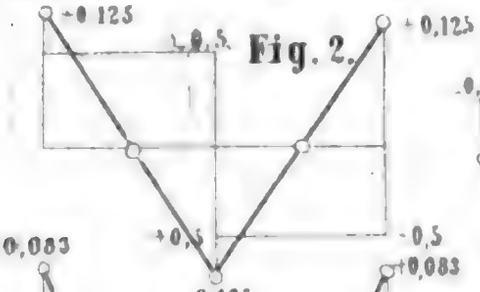


Fig. 2.

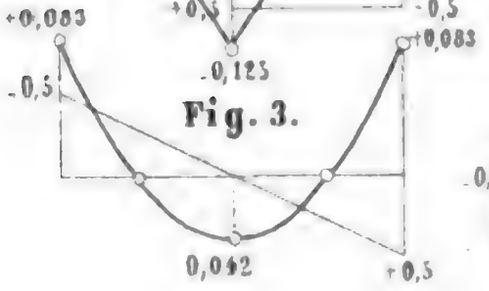


Fig. 3.

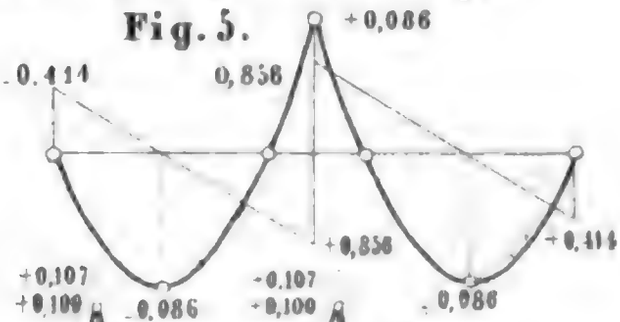


Fig. 5.

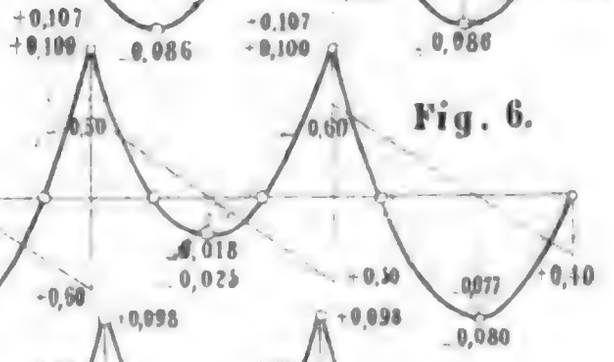


Fig. 6.

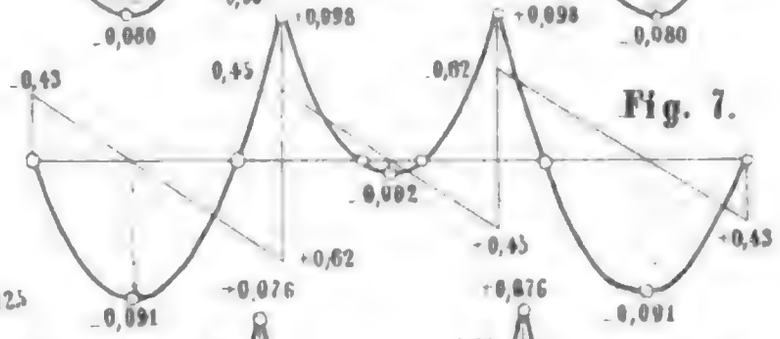


Fig. 7.

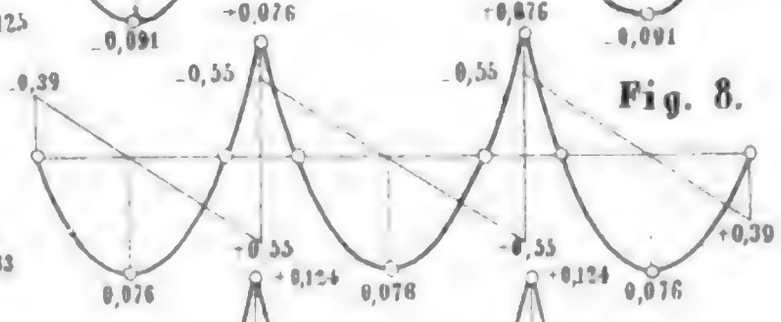


Fig. 8.

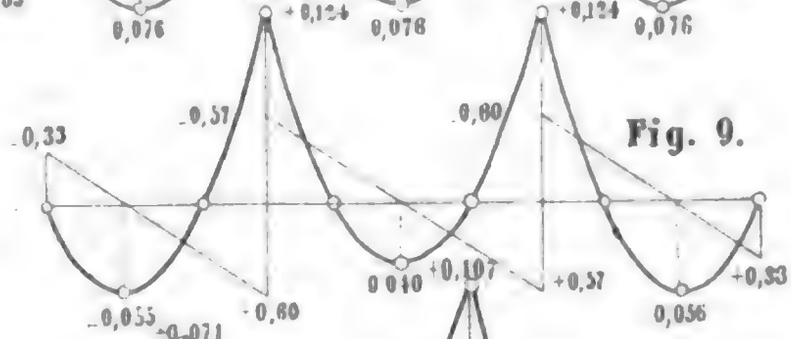


Fig. 9.

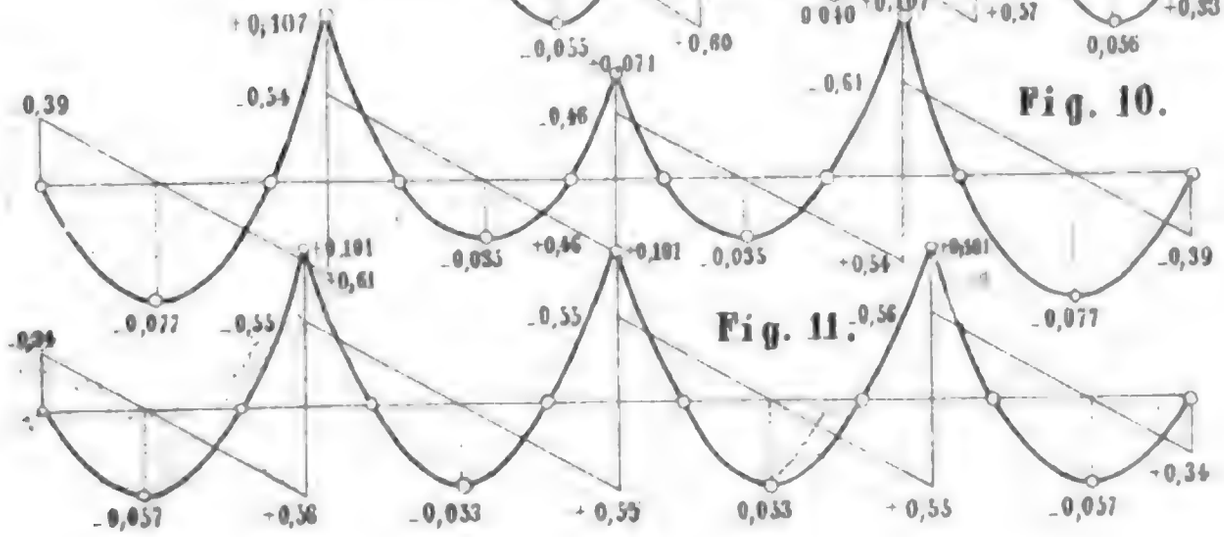


Fig. 10.

Fig. 11.

Digitized by Google

Digitized by Google

Formänderung gerader Stäbe.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 1.

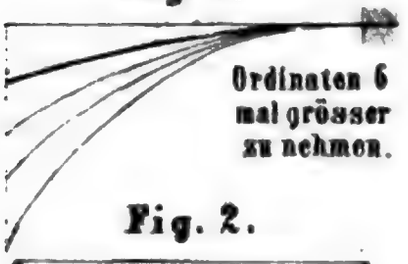


Fig. 9.

Fig. 2.

Fig. 10.

Fig. 3.

Fig. 12.

Fig. 6.

Fig. 11.

Fig. 4.

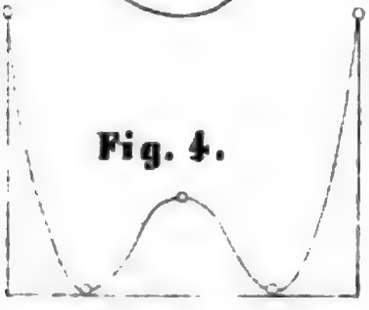


Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Die Formänderung ist in allen Fällen für dieselbe gleichmässige Belastung bei gleicher Querschnittshöhe, bei gleicher Festigkeit und bei gleicher mittlerer Spannweite dargestellt.

Digitized by Google

Digitized by Google

Knickfestigkeit.

Fig. 1.

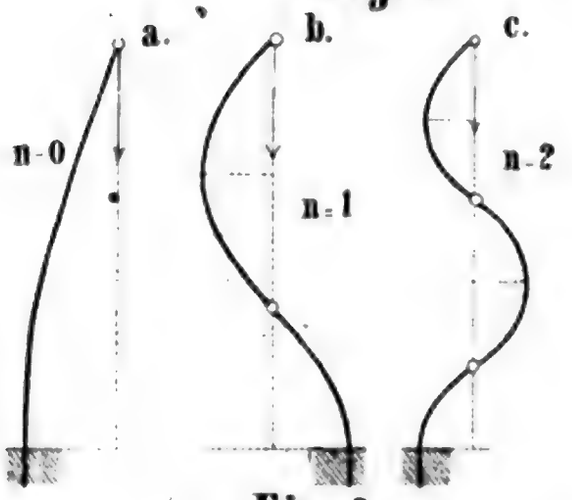


Fig. 3.

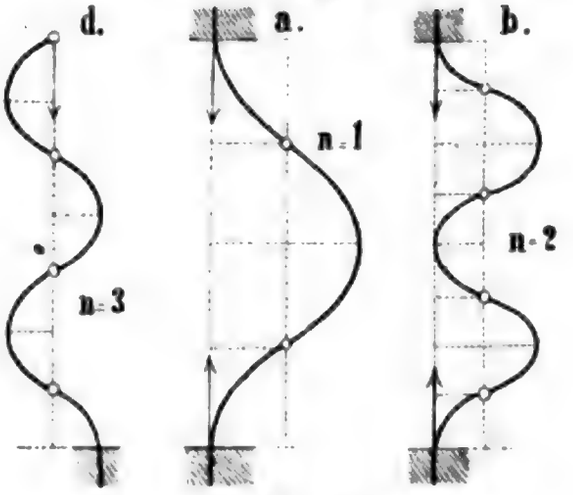


Fig. 2.

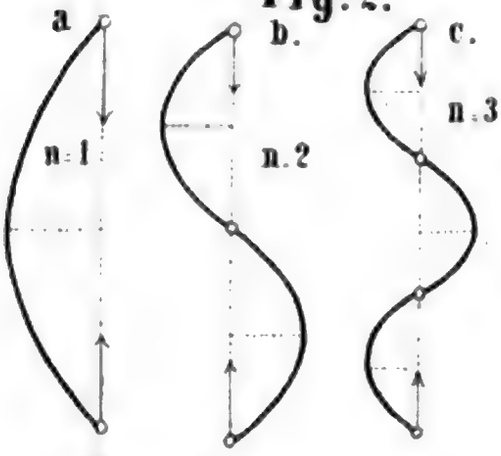


Fig. 8.

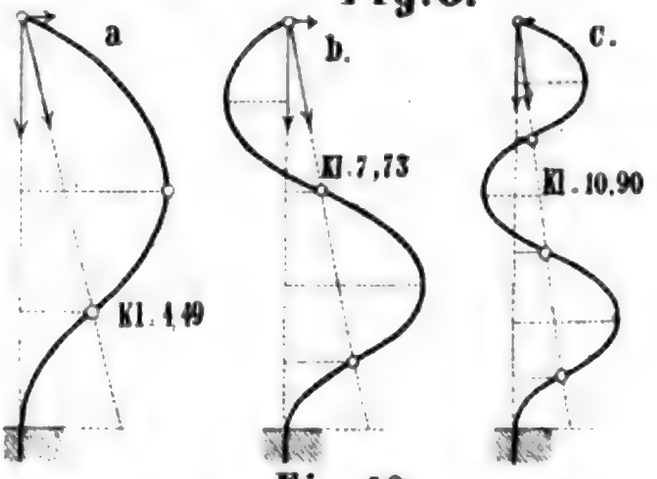


Fig. 9.

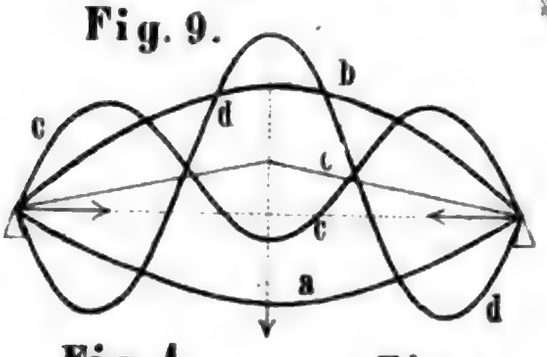


Fig. 10.

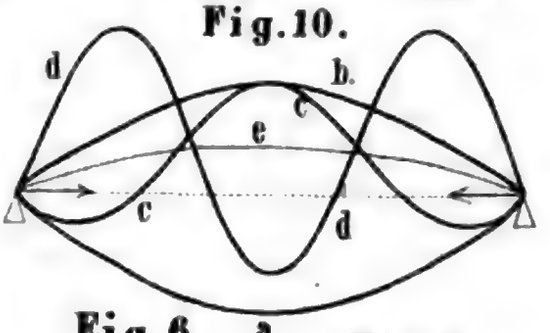


Fig. 4.

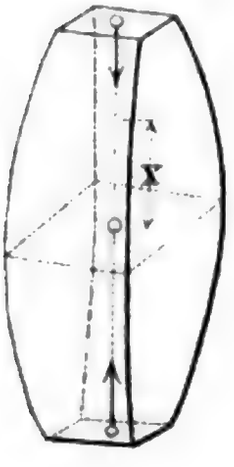


Fig. 5.

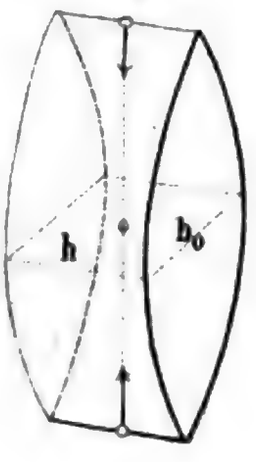


Fig. 6.

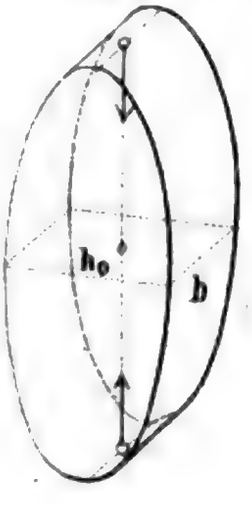
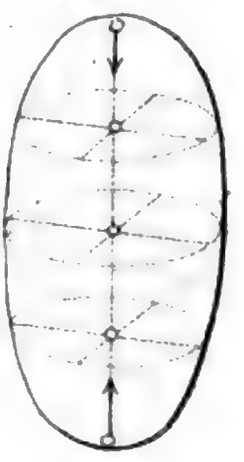


Fig. 7.

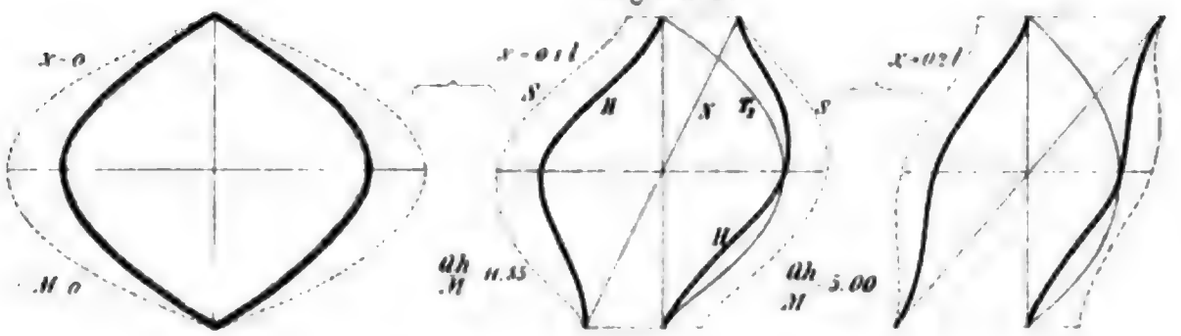


Digitized by Google

Digitized by Google

Spannungen für verschiedene Querschnittsformen.

Fig. 1 u. 2.



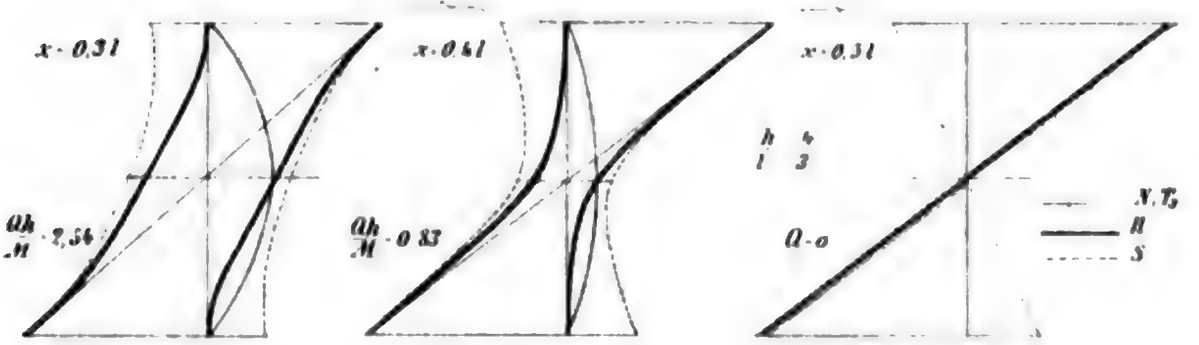


Fig. 3. Fig. 5. Fig. 9.

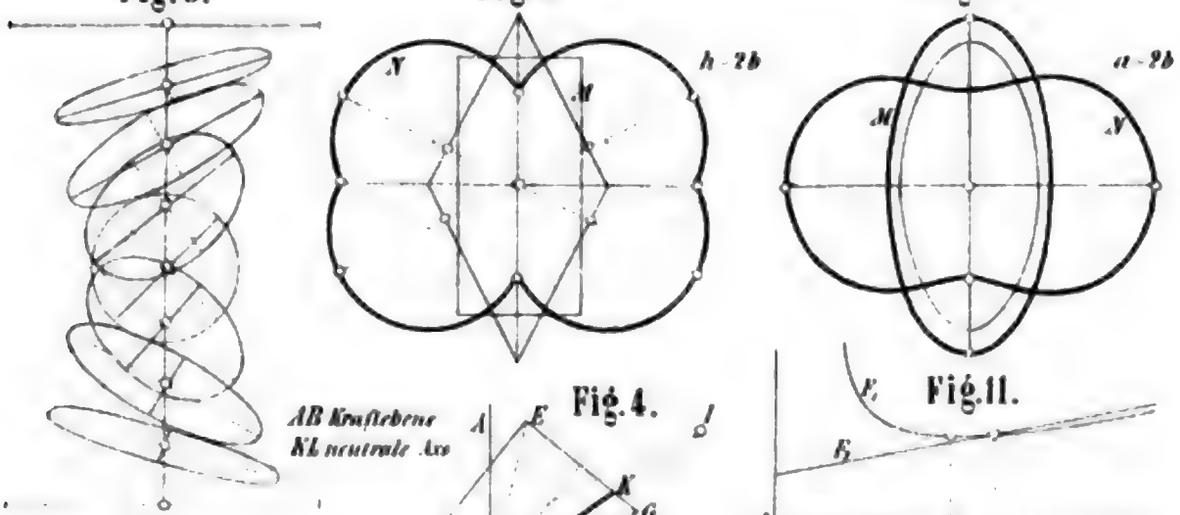


Fig. 6. Fig. 4. Fig. 11. Fig. 12.

Fig. 8. Fig. 7. Fig. 10. Fig. 13.

Digitized by Google

Lith. v. J. Fuchs in Prag

Digitized by Google

De Saint-Venant'sches Problem.

Fig. 2.

Fig. 1.

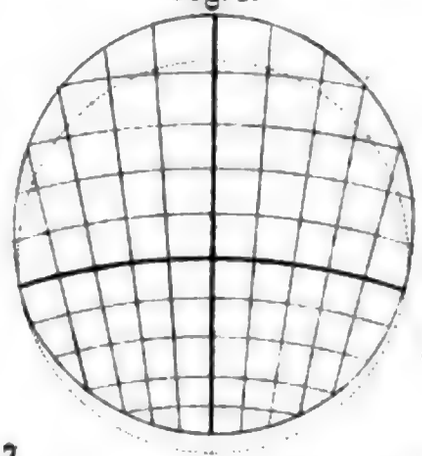


Fig. 3.

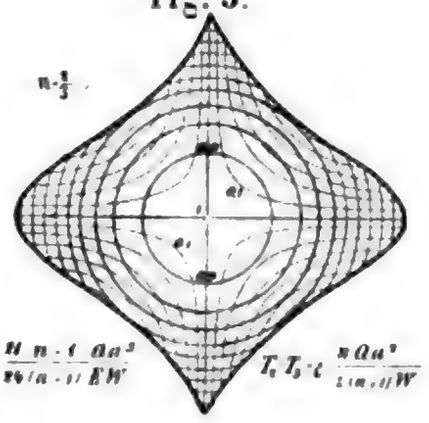


Fig. 7.

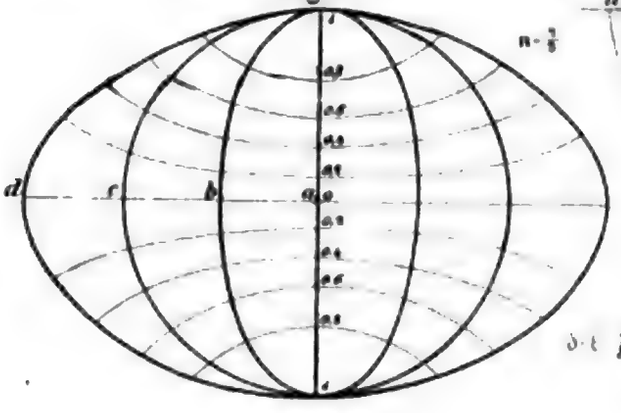


Fig. 4.

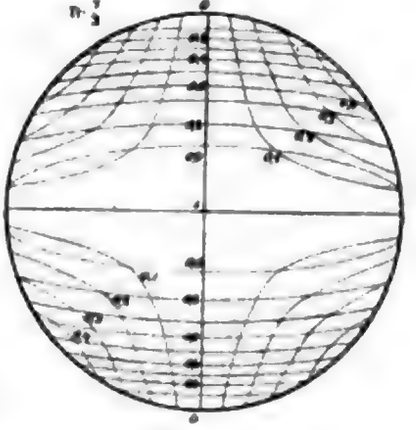


Fig. 8.

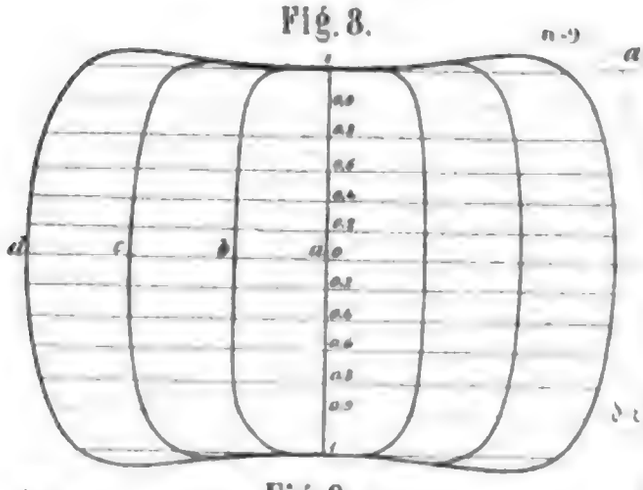


Fig. 5.

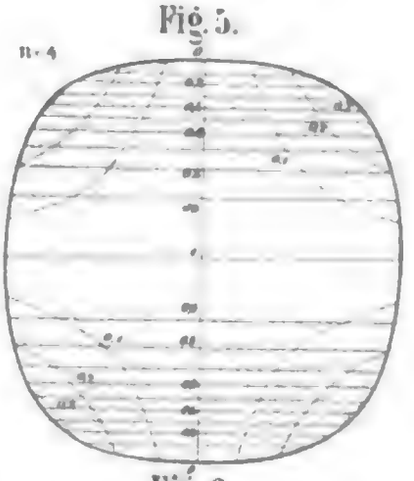


Fig. 9.

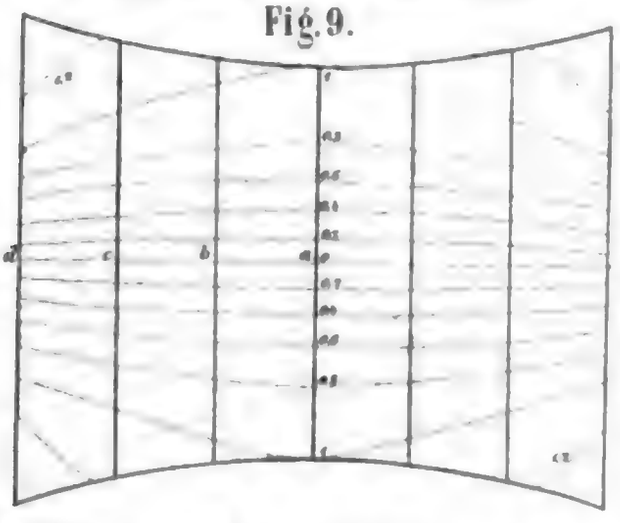
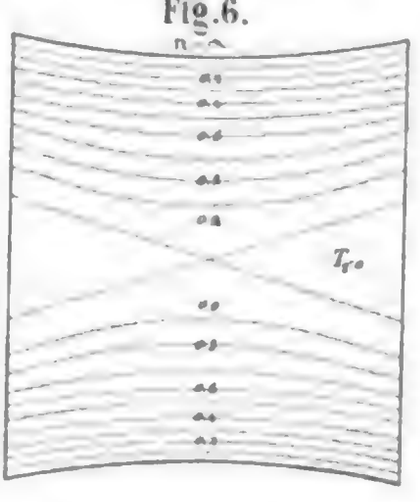


Fig. 6.



Zu Fig. 2: a) n-∞. b) n-4. c) n-1. d) n-2. e) n-$\frac{10}{3}$. f) n-4. g) n-10. h) n-∞ i) n-$\frac{1}{3}$. k) n-$\frac{1}{2}$. ℓ bedeutet die an den Curven stehende Zahl.

Digitized by Google

Digitized by Google

Bogenträger

Fig.1.

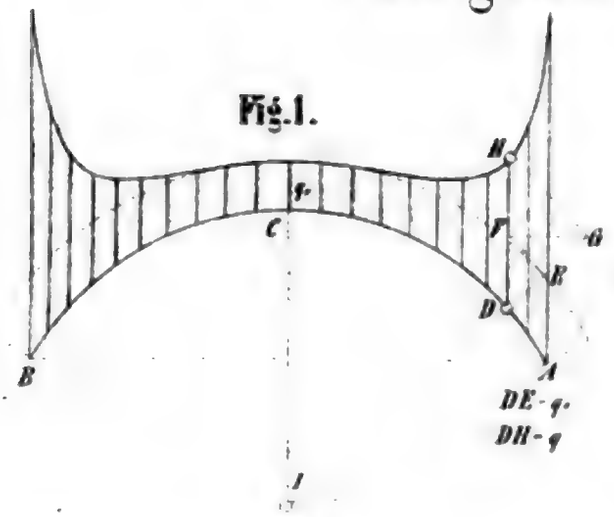
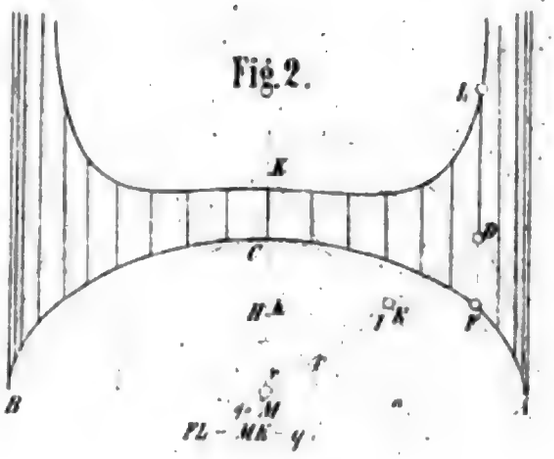


Fig.2.



Axialkraft P
Transversalkraft Q
Moment M

Fig.3.

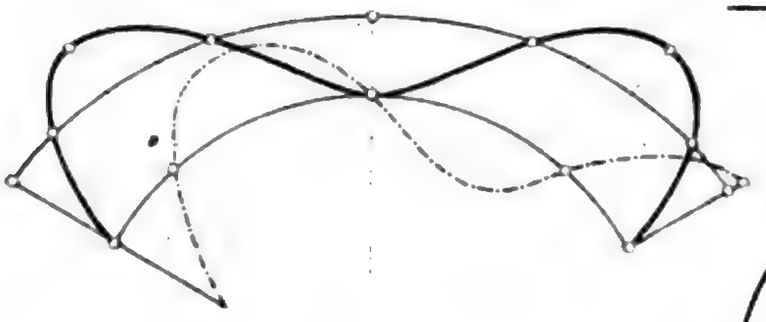


Fig.4.

Fig.5.

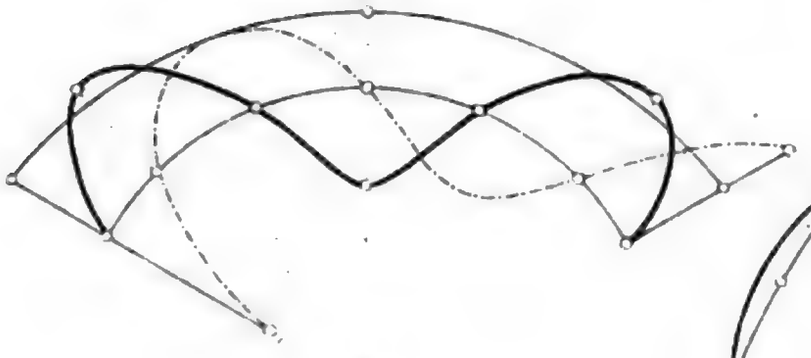


Fig.6.

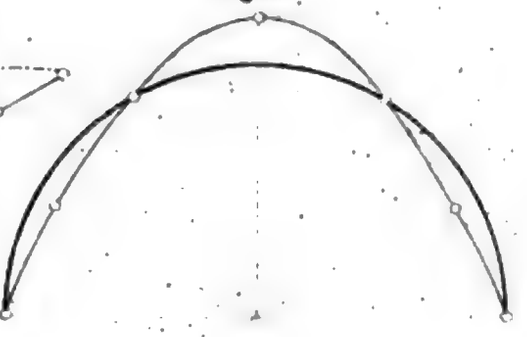


Fig.7.

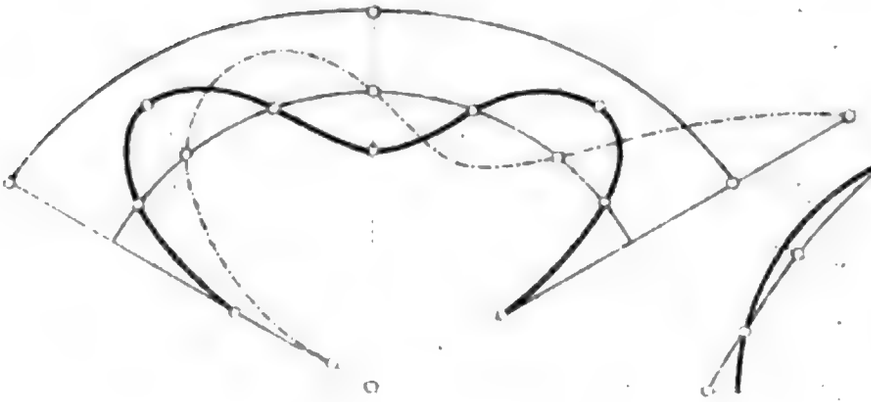
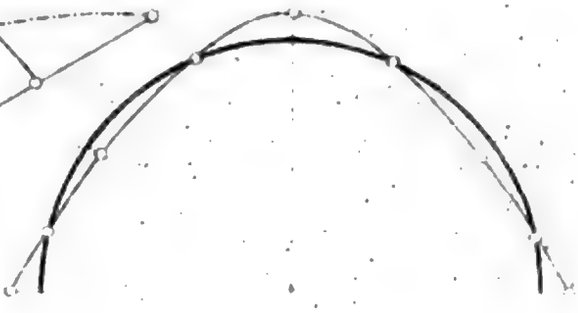


Fig.8.



Digitized by Google

Digitized by Google

Bogenträger.

Fig. 1.

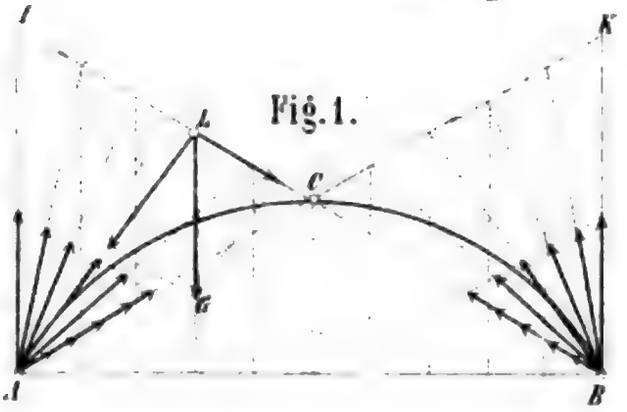


Fig. 2.

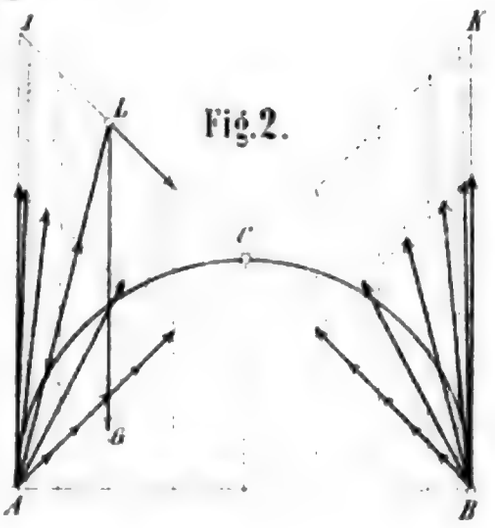


Fig. 3.

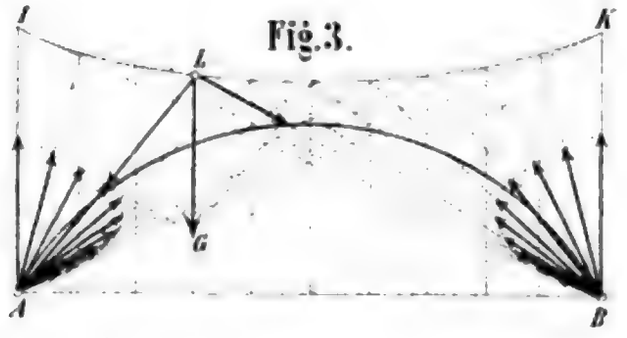


Fig. 4.

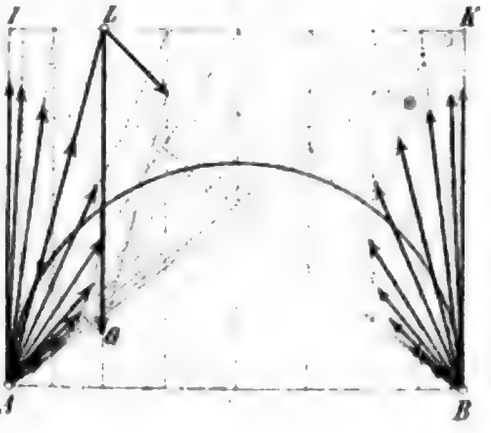


Fig. 5.

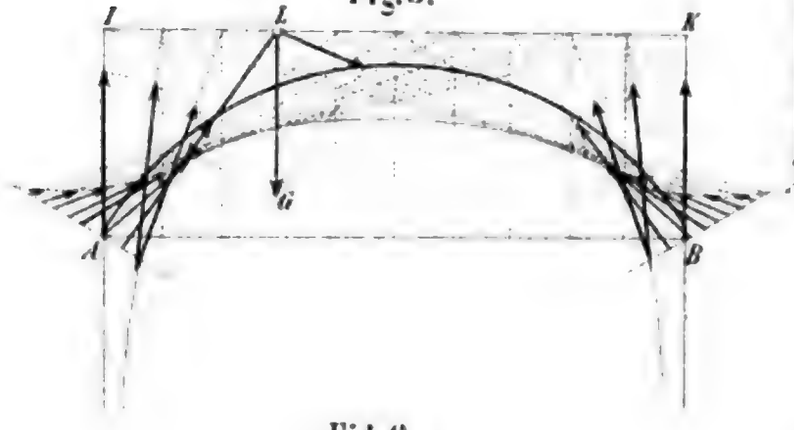


Fig. 6.

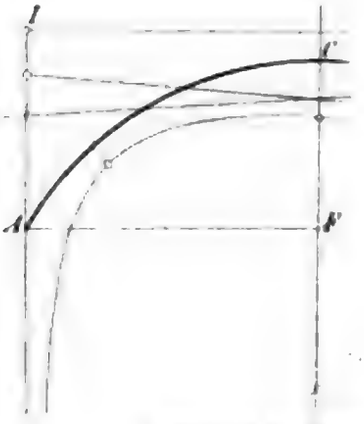


Fig. 7.

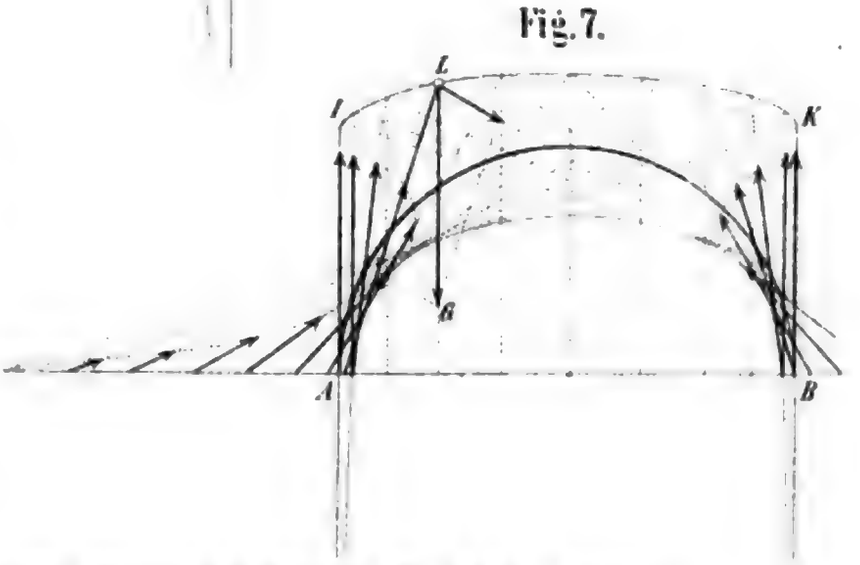


Fig. 1 u. 2. 3 Gelenke. Fig. 3 u. 4. 2 Gelenke. Fig. 5. 1 kein Gelenk.

Digitized by Google

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MÜNCHEN

Ankündigung.

Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit erscheint in zwei Theilen, von denen der vorliegende erste die allgemeinen Lehren und diejenigen Lehren, welche besonders Anwendung im Ingenieur- und Hochbauwesen finden, behandelt und somit als ein selbständiges Werk auftritt. Der zweite Theil wird die übrigen Lehren, welche besonders Anwendung im Maschinenbauwesen etc. finden, sowie die Geschichte und Literatur der Elasticitäts- und Festigkeitslehre enthalten.

Die Verlagshandlung.

INHALT.

I. Theil. I. Abschnitt. Allgemeine Theorie der Elasticität. II. Abschnitt. Normal- u. Schubelasticität. III. Abschnitt. Näherungstheorie der Biegungselasticität gerader Stäbe. IV. Abschnitt. Belastung durch Transversalkräfte. V. Abschnitt. Belastung durch Axial- und Transversalkräfte. VI. Abschnitt. Verschiedene Querschnitts-Formen. VII. Abschnitt. Genaue Biegungstheorie gerader Stäbe. VIII. Abschnitt. Normalelasticität einfach gekrümmter Stäbe. IX. Abschnitt. Biegungselasticität einfach gekrümmter Stäbe.

II. Theil. I. Abschnitt. Torsionselasticität gerader Stäbe. II. Abschnitt. Elasticität doppelt gekrümmter Stäbe. III. Abschnitt. Elasticität der Platten. IV. Abschnitt. Elasticität regelmässig belasteter Rotationskörper. V. Abschnitt. Allgemeine Elasticitätstheorie der Verbindungen. VI. Abschnitt. Dynamik der Elasticität. VII. Abschnitt. Geschichte der Elasticitätslehre. Anhang. Literatur der Elasticitätslehre.

In demselben Verlage erscheint:

Vorträge über Eisenbahnbau,

gehalten am Polytechnicum in Prag

von

Dr. E. Winkler.

In 9 Heften.

Erschienen ist bis jetzt: I. Heft. Eisenbahnoberbau, mit 17 Tafeln. II. Heft. Weichen und Kreuzungen mit 23 Tafeln. — Jedes Heft wird einzeln abgegeben.

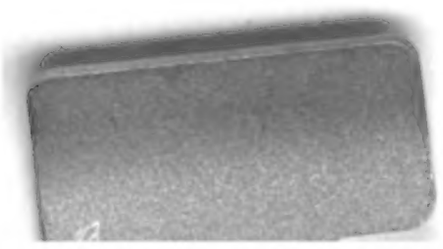
Druck von Heinr. Mercy in Prag

Digitized by Google

Digitized by Google

Schwaighofer

PAL
2007



Digitized by Google

Digitized by Google